TRIGONOMETRIA

PIANA E SFERICA.

TRIGONOMETRIA

PIANA E SFERICA

DI

ANTONIO CAGNOLI,

Cittadino Veronese, Membro della Società Italiana, &c.

IN PARIGI,

PER FRANCESCO AMBROGIO DIDOT.

M. DCC. LXXXVI.

PREFAZIONE.

L'oggetto di quest'Opera si è, di porger comodo ai dotti, e facilità ai principianti. I primi vi troveranno una copiosa raccolta delle vaste risorse della Trigonometria: e mi persuado che i secondi mi sapran grado del sacrifizio, che ho sempre fatto, dell'eleganza de' metodi e delle dimostrazioni, alla chiarezza ed alla brevità. Cosa non v'è certamente che sia più facile ad intendere e ad eseguire, delle sostituzioni: questo è quasi l'unico mezzo che mi ha condotto a tutti i teoremi ed a tutte le soluzioni; presa sovente per fondamento la costruzione geometrica. L'orditura della quistione sopra una figura ha il vantaggio di parlare alla mente ed all'occhio insieme: ma se poi si ricorre opportunamente all'analisi, da questo metodo misto le dimostrazioni ricevono brevità, e le figure semplicità.

Sebbene si tratti di assunto battuto e ribattuto, oso sperare che questa Trigonometria non comparisca del tutto priva di qualche nuova utilità. Mi hanno fatto principalmente coraggio a publicarla certe formole contenenti sotto espression semplicissima i differenziali finiti delle linee trigono-

a

metriche. Molti sono i servigi essenziali che queste formole prestano: mi contenterò d'indicarne due principali.

In primo luogo, facendo uso di esse nel differenziare un'equazione, si ottiene una equazione differenziale finita, cioè matematicamente rigorosa e vera, per quanto sia grande il valor delle variazioni o differenze. Questa nuova massa di equazioni trigonometriche serve dunque a risolvere altrettanti problemi, quante sono le diverse grandezze contenute in dette equazioni, giacchè ognuna delle accennate grandezze può esser sola incognita. Provo in fatti con molti esempj, che questa classe di equazioni dà pronta la soluzione di tutti i problemi, a cui le ho applicate, ed i quali costaron finora non lieve fatica per altre vie.

In secondo luogo, le stesse equazioni, convertite in proporzioni, e comparate con le analogie differenziali notissime, delle quali si fa tanto uso ne' casi, in cui le variazioni son bensì piccole, ma pur finite, e non infinitamente piccole, svelano le precise quantità che sono neglette dal calcolo infinitesimale nelle dette analogie, ed offrono facile il modo di tener conto delle dette quantità, quando il caso lo meriti. Non mi mancano esempj per far vedere, che gli errori delle analogie dif-

ferenziali, negli usi stessi in cui vengono giornalmente impiegate, sono più gravi di quel che si creda comunemente.

Le analogie differenziali, fondate sull' ipotesi che due parti del triangolo siano costanti, possono applicarsi, con somma facilità ed utilità, anche ai casi, ne' quali una sola parte, o nessuna parte del triangolo sia costante. Ho dato a tal fine un metodo generale, al qual giova specialmente la cura che ho avuto, costruendo le analogie, d'indicare co' segni positivo e negativo, se le variazioni delle parti diverse del triangolo, in crescere od in calare, si facciano nel medesimo senso, od in senso contrario.

Quanto alla risoluzione de' triangoli, che è lo scopo primario della Trigonometria, mi lusingo che in questa parte altresì non siano riusciti del tutto infruttuosi i miei studj. Senza parlar delle formole nuove che il Lettore distinguerà, ho cercato di dar soluzioni opportune anche ai casi particolari; sia quando in vece del valore assoluto di alcune parti del triangolo, note son le lor somme, o le loro differenze; sia quando i seni o coseni, per esser grandi, non posson dare con precisione il valore degli archi corrispondenti, col mezzo delle Tavole più usitate. Ho liberato il Calcolatore

da ogni considerazion della perpendicolare nei triangoli sferici: e purchè osservi le sole regole intorno ai segni delle linee trigonometriche ne' diversi quarti del circolo, ho disposto le soluzioni in guisa, che mai non potrà ingannarsi circa la specie dell'arco cercato; sul qual punto si vedrà quanti esistano fallaci precetti in celebri Autori. Ho pur ridotto i Casi dubbj dentro i limiti più ristretti, in cui possa la Trigonometria confinarli da per se sola. Finalmente ho chiamato a comparazione i triangoli sferici coi rettilinei; e questo assunto, per avventura non men curioso che nuovo, non mi è sembrato mancante di utilità.

Per quel che riguarda le pratiche della Trigonometria sul terreno, non ho tralasciato di sminuzzare tutto ciò che è più necessario e più utile da sapersi dagl'Ingegneri e da' Geografi, onde operare con la più scrupolosa accuratezza.

La Trigonometria somministra i mezzi per valersi comodamente de' logaritmi nelle addizioni e sottrazioni, in qualunque caso e per qualsivoglia espressione. Non pretendo che questa idea sia affatto nuova; ma la mancanza di un metodo generale di facile uso, quale è il metodo che da me viene esposto, fu causa che non siasi pensato ad usare gli accennati mezzi in moltissimi incontri, ove riescono assai vantaggiosi.

Da questo metodo scaturiscono, come da natural fonte, le soluzioni di tutte le equazioni di secondo e di terzo grado, per mezzo della Trigonometria.

Mi si è poi affacciato al pensiero, che il calcolo differenziale possa condur facilmente al valore della grandezza ignota nelle equazioni di qualunque grado e natura. Questo espediente è alquanto ovvio; pur lo credo affatto nuovo: giudicheranno i Lettori, se maneggiato, come le mie formole differenziali trigonometriche mi han suggerito, sia degno di qualche attenzione.

Ho creduto ben d' inserire in questo Trattato i primi precetti del Calcolo differenziale, e del metodo del Ritorno delle serie, atteso il grande uso che faccio dell' uno e dell' altro, con non mediocre utilità. Gli ho dichiarati minutamente; giacchè in generale suppongo il Lettore solamente iniziato nelle Matematiche; cioè che sappia risolvere una equazione, conosca le proporzioni, le progressioni, e le prime proposizioni della Geometria, non ignori l'uso e la teoria elementare de' logaritmi, e ben posseda il calcolo aritmetico, massime per decimali.

Se non ho trattato della riduzione de' logaritmi immaginarj ad archi circolari, nè della sommazione

delle serie infinite col soccorso della periferia del circolo, nè dell' uso de' fattori immaginarj de' seni, per rintracciare il termine generale delle serie ricorrenti, nè d'altri argomenti consimili, che già trovansi esposti con eleganza e chiarezza insieme nell' *Analisi degl' infiniti* del grande Eulero; spero d'esserne facilmente scusato; poichè queste materie spettano propriamente all' Analisi, e la Trigonometria vi fa ufizio puramente servile, e per così dire accidentalissimo.

Non ho poi risparmiato le applicazioni di essa, dove fa il principal personaggio, cioè nell' Astronomia. Le soluzioni, che do del maggior numero de' problemi di questa scienza, sono nuove, generalmente parlando, o nel metodo, o ne' risultati: quivi specialmente si mette alla prova l'utilità di tante nuove formole, che il presente Trattato contiene.

Mi astengo dal parlar delle Tavole, che ho poste alla fine, giacchè manifestano da se stesse i loro usi ed i loro avvantaggi. I logaritmi della Tavola (BB), dopo quello del numero 1153, sono stati da me calcolati col mezzo delle mie formole espedite, che trovansi in questo Trattato. Per assicurarmi di non avere commesso errore nel calcolo, ho formato tutti i logaritmi de' numeri intermedj,

ed ho preso le differenze fino alla settima. Questa operazione mi ha dato occasion di verificare l'esattezza di un gran numero d'altri logaritmi della medesima Tavola.

Tralascio di far quì menzione degli Autori, da'quali ho preso liberamente, qualunque volta mi parve che non avrei saputo far meglio; giacchè ho stimato più conveniente di render loro il dovuto omaggio di volta in volta nel corso dell'Opera.

Se abbia studiato di renderla completa, rinunziando soltanto a que' metodi più complicati di cui la Trigonometria non ha alcun bisogno, meglio comprender potrà chiunque voglia trascorrere la seguente Tavola delle materie.

Assidue diligenze ho perfine impiegate nella parte tipografica, e col soccorso propizio di molti Cooperatori, ben conoscendo quanto siano penosi e ributtanti gli errori di stampa, sopra tutto in un Libro di Matematica. Per compimento delle usate cure, mi resta da pregare il Lettore di ricordarsi che v'è un'Appendice, la qual contiene diverse correzioni, ed aggiunte, per cui non diffido del suo gradimento.

La traduzione francese di quest'Opera comparisce alla luce nel medesimo tempo, e merita in-

tiera fede; per essere stata fatta non solo da mano perita delle due lingue, e delle materie; ma di concerto con me, e direi quasi sotto i miei occhi. Il Sig. Chompré, già noto vantaggiosamente per li suoi Elementi d'Aritmetica, d'Algebra, e di Geometria (*Paris, chez Nyon l'aîné*), essendosi addossato sì pesante lavoro per pura amicizia, fu inoltre causa co'suoi consigli, e con la sua versione, ch'io migliorassi il mio testo in moltissimi luoghi, rendendo il discorso o più chiaro, o meglio dedotto, o talvolta anche più esattamente rigoroso.

TAVOLA

TAVOLA DE' CAPITOLI

E DELLE PRINCIPALI MATERIE.

Fine della Tavola de' Capitoli.

CORREZIONE ESSENZIALE.

Tavola I, *formola* 42ª $\sqrt{\frac{1 + \cos.2A}{1 - \cos.2A}}$ *corrige* $\sqrt{\frac{1 - \cos.2A}{1 + \cos.2A}}$

Errori scoperti dopo la stampa dell' Appendice.

Art. 807, lin. 13; dalla parallasse *corrige* dal logaritmo della parallasse

Art. 840, lin. 2; uguali dappertutto a quelli di latitudine *corrige* uguali fra essi in tutta la carta

---

EXTRAIT des registres de l'Académie Royale des Sciences, du 11 *Février* 1786.

MM. DE LA LANDE et MÉCHAIN, qui avoient été nommés pour examiner le *Traité de Trigonométrie* par M. CAGNOLI, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet ouvrage digne d'être approuvé et imprimé sous son Privilege. En foi de quoi j'ai signé le présent certificat. A Paris le 11 Février 1786.

LE MARQUIS DE CONDORCET,
Sécretaire perperpétuel.

TRIGONOMETRIA

TRIGONOMETRIA.

CAPITOLO PRIMO.

Definizioni, ed Avvertimenti preliminari.

1. TRIGONOMETRIA, nome Greco, significa *misura de' triangoli.* Posta la cognizione di alcune parti del triangolo, la Trigonometria porge i mezzi di rinvenire il valore di tutte le altre. Questa operazione si chiama *risoluzione de' triangoli.* Le parti del triangolo considerate dalla Trigonometria sono gli angoli, e i lati. La misura delle superficie racchiuse fra i lati spetta più propriamente alla Geometria.

2. Facilmente risalta, quanto sia vasta l' utilità, e grande il diletto che porge la Trigonometria, poichè co' suoi calcoli si misurano esattamente e agevolmente le distanze accessibili, e le inaccessibili: come, per esempio, la larghezza di una fossa, di un fiume, di un lago; l' altezza di un campanile, d' una montagna; le dimensioni di un rivellino, e delle altre militari fortificazioni; le distanze de' paesi fra loro; e finalmente quelle degli astri coi loro diversi movimenti nell' immenso spazio dell' Universo.

3. Il triangolo formato da linee rette, appartiene alla Trigonometria *piana*, o *rettilinea.* Se i lati sono archi di circolo, considerati o descritti sopra la superficie di una sfera, la risoluzione del triangolo forma il soggetto della Trigonometria *sferica.*

Suppongo nota, per la Geometria, la divisione adottata del circolo in 360 parti eguali, dette *gradi;* come pur, che ogni grado si suddivide in 60 *minuti,* o sia *minuti primi;* ogni minuto primo in 60 *secondi,* ogni secondo in 60 *terzi,* e così discorrendo. Per abbre-

viatura, volendo accennar, per esempio, un arco di sei gradi ventisette minuti quarantotto secondi, si scrive $6^\circ\ 27'\ 48''$.

4. La Trigonometria si prevale di certe linee, alle quali furono imposte le denominazioni seguenti.

Fig. 1. Dato un arco minore di 90°, come BD, terminato dai raggi CB, CD, se da una delle estremità, come B, si conduce la perpendicolare BA sopra l' altro raggio CD; BA chiamasi il *seno*, AC il *coseno*, e AD il *seno verso* dell' arco BD, o sia dell' angolo ACB. La perpendicolare è dunque il *seno*, la parte di raggio intercetta fra essa perpendicolare ed il centro è il *coseno*, e la porzione di raggio che resta fra la perpendicolare e l' arco, vale a dire, la differenza fra il raggio e il coseno, è il *seno verso*, che appellasi pure *freccia*, e *saetta*.

Poichè un angolo riceve il suo valore dall' arco che lo misura, nomineremo ora l' uno ora l' altro indifferentemente. Ora (3) l' arco appartiene alla Trigonometria sferica, e l' angolo formato da due linee rette alla piana. Dunque tutto ciò che diremo delle *linee trigonometriche* spetta ugualmente alle due Trigonometrie. Questa è la ragione, per cui non abbiamo diviso in due parti quest' Opera.

5. Per le definizioni ora date, se BE sia perpendicolare a CF, BE sarà il seno, CE il coseno, EF il seno verso di BF. Suppongasi che BF sia complemento a 90° dell' arco BD, vale a dire, che ACE sia angolo retto; BE sarà parallela ed eguale ad AC, CE sarà parallela ed eguale ad AB; cioè seno di BF = coseno di BD = coseno di (90° — BF), e coseno di BF = seno di BD = seno di (90° — BF). Dunque *il seno di un angolo è uguale al coseno del complemento di esso angolo*; ed *il coseno è uguale al seno del complemento*, il qual fu anche detto *seno secondo*. Onde seno 45° = coseno 45°, il che è pure evidente, poichè allora il triangolo rettangolo, nel quale sono considerati, è anche isoscele.

EF si chiama *coseno verso* di BD, e AD *coseno verso* di BF. Onde il coseno verso non è altro, che la differenza fra il raggio ed il seno.

6. Se la perpendicolare (4) si menasse dall' altra estremità D

sopra il raggio CB, ne nascerebbe un triangolo eguale affatto ad ABC, poichè ambi avrebbero un angolo retto, l' angolo C comune, e l' ipotenusa BC dell' uno eguale all' ipotenusa CD dell' altro. Dunque la nuova perpendicolare sarebbe eguale a BA, e dividerebbe BC in due parti respettivamente eguali ad AC e a AD. I risultati sono dunque gli stessi; da qualunque delle due estremità di un arco si faccia partir la perpendicolare.

7. Elevando una perpendicolare, come DG, dall' estremità di uno de' raggi CD finchè s' incontri con l' altro CB prolungato, la perpendicolare DG dicesi la *tangente*, ed il raggio prolungato CG la *secante*, dell' arco BD.

Per la stessa ragione, FH essendo la tangente, CH la secante, di BF complemento di BD, la prima si nomina *cotangente*, e la seconda *cosecante* dell' angolo ACB. Così DG è la cotangente, CG la cosecante di BF.

8. Per abbreviatura si scrive, R in vece di raggio, sen. in luogo di *seno*, cos. per *coseno*; tang., cot., sec., cosec., in vece di *tangente*, *cotangente*, *secante*, *cosecante*; così sen.v. e cos.v. in cambio di *seno verso* e *coseno verso*. Per esempio, sen.BD significa seno dell' arco BD; e sen.BCD significa seno dell' angolo BCD.

Useremo pure log. in vece di *logaritmo*, ∞ in vece di *infinito*, e compl. per significare *complemento aritmetico* (194); $a > b$ vuol dire *a più grande di b*, e $a < b$ il contrario cioè, *a minore di b*. Uso inoltre il segno seguente $\backsim$ per indicare la *differenza positiva* fra due quantità, cioè per indicare che la più piccola deve esser sottratta dalla più grande. Per esempio, $a \backsim b$ significa $a - b$ quando $a > b$, e $b - a$ quando $a < b$. Conseguentemente $a \backsim b$ si può leggere *la differenza positiva* fra *a* e *b*, e $a \pm b$ si può leggere *la somma, o la differenza positiva* di *a* e di *b*.

Finalmente, per aver più frequente la facilità di denotare gli angoli con una lettera sola, ho situato spesso la lettera dentro la figura, fra i lati che formano l' angolo che denoto con essa lettera. Così, per esempio, nella fig. 1 per angolo C intendo ACB.

A ij

9. Avverto i giovani lettori, che farò un uso continuo delle seguenti trasformazioni, di cui sarebbe troppo lungo, e nojoso ai provetti, il dar la spiegazione di volta in volta. Se non sapessero d'Algebra quanto occorre per intenderle tutte, ed averle familiari, la miglior via per capacitarsi presto, sarà quella di metter numeri a volontà in vece delle lettere, e vedere se l'espressioni diano il conto giusto.

Ogni ragione geometrica moltiplicata, o divisa, per una medesima quantità non cangia valore. Onde in generale, $a : b :: 1 : \frac{b}{a} :: \frac{a}{b} : 1 :: am : bm :: \frac{a}{n} : \frac{b}{n}$.

Ogni frazione è una ragione geometrica, onde $\frac{a}{b}$ è la stessa cosa, che $a : b$, anzi qualche Autore preferisce questa maniera di scrivere alla precedente. Perciò la regola data per le ragioni conviene ad ogni frazione.

10. Le proporzioni geometriche ammettono ogni trasformazione, che non alteri l'uguaglianza fra il prodotto de' termini medj e quello degli estremi. Onde, $a : b :: c : d$, questa proporzione potrà variarsi come segue:

$$a+b : a-b :: c+d : c-d$$
$$a \pm b : a :: c \pm d : c$$
$$a \pm b : b :: c \pm d : d$$
$$a : a \pm b :: c : c \pm d$$
$$b : a \pm b :: d : c \pm d$$

11. Il segno doppio $\pm$, impiegato per brevità, significa che quando si prende il positivo in una ragione, convien prendere il positivo anche nell' altra. Lo stesso sia detto del segno negativo. In generale nelle equazioni e proporzioni, ove si troverà il segno doppio $\pm$, ovvero $\mp$, s'intende che quando si prende il segno superiore in un termine conviene prendere il superiore in tutti gli altri termini. E così deve farsi del segno inferiore.

12. La proporzione fondamentale $a : b :: c : d$, potendosi

volgere, come segue, $a : c :: b : d$, ne risulta che le trasformazioni date di sopra (10) hanno ancor luogo, mettendo per tutto c in vece di b, e b in vece di c.

Abbiamo supposto il primo termine maggior del secondo, e per conseguenza il terzo maggior del quarto. Quando il contrario avrà luogo, come nella seguente $2 : 4 :: 3 : 6$, si rovescieranno le proporzioni, scrivendo $6 : 3 :: 4 : 2$; e paragonando questa con la generale $a : b :: c : d$, cioè facendo $a = 6$, $b = 3$, &c., la proporzione rovesciata diverrà suscettibile di tutte le trasformazioni indicate di sopra.

Finalmente se due proporzioni avessero comuni i termini medj, ovvero gli estremi, come $a : b :: c : d$, e $a : m :: n : d$, sarà $b : m :: n : c$.

13. Il moltiplicare o divider due proporzioni l' una per l' altra, termine a termine, non distrugge la proporzione. Combinando in queste due maniere l' analogia, $m : n :: p : q$, con la precedente (10), $a : b :: c : d$, si avrà, $am : bn :: cp : dq$, e $\frac{a}{m} : \frac{b}{n} :: \frac{c}{p} : \frac{d}{q}$, o vero $\frac{m}{a} : \frac{n}{b} :: \frac{p}{c} : \frac{q}{d}$. Per la stessa ragione, sarà $a^2 : b^2 :: c^2 : d^2$; e per conseguenza $\sqrt{a} : \sqrt{b} :: \sqrt{c} : \sqrt{d}$.

Similmente il moltiplicare, o dividere un' equazione per una medesima quantità, come pure il sottrarla, o l' aggiungerla a ciascun dei due membri, non altera l' equazione. Sia $ad = bc$; si avrà $amd = bmc$, e $\frac{ad}{n} = \frac{bc}{n}$, e $ad + m = bc + m$, e $ad - n = bc - n$.

14. Per introdurre un fattore sotto il segno radicale, conviene elevarlo alla potenza indicata dall' esponente del radicale, e moltiplicarlo per ogni termine contenuto sotto il radicale. Viceversa per estraere una quantità di sotto al segno radicale, conviene dividere per essa ogni termine contenuto sotto il radicale, indi mettere la radice di essa quantità per fattore del radicale. Onde $\frac{a}{b}\sqrt{m^2+n^2}$ $= \frac{1}{b}\sqrt{a^2m^2 + a^2n^2} = a\sqrt{\frac{m^2+n^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{a^2m^2+a^2n^2}{b^2}} = \frac{an}{b} \times$ $\times \sqrt{\frac{m^2}{n^2} + 1} = \frac{am}{b}\sqrt{1 + \frac{n^2}{m^2}}$.

Se la quantità da estraere fosse un divisore, allora si moltiplicherà, in vece di dividere, l' espression sotto il radicale. Onde $\sqrt{m^2 + \frac{n^2}{r^2}} = \frac{1}{r} \sqrt{m^2 r^2 + n^2}$.

15. Ho veduto de' principianti arrestarsi a certe trasformazioni, volendo intenderle con la mente, senza pensare a verificarle con la penna. Per esempio, se si ponesse ab in luogo di $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$; basta formar per disteso i quadrati indicati dagli esponenti, e fatta la sottrazione si vedrà che il resto è ab. Similmente si trova che $a^2 + b^2$ è la stessa cosa che $2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. In simili casi bisogna dunque far le operazioni indicate dall' espressione, quando si vuole verificarla ed intenderla.

16. *Ogni quantità, che variando passa per* zero, *si cangia di positiva in negativa, o di negativa in positiva.* Questa verità deve esser già nota, essendo nella natura delle progressioni. Per esempio, in questa serie aritmetica decrescente $\div 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot -1 \cdot -2 \cdot -3$, si vede che la quantità 3, per via di diminuzioni successive, è passata per zero, ed è divenuta -3, come sarebbe avvenuto, se le diminuzioni fossero state fatte tutte ad un tratto, sottraendo 6 da 3. Manifesto è dunque il cangiamento del segno positivo in negativo; ma non lo è niente meno quello del segno negativo in positivo, bastando a mostrarlo la medesima progressione data in esempio, qualor si rovescj come segue; $\div -3 \cdot -2 \cdot -1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot$

Vedremo fra poco (36) che questa regola induce un' egual metamorfosi nelle quantità che passano per l' infinito; il che è più astratto a conoscersi *a priori*.

CAPITOLO II.

Valor relativo delle linee trigonometriche.

17. Allorchè BCD $= 45°$, il triangolo rettangolo CDG è isoscele, e DG $=$ CD. Dunque tang. $45° = R =$ cot. $45°$. Fig. 1.

Ma vedremo (34) che tang. $90°$ è infinita, nel mentre che l' arco di $90°$ non è altro che il doppio di quello di $45°$. Si cominci dunque ad osservare l' enorme sproporzione che passa fra la marcia degli angoli, e quella delle loro tangenti.

18. Per la definizione (4), è facile di comprendere, che il seno di un arco non è altro che la metà della corda dell' arco doppio. Si sa che la corda di $60°$ è uguale al raggio. Dunque sen. $30° = \frac{1}{2}$R.

Ma vedremo (34) che sen. $90° = R$ (donde il raggio si chiama pure *seno massimo, seno totale, seno tutto, seno intero, seno retto*). Si ponga dunque nella mente di buon' ora, che anche *i seni non crescono in proporzione con gli archi.*

19. Ogni corda divide il circolo in due segmenti, ciascuno de' quali è supplemento dell' altro a $360°$. Un arco MTY maggiore di $180°$ non può dunque avere altra corda che quella del suo supplemento YDM a $360°$. Dunque il seno ML della metà DM di questo secondo arco (18) è necessariamente lo stesso che il seno della metà MT del primo. Dunque un angolo ottuso TCM non può avere altro seno che quello dell' angolo acuto DCM, che è suo supplemento a $180°$. Vedremo ben presto che la stessa promiscuità ha luogo per le altre linee trigonometriche.

20. Supponendo sempre DCF $= 90°$, i triangoli simili BCA, GCD, FCH danno le proporzioni seguenti.

$$AC : AB :: CD : GD, \quad GD : CD :: CF : FH,$$
$$AC : BC :: CD : CG, \quad AB : BC :: CF : CH.$$

Sostituendo le denominazioni trigonometriche, relativamente

ad un arco qualunque BD, che noi chiameremo generalmente A, si avrà

21. Cos.A : sen.A :: R : tang.A $= \frac{R \times \text{sen.}A}{\text{cos.}A}$.

22. Tang.A : R :: R : cot.A $= \frac{RR}{\text{tang.}A} = \frac{R \times \text{cos.}A}{\text{sen.}A}$, (21).

23. Cos.A : R :: R : sec.A $= \frac{RR}{\text{cos.}A}$.

24. Sen.A : R :: R : cosec.A $= \frac{RR}{\text{sen.}A}$.

25. L' espression generale R del raggio basta per far vedere, che le equazioni trigonometriche sono vere, qualunque sia la grandezza del circolo, in cui si considerano. *Il valore del raggio è dunque arbitrario*, purchè stabilito una volta si conservi costante, altrimenti ogni linea trigonometrica varierà in proporzione de' raggi. Se in vece di BC si prenda per raggio CG, e si descriva l' arco GQ, il seno dell' angolo C non sarà più BA, ma GD. Ora BA : BC :: GD : CG. Lo stesso si troverà per ogni altra linea. Dunque *la ragione fra ogni linea trigonometrica e il raggio è costante*, avendosi sempre (9), $\frac{BA}{BC} = \frac{GD}{GC}$. Però in generale sia L una linea trigonometrica per un raggio R, e L′ la stessa linea per un raggio R′, sempre si avrà R : L :: R′ : L′ $= \frac{LR'}{R} = LR'$, se si fa $R = 1$; ch'è il valor che vien dato al raggio comunemente con ottimo consiglio, poichè simplifica mirabilmente i calcoli e le espressioni. Dato un valore al raggio, vedremo in progresso, come si trovi il valore d' ogni linea trigonometrica relativamente a quello del raggio.

26. Intanto si osservi nelle equazioni (22, 23, 24), che posto una volta il valore del raggio, quello della cotangente dipende da quello della tangente, quello della secante da quello del coseno, e quello della cosecante da quello del seno; e reciprocamente.

27. Quindi è facile ad intendere la ragione, per cui non si fa quasi mai uso nella Trigonometria della secante e della cosecante, essendo sempre agevole il sostituire in vece loro il coseno ed il seno per mezzo delle equazioni (23, 24). Potrebbe sopprimersi parimente

parimente l'uso delle cotangenti, ma in pratica si vedrà che questo riesce sovente comodo.

28. I triangoli rettangoli CAB, CDG, CFH, per la famosa proprietà dell'ipotenusa, somministrano le equazioni seguenti: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = CD^2 = CG^2 - DG^2 = CF^2 = CH^2 - FH^2$; ovvero $R^2 = \text{sen.}^2A + \cos.^2A = \sec.^2A - \text{tang.}^2A = \text{cosec.}^2A - \cot.^2A$. Fig. 1.

29. Dunque $\sec.A = \sqrt{(R^2 + \text{tang.}^2A)} = \frac{RR}{\cos.A}$, (23).

30. E $\text{cosec}.A = \sqrt{(R^2 + \cot.^2A)} = \frac{RR}{\text{sen}.A}$, (24).

31. Ora ponendo nell' analogia (21) il valore di cos.A tirato dall' ultima equazione (29), si avrà $\text{sen}.A = \frac{R \times \text{tang}.A}{\sqrt{(RR + \text{tang}.^2A)}}$; e ponendo nell' equazione (22), $\cot.A = \frac{R \times \cos.A}{\text{sen}.A}$, il valore di sen.A preso nell' ultima (30), si avrà $\cos.A = \frac{R \times \cot.A}{\sqrt{(RR + \cot.^2A)}}$.

32. Similmente ponendo nell' analogia (21) una volta il valore di sen.A, e un' altra quello di cos.A, tirati dall' equazione (28), $R^2 = \text{sen}.^2A + \cos.^2A$, si hanno le seguenti:

$$\text{tang}.A = \frac{R \times \text{sen}.A}{\sqrt{(RR - \text{sen}.^2A)}} = \frac{\sqrt{(RR - \cos.^2A)}}{R \times \cos.A}.$$

33. Se l' angolo C cresce, e diviene, per esempio, MCD, si vede che anche il seno ML, la tangente DK, e la secante CK sono maggiori di quel che fossero per l'angolo C. All' incontro il coseno CL, la cotangente FI, e la cosecante CI sono divenute minori.

34. Se l'angolo cresce fino ad essere di 90°, è chiaro per l'ispezione della figura, che il seno e la cosecante diventano eguali al raggio, col quale si confondono; il coseno e la cotangente si riducono a zero; la tangente e la secante sono infinite, poichè divenute parallele non possono più incontrarsi (7).

35. Se l'angolo seguita a crescere e diviene ottuso, come DCO, non possono più eseguirsi le definizioni (4, 7), ed è forza il ricorrere alle linee trigonometriche del supplemento TCO, facendole

promiscue, come si è veduto (19) essere di necessità per il seno (ed in conseguenza (26) per la cosecante). Da questa necessità nascono veramente i casi dubbj, ne' quali non è possibile il discernere, per la sola Trigonometria, se un dato seno (o cosecante) appartenga ad un angolo acuto, od al suo supplemento. Ma a tale inconveniente non vanno soggette le altre linee trigonometriche, poichè il segno negativo distingue quelle dell' angolo ottuso.

Fig. 1. 36. Di fatti adottando per coseno dell' angolo ottuso DCO il coseno CP del supplemento TCO, si osserverà che il coseno CA diminuendo sempre a misura che l' arco primitivo BD aumentò, è passato finalmente per zero (34) avanti di progredire nella direzione CP. Dunque (16) *il coseno di un angolo ottuso è negativo*, *e*, per la stessa ragione, *la cotangente*, che nel nostro caso è FN. Ma (23), cos. $= \frac{R^2}{\text{sec.}}$, e (22), cot. $= \frac{R^2}{\text{tang.}}$. Dunque allorchè il coseno e la cotangente sono negativi, la secante e la tangente convien che lo siano pure; giacchè il raggio è una quantità reale, il di cui quadrato non può mai essere negativo. Dunque *la tangente, e la secante dell' angolo ottuso sono negative*. Ma esse erano divenute infinite, quando l' angolo giunse a 90°, (34). Dunque *le quantità, che variando passano per l'infinito, si cangiano di positive in negative*, o viceversa (38), *egualmente come quelle che passano per zero* (16). Dunque *la cosecante, ed il seno dell' angolo ottuso*, non essendo passati nè per zero nè per l' infinito, *continuano ad essere positivi*. Per non risparmiar chiarezza aggiungerò, che l' angolo ottuso DCO ha CN per cosecante, CU per secante, e TU per tangente.

37. Considerando la figura, e le cose dette, si comprenderà facilmente, che se l' arco cresce fino ad essere di 180°, il seno e la tangente divengono nulli, la cotangente e la cosecante infinite, il coseno e la secante eguali al raggio.

38. Nell' Astronomia si contano le longitudini e le ascensioni rette degli astri da 0° fino a 360°. Si ha dunque bisogno delle linee

trigonometriche anche nel terzo e nell' ultimo quarto del circolo. Sorpassando per brevità la secante e la cosecante (27); se si procede col metodo, e con le regole (16, 36), si troverà che da 180° a 270° il seno e il coseno sono negativi, la tangente e la cotangente positive. Un arco maggiore di 180°, come DFTS, ha RS per seno, CR per coseno, TZ per tangente, VX per cotangente.

39. Al giunger dell' arco a 270°, il seno diviene eguale al raggio, la tangente infinita, il coseno e la cotangente si riducono a zero.

40. Dunque nell' ultimo quarto del circolo un arco qualunque, come DFTVY, avrà (16, 36) il coseno positivo, il seno, la tangente e la cotangente negativi.

41. Finalmente cresciuto l' arco fino a 360°, che è il punto stesso, dal quale cominciò a nascere, ed a contarsi, il seno e la tangente divengono nulli, il coseno eguale al raggio, e la cotangente infinita.

42. La tavola seguente servirà di ricapitolazione delle cose dette, e potrà consultarsi più comodamente nell' uso pratico. Ho omesso la cotangente, la secante e la cosecante, poichè i loro segni sono gli stessi respettivamente (26, 36) che quelli della tangente, del coseno e del seno. Indicai quando queste linee sono eguali a zero, all' infinito, od al raggio, ponendo in vece dell' ultimo l' unità (25). Si osserverà che la cotangente, la secante e la cosecante sono infinite, allorchè le corrispondenti in ragione inversa (22, 23, 24), cioè la tangente, il coseno ed il seno sono eguali a zero. Quando una linea perviene a zero, o all' infinito, le ho dato quel segno che aveva prima di giungervi. Per altro sarebbe inutile il discutere qual segno le convenga in quel punto, giacchè la concordia delle equazioni trigonometriche reggerebbe ugualmente, se si cangiassero i segni nell' atto di toccar l'infinito, od il zero, purchè si tenga costantemente una regola sola.

Tavola de' Segni delle linee trigonometriche ne' quattro quarti del Circolo.

ARCO.	SENO.	COSENO.	TANG.
A 0° od a 360°	−0	+1	−0
Dopo 0° fino a 90°	+	+	+
a 90°	+1	+0	+∞
Dopo 90° fino a 180°	+	−	−
a 180°	+0	−1	−0
Dopo 180° fino a 270°	−	−	+
a 270°	−1	−0	+∞
Dopo 270° fino a 360°	−	+	−

43. Ponendo $R = 1$, (25), si ha (18), $\text{sen.}30° = \frac{1}{2}$; ma (28), $\cos.^2 30° = R^2 - \text{sen.}^2 30° = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$: dunque $\cos.30° = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, (13).

44. Similmente avendosi (28), $R^2 = \text{sen.}^2 45° + \cos.^2 45° =$ (5) $2\ \text{sen.}^2 45° = 1$, risulta $\text{sen.}45° = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Siccome abbiamo trovato il valore del seno e del coseno, di 30° e di 45°, così fu calcolato dai Geometri, per via d' altre formole che vedremo a suo luogo, il valore del seno, tangente e secante d' ogni arco da 0° fino a 90°, di grado in grado, ed anche di minuto in minuto. Le tavole da essi formate contengono dunque la relazione *costante* (25), che passa fra il raggio del circolo, ed ogni linea trigonometrica.

CAPITOLO III.

Idea preliminare della risoluzione de' triangoli rettilinei.

46. Sogliono i principianti disgustarsi d' esser condotti nelle scienze per lunghe teorie elementari senza vederne l' utilità pratica. Serva questo breve capitolo per far loro intingere il labbro nelle applicazioni della Trigonometria.

Poichè AB è il seno, e AC il coseno dell' arco BD descritto dal raggio BC, saranno dunque vere le seguenti analogie: Fig. 1.

$$BC : AB :: R : \text{sen.}C, \quad BC : AC :: R : \text{cos.}C.$$

Ma in ogni triangolo rettangolo si può concepir che l' ipotenusa descriva un arco, come BD, il qual vada ad incontrare uno de' lati prolungato, qual è (CA+AD). Dunque *in ogni triangolo rettangolo l' ipotenusa sta al raggio, come un lato sta al seno dell' angolo opposto,* o vero*; come un lato sta al coseno dell' angolo adjacente.*

47. A prima vista sembra ai principianti, che non si possa cavare alcun frutto da queste proporzioni, quasi che contenessero un circolo vizioso, come se si dicesse $2 : 1 :: 2 : 1$, atteso che non sono altro che la ripetizione delle definizioni (4). Si rammentino che R : sen.C (lo stesso s' intenda di R : cos.C) è una ragione costante (25), qualunque sia la grandezza dell' ipotenusa che qui rappresenta il raggio; purchè l' angolo C non muti: onde anche GC : CD :: R : sen.C. L' arte della Trigonometria consiste dunque in questo, che il conoscere un angolo in un triangolo rettangolo basta per render palese la relazione che passa fra l' ipotenusa, e ciascuno de' lati. Donde ne viene che, se oltre l' angolo si conosca il valore assoluto di un lato, la Trigonometria manifesta con un tratto di penna, per così dire, il valore assoluto dell' ipotenusa; e viceversa: come si toccherà con mano negli esempj seguenti.

Fig. 1. 48. Si supponga che CL sia una distanza di tre miglia, la qual sia già nota, e che si desideri di sapere quanta sia la distanza CM, la quale non possa misurarsi con la pertica, o perchè un fiume vi passi per mezzo, o perchè altro impedimento si opponga. Senza partire dal punto C si otterrà l' intento, e con molto minor fatica, sol che si misuri di quanti gradi sia l' angolo MCL; la qual misura vedremo a suo luogo, come si prenda con facilità. Suppongo che siasi trovato MCL $= 60°$. Dunque cos.MCL $=$ cos.$60° =$ (5) sen.$30° = \frac{1}{2}$R,(18). E però sarà (46), MC : CL :: R : cos.MCL :: R : $\frac{1}{2}$R :: 1 : $\frac{1}{2}$, (9). Dunque MC è una distanza doppia di CL, cioè di sei miglia.

Nel modo stesso, supponendo MCL $= 60°$, se la distanza cognita fosse CD, di nove miglia, si troverà CK di miglia diciotto.

Similmente, sia l' angolo misurato C $= 36° 52'$, la distanza cognita AC di sei miglia, e si cerchi BC. Poichè si ha dalle tavole (45), R : cos.$36° 52'$ :: 1 : 0,8; sarà (46), BC : AC :: R : cos.C :: 1 : 0,8. E però BC $= \frac{AC}{0,8} = \frac{6}{0,8} = 7,5$. Dunque BC è una distanza di miglia sette e mezzo.

Se invece di AC, la distanza cognita fosse CD di nove miglia, si avrebbe CG : CD :: 1 : 0,8, o sia CG $= \frac{CD}{0,8} = \frac{9}{0,8} = 11,25$. Onde CG tirerebbe miglia 11 $\frac{1}{4}$.

Tanto basti per un' idea della risoluzione de' triangoli rettangoli.

Fig. 2 e 3. 49. Se il triangolo è obliquangolo, come ABC, diviene ora facile la sua risoluzione, convertendolo in due triangoli rettangoli BCD, ACD, col mezzo della perpendicolare CD, calata da uno qual si voglia degli angoli, come C, sopra il lato opposto, come AB, prolungato, se fa di bisogno, come nella fig. 3. Si ha quindi (46), R : sen.B :: BC : CD $= \frac{BC \times \text{sen.}B}{R}$, e R : sen.A :: AC : CD $= \frac{AC \times \text{sen.}A}{R}$. Dunque ponendo in equazione i due valori trovati di CD, si ha BC $\times$ sen.B $=$ AC $\times$ sen.A; e riducendo in proporzione,

BC : AC :: sen.A : sen.B.

Se si riflette che (fig. 3) sen.A = sen.CAD = sen.CAB, (19), e che le fig. 2 e 3, nelle quali non abbiamo fissato la grandezza degli angoli, nè dei lati, rappresentano ogni triangolo obliquangolo possibile (il che sia detto una volta per sempre), si ricaverà dall' ultima proporzione la seguente regola generale: *i lati di un triangolo rettilineo sono proporzionali ai seni degli angoli opposti.*

Questa regola è comune evidentemente ai triangoli rettangoli, poichè, per esempio, nella proporzione R : sen.A :: AC : CD, R non è altro che il seno (18) dell' angolo retto D opposto all' ipotenusa AC.

La stessa regola congiunta con l' altra (18) ci fa poi conoscere, che sebbene il lato maggiore sia sempre opposto all' angolo maggiore, e *viceversa*, pur non vi ha proporzione fra i lati, e gli angoli opposti.

50. Esempio della risoluzione del triangolo obliquangolo. Sia cognita la distanza AC di pertiche 1000, e col mezzo degl' istromenti convenevoli, di cui parleremo a suo tempo, siansi trovati, $B = 53° 8'$, e $A = 31° 20'$. Si ha nelle tavole sen.$53° 8' = 0{,}8$; e sen.$31° 20' = 0{,}52$. Dunque (49), $BC = \frac{AC \times \text{sen.}A}{\text{sen.}B} = \frac{1000 \times 0{,}52}{0{,}8} = \frac{520}{0{,}8} = 650$. Però, senza misurar colla pertica la distanza BC, la Trigonometria fa sapere coll' ultima precisione ch' essa è di 650 pertiche. Fig. 7.

Questa non è che una sola maniera di risolvere i triangoli obliquangoli, data per saggio. Vedremo le altre a suo tempo per tutti i casi e combinazioni.

CAPITOLO IV.

Valori relativi delle linee trigonometriche appartenenti alla somma, o alla differenza di due archi, e agli archi moltiplici.

51. I pochi principj, che abbiamo fin ora esposti, faremo che bastino per condurci a tutti i teoremi della Trigonometria, e spingerci avanti in questa scienza, sia coll' uso degli stessi metodi e regole, sia per mezzo di pure sostituzioni. Tale facilità mi procurerà l' indulgenza di que' lettori, i quali notassero qualche prolissità ne' capitoli precedenti, dove importava non risparmiar chiarezza.

Problema. *Conoscendo i seni e i coseni di due archi, trovare i seni e i coseni della somma e della differenza di essi archi.*

Fig. 2. Rifletto, che in ogni triangolo rettilineo la somma di due angoli è sempre supplemento del terzo, o sia che in un triangolo ABC, per esempio, $A + B = 180° - ACB$, sicchè (19), $\text{sen.}ACB = \text{sen.}(A + B)$. Ciò posto, la Trigonometria trae da se stessa la soluzione, senza bisogno d'aver ricorso ai triangoli simili, ed a figure complicate.

Di fatti (49), $AC : \text{sen.}B :: AB : \text{sen.}ACB = \frac{AB \times \text{sen.}B}{AC} = \text{sen.}(A+B)$. Ma, supponendo CD perpendicolare sul lato AB, si ha (46), $BC : CD :: R : \text{sen.}B = \frac{R \times CD}{BC}$. Sostituendo questo valore di sen.B nell' equazione precedente (faremo queste sostituzioni d' ora in avanti senza dirlo, giacchè saltano agli occhi), si avrà $\text{sen.}(A + B) = \frac{R \times CD \times AB}{AC \times BC}$. Ora $AB = BD + AD$. Dunque

sen.

$\text{sen.}(A+B) = \frac{R \times CD \times BD}{AC \times BC} + \frac{R \times CD \times AD}{AC \times BC}$. Ma (46), $\frac{CD}{AC} = \frac{\text{sen.}A}{R}$, $\frac{BD}{BC} = \frac{\text{cos.}B}{R}$, $\frac{CD}{BC} = \frac{\text{sen.}B}{R}$, e $\frac{AD}{AC} = \frac{\text{cos.}A}{R}$. Dunque

$$\text{sen.}(A+B) = \frac{\text{sen.}A\ \text{cos.}B + \text{sen.}B\ \text{cos.}A}{R}.$$

52. Applicando la soluzione medesima alla fig. 3, si osserverà che $AB = BD - AD$; che $ACB = 180° - CAB - B = CAD - B$; e che CAD è l'angolo A identifico delle equazioni $\frac{CD}{AC} = \frac{\text{sen.}A}{R}$, e $\frac{AD}{AC} = \frac{\text{cos.}A}{R}$. Con queste avvertenze e cangiamenti, la dimostrazione precedente darà

$$\text{sen.}(A-B) = \frac{\text{sen.}A\ \text{cos.}B - \text{sen.}B\ \text{cos.}A}{R}.$$

53. (28), $\text{cos.}^2(A+B) = R^2 - \text{sen.}^2(A+B) = (51)$ $\frac{R^4 - \text{sen.}^2A\ \text{cos.}^2B - 2\,\text{sen.}A\ \text{cos.}A\ \text{sen.}B\ \text{cos.}B - \text{sen.}^2B\ \text{cos.}^2A}{R^2}$. Ma $\text{cos.}^2B = R^2 - \text{sen.}^2B$, e $\text{sen.}^2B = R^2 - \text{cos.}^2B$. Sostituendo questi valori, e notando che $R^4 - R^2(\text{sen.}^2A + \text{cos.}^2A) = (28)\,R^4 - R^4 = 0$, si ha $\text{cos.}^2(A+B) = \frac{\text{cos.}^2A\ \text{cos.}^2B - 2\,\text{sen.}A\ \text{cos.}A\ \text{sen.}B\ \text{cos.}B + \text{sen.}^2A\ \text{sen.}^2B}{R^2}$; ed estraendo le radici,

$$\text{cos.}(A+B) = \frac{\text{cos.}A\ \text{cos.}B - \text{sen.}A\ \text{sen.}B}{R}.$$

54. Operando nel modo stesso sulla formola (52), si troverà

$$\text{cos.}(A-B) = \frac{\text{cos.}A\ \text{cos.}B + \text{sen.}A\ \text{sen.}B}{R}.$$

La soluzion del problema ha prodotto quattro equazioni, delle quali si fa uso continuo nella Trigonometria. Sarebbe fuor di proposito il citarle perpetuamente, e però conviene impararle a memoria, il che è facilissimo, poichè in sostanza si riducono a due, e il solo cangiamento del segno ne forma quattro.

È facile il vedere, che le stesse equazioni servono a sviluppare i valori de' seni e coseni della somma e della differenza di qualsivoglia numero di archi. Per esempio, $\text{sen.}(A+B+C) = \text{sen.}(A+\overline{B+C}) = \text{sen.}A\ \text{cos.}(B+C) + \text{cos.}A\ \text{sen.}(B+C) = \text{sen.}A\ \text{cos.}B\ \text{cos.}C - \text{sen.}A\ \text{sen.}B\ \text{sen.}C + \text{cos.}A\ \text{sen.}B\ \text{cos.}C + \text{cos.}A\ \text{cos.}B\ \text{sen.}C$. Così $\text{sen.}(A-B+C) = \text{sen.}(A-\overline{B-C})$

$= \text{sen.A}\cos.(B - C) - \cos.A\,\text{sen.}(B - C) = \text{sen.A}\cos.B \times \cos.C + \text{sen.A}\,\text{sen.B}\,\text{sen.C} - \cos.A\,\text{sen.B}\cos.C + \cos.A \times \cos.B\,\text{sen.C}$.

55. D'ora innanzi abbrevieremo, ponendo sempre 1 in vece di R, (25). Ne'casi ove il raggio sia diverso da quello delle tavole, come succede, per esempio, nella risoluzione delle equazioni del terzo grado, ecco la regola per introdurlo convenevolmente in qualsivoglia formola trigonometrica.

In ciascuna delle proporzioni ed equazioni, che abbiamo veduto fin quì, e che sono le fondamentali, da cui traggono origine le più composte, si può riscontrare che ogni termine contiene un numero eguale di fattori. Prendendo per esempio una delle equazioni meno semplici, cioè (53), $R^2 \times \cos.^2(A + B) = \cos.^2A \cos.^2B - 2\,\text{sen.A}\cos.A\,\text{sen.B}\cos.B + \text{sen.}^2A\,\text{sen.}^2B$, si osservi che ogni termine è di quattro *dimensioni*, cioè formato dal prodotto di quattro fattori, giacchè, per esempio, il primo membro è $R \times R \times \cos.(A + B) \times \cos.(A + B)$, e così degli altri termini. Questo egual numero di fattori, algebraici, o geometrici (i coefficienti numerici non entrano in questo conto) fa che i termini di una equazione si chiamino *omogenei*, o sia *di ugual dimensione*. Se si conservasse la lettera R in tutte le operazioni trigonometriche, si troverebbe ogni formola con tutti i termini di ugual dimensione. Sarà dunque facile renderli tali al bisogno, accoppiando a ciascuno il fattore R elevato alla potenza occorrente per farli omogenei. Nominando x, y due linee trigonometriche, sia, per esempio, una equazione di questa forma, $4x^3 = 3x - y + 2$, dove x^3 è di tre dimensioni, x e y di una sola, 2 di nessuna; il raggio sarà convenevolmente introdotto, scrivendo come segue, $4x^3 = 3R^2x - R^2y + 2R^3$. Tale sarebbe stata l'equazione di sua natura, se R non fosse sparito, per essersi fatto eguale all'unità.

56. Noi prendiamo a comporre gran numero di formole, ma la loro utilità non si può conoscer che a mano a mano nel decorso della Trigonometria.

Tang. $(A+B)=(21)\ \frac{\text{sen.}(A+B)}{\text{cos.}(A+B)}=\frac{\text{sen.}A\ \text{cos.}B+\text{sen.}B\ \text{cos.}A}{\text{cos.}A\ \text{cos.}B-\text{sen.}A\ \text{sen.}B}$. Dividendo ogni termine di quest' ultima frazione (9), una volta per cos.A $\times$ cos.B, e un' altra per sen.A sen.B, si avrà

$$\text{tang.}(A+B)=\frac{\text{tang.}A+\text{tang.}B}{1-\text{tang.}A\ \text{tang.}B}=\frac{\text{cot.}B+\text{cot.}A}{\text{cot.}B\ \text{cot.}A-1}.$$

57. Procedendo nel modo stesso sui valori (52, 54) di $\frac{\text{sen.}(A-B)}{\text{cos.}(A-B)}$ si troverà

$$\text{tang.}(A-B)=\frac{\text{tang.}A-\text{tang.}B}{1+\text{tang.}A\ \text{tang.}B}=\frac{\text{cot.}B-\text{cot.}A}{\text{cot.}B\ \text{cot.}A+1}.$$

58. Similmente operando, si avrà

$$\frac{\text{sen.}(A+B)}{\text{sen.}(A-B)}=\frac{\text{tang.}A+\text{tang.}B}{\text{tang.}A-\text{tang.}B}=\frac{\text{cot.}B+\text{cot.}A}{\text{cot.}B-\text{cot.}A}.$$

59. Or dividendo, una volta per sen.B cos.A, e un' altra per sen.A cos.B, i valori (53, 54) di $\frac{\text{cos.}(A+B)}{\text{cos.}(A-B)}$, si avrà

$$\frac{\text{cos.}(A+B)}{\text{cos.}(A-B)}=\frac{\text{cot.}B-\text{tang.}A}{\text{cot.}B+\text{tang.}A}=\frac{\text{cot.}A-\text{tang.}B}{\text{cot.}A+\text{tang.}B}.$$

60. A e B sono espressioni indeterminate denotanti due archi di qualsivoglia grandezza. Si può dunque dar loro ogni valore, che ad archi circolari convenga.

Si faccia primieramente $B=A$. Se si pone nelle tre formole (51, 53, 56), A in cambio di B, si avranno le tre formole seguenti:

$$\text{sen.}2A=2\ \text{sen.}A\ \text{cos.}A.$$

61. $\text{Cos.}2A=\text{cos.}^2A-\text{sen.}^2A.$

62. $\text{Tang.}2A=\frac{2\ \text{tang.}A}{1-\text{tang.}^2A}=\frac{2\ \text{cot.}A}{\text{cot.}^2A-1}.$

63. In queste tre equazioni il primo membro contiene un arco doppio di quello che trovasi nel secondo. Dunque potranno anche esprimersi come segue.

$$\text{sen.}A=2\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}A\ \text{cos.}\tfrac{1}{2}A.$$

64. $\text{Cos.}A=\text{cos.}^2\tfrac{1}{2}A-\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}A.$

65. $\text{Tang.}A=\frac{2\ \text{tang.}\frac{1}{2}A}{1-\text{tang.}^2\frac{1}{2}A}=\frac{2\ \text{cot.}\frac{1}{2}A}{\text{cot.}^2\frac{1}{2}A-1}.$

66. Sostituendo alternativamente nell' equazione (64) i valori (28) di $\cos.^2 \frac{1}{2} A$ e di $\text{sen.}^2 \frac{1}{2} A$, si ha pure

$$\cos.A = 1 - 2\,\text{sen.}^2 \tfrac{1}{2} A = 2 \cos.^2 \tfrac{1}{2} A - 1.$$

67. Quindi si vede che $2\,\text{sen.}^2 \frac{1}{2} A = 1 - \cos.A = \text{sen.v.}\,A$, (4). Le due prime espressioni sono quelle che s' impiegano in luogo del *seno verso*, di cui non si fa uso nella Trigonometria.

68. Si divida per $\text{tang.} \frac{1}{2} A$ il secondo membro della prima equazione (65), e si tenga sempre a memoria che $\frac{1}{\text{tang.}} = \text{cot.}$ (22), si avrà

$$\text{tang.}A = \frac{2}{\text{cot.} \frac{1}{2} A - \text{tang.} \frac{1}{2} A}.$$

69. Se ne cava $\text{cot.} \frac{1}{2} A - \text{tang.} \frac{1}{2} A = \frac{2}{\text{tang.}A} = 2 \,\text{cot.}A$. Dunque

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} A = \text{cot.} \tfrac{1}{2} A - 2 \,\text{cot.}A.$$

70. $1 - \cos.A =$ (67) $2\,\text{sen.} \frac{1}{2} A \,\text{sen.} \frac{1}{2} A =$ (63) $\text{sen.} \frac{1}{2} A \times \frac{\text{sen.}A}{\cos. \frac{1}{2} A} = \text{sen.}A \,\text{tang.} \frac{1}{2} A$, (21). Dunque

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} A = \frac{1 - \cos.A}{\text{sen.}A}.$$

71. $1 + \cos.A =$ (66) $2 \cos. \frac{1}{2} A \cos. \frac{1}{2} A = \cos. \frac{1}{2} A \times \frac{\text{sen.}A}{\text{sen.} \frac{1}{2} A} = \frac{\text{sen.}A}{\text{tang.} \frac{1}{2} A}$. Dunque si ha pure

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} A = \frac{\text{sen.}A}{1 + \cos.A}.$$

72. Moltiplicando insieme le due precedenti formole,

$$\text{tang.}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{1 - \cos.A}{1 + \cos.A}.$$

73. $\text{Sen.}A =$ (63) $2\,\text{sen.} \frac{1}{2} A \cos. \frac{1}{2} A =$ (21) $2 \cos.^2 \frac{1}{2} A \,\text{tang.} \frac{1}{2} A$. Dunque (29)

$$\text{sen.}A = \frac{2\,\text{tang.} \frac{1}{2} A}{1 + \text{tang.}^2 \frac{1}{2} A}.$$

74. Questa equazione divisa per la prima (65) dà (21)

$$\cos.A = \frac{1 - \text{tang.}^2 \frac{1}{2} A}{1 + \text{tang.}^2 \frac{1}{2} A}.$$

75. Moltiplicando questa frazione per $\text{cot.} \frac{1}{2} A$, e tenendo sempre a mente che $\text{cot.} \times \text{tang.} = 1$, (22), sarà

$$\cos.A = \frac{\text{cot.} \frac{1}{2} A - \text{tang.} \frac{1}{2} A}{\text{cot.} \frac{1}{2} A + \text{tang.} \frac{1}{2} A}.$$

76. Moltiplicando questa equazione con l'altra (68), ne risulta

$$\text{sen.}A = \frac{2}{\text{cot.}\frac{1}{2}A + \text{tang.}\frac{1}{2}A}.$$

77. Sostituendo in questa il valore (69) di tang. $\frac{1}{2}$ A, e dividendo la frazione per 2, si avrà

$$\text{sen.}A = \frac{1}{\text{cot.}\frac{1}{2}A - \text{cot.}A}.$$

78. Quì sostituendo il valore di cot. $\frac{1}{2}$ A preso nella equazione (69), sarà

$$\text{sen.}A = \frac{1}{\text{cot.}A + \text{tang.}\frac{1}{2}A}.$$

79. Tang. $\frac{1}{2}A = (70)\ \frac{1-\text{cos.}A}{\text{sen.}A} = \frac{1-\text{cos.}A}{\text{tang.}A\ \text{cos.}A}$. Però tang. $\frac{1}{2}$ A $\times$ tang. A $= \frac{1-\text{cos.}A}{\text{cos.}A} = \frac{1}{\text{cos.}A} - 1$. Dunque $\frac{1}{\text{cos.}A} = 1 + \text{tang.}\frac{1}{2}A \times$ tang. A, e per conseguenza

$$\text{cos.}A = \frac{1}{1+\text{tang.}\frac{1}{2}A\ \text{tang.}A}.$$

80. Sen. $(A+B) \times \text{cos.}(A-B) = (51, 54)$ sen. A cos. A $\times$ $(\text{sen.}^2 B + \text{cos.}^2 B) + \text{sen.}B\ \text{cos.}B\ (\text{sen.}^2 A + \text{cos.}^2 A) = (28)$ sen. A cos. A + sen. B cos. B $= (60)\ \frac{1}{2}(\text{sen.}2A + \text{sen.}2B)$. Dunque (63)

$$\text{sen.}A + \text{sen.}B = 2\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}(A+B)\ \text{cos.}\tfrac{1}{2}(A-B).$$

81. Similmente procedendo sulle equazioni (52, 53), si troverà

$$\text{sen.}A - \text{sen.}B = 2\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}(A-B)\ \text{cos.}\tfrac{1}{2}(A+B).$$

82. Cos. $(A+B)\ \text{cos.}(A-B) = (53, 54)\ \text{cos.}^2A\ \text{cos.}^2B - \text{sen.}^2A\ \text{sen.}^2B = (28)\ \text{cos.}^2A - \text{sen.}^2B\,(\text{sen.}^2A + \text{cos.}^2A)$. Dunque $\text{cos.}^2A - \text{sen.}^2B = \text{cos.}(A+B)\ \text{cos.}(A-B) = \text{cos.}^2B - \text{sen.}^2A$.

83. $\text{Cos.}^2A = (66)\ \frac{1}{2}(1 + \text{cos.}2A)$, e $\text{sen.}^2B = \frac{1}{2}(1 - \text{cos.}2B)$. Con queste sostituzioni la formola precedente diviene $\frac{1}{2}\text{cos.}2B + \frac{1}{2}\text{cos.}2A = \text{cos.}(A+B)\ \text{cos.}(A-B)$. Laonde (63)

$$\text{cos.}B + \text{cos.}A = 2\ \text{cos.}\tfrac{1}{2}(A+B)\ \text{cos.}\tfrac{1}{2}(A-B).$$

84. Operando sulle equazioni (51, 52), come si è fatto per le due formole precedenti, si troverà

$\text{sen.}^2A - \text{sen.}^2B = \text{sen.}(A+B)\,\text{sen.}(A-B) = \cos.^2B - \cos.^2A$; (28); e

85. $\text{Cos.}B - \cos.A = 2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(A+B)\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(A-B)$.

86. Rammentando ancora una volta che $\frac{\text{sen.}}{\cos.} = \text{tang.}$, e $\frac{\cos.}{\text{sen.}} =$ cot. (21, 22), si avrà (80, 81)

$$\frac{\text{sen.}A + \text{sen.}B}{\text{sen.}A - \text{sen.}B} = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A+B)\ \cot.\ \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A+B)}{\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A-B)}.$$

87. Similmente (83, 85)

$$\frac{\cos.B + \cos.A}{\cos.B - \cos.A} = \cot.\ \tfrac{1}{2}(A+B)\ \cot.\ \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\cot.\ \tfrac{1}{2}(A+B)}{\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A-B)}.$$

88. Nel modo stesso si trovano le seguenti formole, delle quali non mi è caduto sin' ora sott' occhio il caso di farne uso; ma non so tralasciarle a cagione della loro semplicità, giacchè la sostituzione dell' espressione di mezzo sarebbe molto utile, se in qualche caso si avessero mai l'espressioni estreme.

$$\frac{\text{sen.}A + \text{sen.}B}{\cos.A + \cos.B} = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos.B - \cos.A}{\text{sen.}A - \text{sen.}B}.$$

$$\frac{\text{sen.}A + \text{sen.}B}{\cos.B - \cos.A} = \cot.\ \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\cos.A + \cos.B}{\text{sen.}A - \text{sen.}B}.$$

89. $\text{Tang.}A + \text{tang.}B = \frac{\text{sen.}A}{\cos.A} + \frac{\text{sen.}B}{\cos.B} = \frac{\text{sen.}A\cos.B + \text{sen.}B\cos.A}{\cos.A\cos.B}$.

Dunque

$$\text{tang.}A + \text{tang.}B = \frac{\text{sen.}(A+B)}{\cos.A\cos.B}.$$

Si opererà nel modo stesso per aver le tre formole seguenti.

90. $\text{Cot.}B + \cot.A = \frac{\text{sen.}(A+B)}{\text{sen.}A\ \text{sen.}B}$.

91. $\text{Tang.}A - \text{tang.}B = \frac{\text{sen.}(A-B)}{\cos.A\cos.B}$.

92. $\text{Cot.}B - \cot.A = \frac{\text{sen.}(A-B)}{\text{sen.}A\ \text{sen.}B}$.

93. Moltiplicando insieme le due formole (89, 91), si ha

$$\text{tang.}^2A - \text{tang.}^2B = \frac{\text{sen.}(A+B)\ \text{sen.}(A-B)}{\cos.^2A\ \cos.^2B}.$$

94. La moltiplicazione delle due altre (90, 92) dà pure

$$\cot.^2B - \cot.^2A = \frac{\text{sen.}(A+B)\ \text{sen.}(A-B)}{\text{sen.}^2A\ \text{sen.}^2B}.$$

95. Facendo le addizioni, e le sottrazioni convenevoli con le formole (51, 52, 53, 54), si avranno le quattro equazioni seguenti:

$$\text{sen.}(A+B)+\text{sen.}(A-B)=2\,\text{sen.}A\,\cos.B.$$

96. $\text{Sen.}(A+B)-\text{sen.}(A-B)=2\,\text{sen.}B\,\cos.A.$

97. $\text{Cos.}(A+B)+\cos.(A-B)=2\cos.A\cos.B.$

98. $\text{Cos.}(A-B)-\cos.(A+B)=2\,\text{sen.}A\,\text{sen.}B.$

Si sarà osservato, che le vicende del calcolo hanno sempre destinato il coseno dell' arco maggiore, che abbiamo fin quì supposto essere A, ad esser sottratto da quello dell' arco minore. Lo stesso avvenne alle cotangenti. Questo è una conseguenza della loro natura (33).

99. Facciasi ora $A=45°$. Ponendo questo valore in vece di A nelle formole (51, 53, 56, 57), si avranno le quattro seguenti.

$$\text{sen.}(45°+B)=\frac{\cos.B+\text{sen.}B}{\sqrt{2}}\ (44)=\cos.(45°-B),\ (5).$$

100. $\text{Cos.}(45°+B)=\frac{\cos.B-\text{sen.}B}{\sqrt{2}}=\text{sen.}(45°-B).$

101. $\text{Tang.}(45°+B)=(17)\ \frac{1+\text{tang.}B}{1-\text{tang.}B}.$

102. $\text{Tang.}(45°-B)=\frac{1-\text{tang.}B}{1+\text{tang}\,B}.$

Le due ultime equazioni si possono esprimere in una, come segue (11),

$$\text{tang.}(45°\pm B)=\frac{1\pm\text{tang.}B}{1\mp\text{tang.}B}.$$

103. $\text{Tang.}(45°+B)-\text{tang.}(45°-B)=\frac{1+\text{tang.}B}{1-\text{tang.}B}-\frac{1-\text{tang.}B}{1+\text{tang.}B}=\frac{4\,\text{tang.}B}{1-\text{tang.}^2B}$, riducendo al medesimo denominatore. Dunque (62)

$$\text{tang.}2B=\frac{\text{tang.}(45°+B)-\text{tang.}(45°-B)}{2}.$$

104. Innalzando al quadrato la prima equazione (99), si troverà $2\,\text{sen.}^2(45°+B)=\cos.^2B+\text{sen.}^2B+2\,\text{sen.}B.\cos.B=(28,60)$, $1+\text{sen.}2B$. Dunque (63)

$$1+\text{sen.}B=2\,\text{sen.}^2\left(45°+\tfrac{1}{2}B\right)=2\cos.^2\left(45°-\tfrac{1}{2}B\right).$$

105. Similmente operando sull' equazione (100), si avrà

$$1-\text{sen.}B=2\cos.^2\left(45°+\tfrac{1}{2}B\right)=2\,\text{sen.}^2\left(45°-\tfrac{1}{2}B\right).$$

Queste sono l' espressioni che si usano in vece del *coseno verso* (5).

106. Però $\frac{1+\text{sen.}B}{1-\text{sen.}B}=\text{tang.}^2(45^\circ+\frac{1}{2}B)$, e parimente $\frac{1-\text{sen.}B}{1+\text{sen.}B}=$ $\text{tang.}^2(45^\circ-\frac{1}{2}B)$.

107. Trattando sen. B come ignoto, e risolvendo separatamente queste due ultime equazioni, si troverà

$$\text{sen.}B=\frac{\text{tang.}^2(45^\circ+\frac{1}{2}B)-1}{\text{tang.}^2(45^\circ+\frac{1}{2}B)+1}=\frac{1-\text{tang.}^2(45^\circ-\frac{1}{2}B)}{1+\text{tang.}^2(45^\circ-\frac{1}{2}B)}.$$

108. Si moltiplichi la penultima frazione per cot. $(45^\circ+\frac{1}{2}B)$; si avrà

$$\text{sen.}B=\frac{\text{tang.}(45^\circ+\frac{1}{2}B)-\text{cot.}(45^\circ+\frac{1}{2}B)}{\text{tang.}(45^\circ+\frac{1}{2}B)+\text{cot.}(45^\circ+\frac{1}{2}B)}=\frac{\text{tang.}(45^\circ+\frac{1}{2}B)-\text{tang.}(45^\circ-\frac{1}{2}B)}{\text{tang.}(45^\circ+\frac{1}{2}B)+\text{tang.}(45^\circ-\frac{1}{2}B)}.$$

109. Dividendo l'equazione formata dalla prima, e dall' ultima di queste tre quantità eguali per l'altra equazione (103) espressa come segue, $\text{tang.}B=\frac{\text{tang.}(45^\circ+\frac{1}{2}B)-\text{tang.}(45^\circ-\frac{1}{2}B)}{2}$, si avrà (21),

$$\text{cos.}B=\frac{2}{\text{tang.}(45^\circ+\frac{1}{2}B)+\text{tang.}(45^\circ-\frac{1}{2}B)}=\frac{2}{\text{cot.}(45^\circ-\frac{1}{2}B)+\text{cot.}(45^\circ+\frac{1}{2}B)}.$$

110. Pongasi ora $A=60^\circ$, e si rammenti che $\text{cos.}60^\circ=\frac{1}{2}$, (48). Le formole (96, 97) daranno le due seguenti;

$$\text{sen.}(60^\circ+B)-\text{sen.}(60^\circ-B)=\text{sen.}B.$$

111. $\text{Cos.}(60^\circ+B)+\text{cos.}(60^\circ-B)=\text{cos.}B.$

112. Facciasi $A=60^\circ+B=90^\circ-(30^\circ-B)$; sarà $\text{cot.}(60^\circ+B)=(7)\ \text{tang.}(30^\circ-B)=\text{cot.}A$. Ma (69), $\text{cot.}A=\frac{1}{2}(\text{cot.}\frac{1}{2}A-\text{tang.}\frac{1}{2}A)$: dunque

$$\text{tang.}(30^\circ-B)=\frac{\text{cot.}(30^\circ+\frac{1}{2}B)-\text{tang.}(30^\circ+\frac{1}{2}B)}{2}.$$

113. Facendo $A=(60^\circ-B)$, si trova nel modo stesso

$$\text{tang.}(30^\circ+B)=\frac{\text{cot.}(30^\circ-\frac{1}{2}B)-\text{tang.}(30^\circ-\frac{1}{2}B)}{2}.$$

114. Siano ora, $A=45^\circ+C$, e $B=45^\circ-C$; onde $A+B=90^\circ$, e $A-B=2\,C$. La formola (97) darà $\text{cos.}(45^\circ+C)\times\text{cos.}(45^\circ-C)=\frac{1}{2}\text{cos.}2\,C+\frac{1}{2}\text{cos.}90^\circ=(34)\ \frac{1}{2}\text{cos.}2\,C=(66)\ \frac{1}{2}(2\,\text{cos.}^2C-1)$. Laonde

$$\text{cos.}^2C-\frac{1}{2}=\text{cos.}(45^\circ+C)\,\text{cos.}(45^\circ-C).$$

115. Siano ancora, $A=60^\circ+C$, e $B=60^\circ-C$; onde $A+B=120^\circ$, e $A-B=2\,C$. L'equazione stessa (97) darà $\text{cos.}(60^\circ+C)\ \text{cos.}(60^\circ-C)=\frac{1}{2}\text{cos.}2\,C+\frac{1}{2}\text{cos.}120^\circ=$

Cos.²

$\cos.^2 C - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos.120°$. Ma $\cos.120° = \cos.60° = -\frac{1}{2}$, (36). Dunque

$$\cos.^2 C - \tfrac{3}{4} = \cos.(60° + C).\cos.(60° - C).$$

116. Facendo la stessa operazione sull' equazione (98) si troverà

$$\cos.^2 C - \tfrac{1}{4} = \text{sen.}(60° + C)\ \text{sen.}(60° - C).$$

Nel far uso più avanti di queste tre ultime formole metteremo A in vece di C, giacchè l' una e l' altra sono espressioni indeterminate, suscettibili d' ogni valore possibile.

117. Al presente sia $B = 2A$, sarà (51), $\text{sen.}3A = \text{sen.}A \times \cos.2A + \text{sen.}2A\ \cos.A$. Ma $\text{sen.}A = \frac{\text{sen.}2A}{2\cos.A}$, (60), e $\cos.2A = 2\cos.^2 A - 1$, (66). Dunque $\text{sen.}A\cos.2A = \frac{\text{sen.}2A}{2\cos.A}(2\cos.^2 A - 1) = \text{sen.}2A\ \cos.A - \frac{\text{sen.}2A}{2\cos.A} = \text{sen.}2A\ \cos.A - \text{sen.}A$. Sostituendo nella prima equazione quest' ultimo valore di $\text{sen.}A\ \cos.2A$, si avrà

$$\text{sen.}3A = 2\cos.A\ \text{sen.}2A - \text{sen.}A.$$

118. Similmente (53), $\cos.3A = \cos.A\cos.2A - \text{sen.}A\,\text{sen.}2A$. Ma $\text{sen.}A\,\text{sen.}2A = (60)\ 2\,\text{sen}^2 A\ \cos.A = (66)\ \cos.A\,(1 - \cos.2A) = \cos.A - \cos.A\ \cos.2A$. Dunque

$$\cos.3A = 2\cos.A\ \cos.2A - \cos.A.$$

119. Parimente (56), $\text{tang.}3A = \frac{\text{tang.}A + \text{tang.}2A}{1 - \text{tang.}A\ \text{tang.}2A}$. Sostituendo il primo valore (62) di $\text{tang.}2A$, e riducendo al medesimo denominatore, si avrà

$$\text{tang.}3A = \frac{3\,\text{tang.}A - \text{tang.}^3 A}{1 - 3\,\text{tang.}^2 A}.$$

120. Ponendo $B = 3A$, lascio a' principianti un' occasione di esercitarsi alquanto, dietro gli esempj (117, 118), per rinvenire le seguenti equazioni.

$$\text{sen.}4A = 2\cos.A\ \text{sen.}3A - \text{sen.}2A.$$
$$\cos.4A = 2\cos.A\ \cos.3A - \cos.2A.$$

121. (117), $\text{sen.}3A = 2\cos.A\ \text{sen.}2A - \text{sen.}A = (60)$

$4\,\text{sen.A}\,\cos.^2\text{A} - \text{sen.A} = 4\,\text{sen.A}\,(\cos.^2\text{A} - \frac{1}{4})$. Dunque (116)

$$\text{sen.}3\text{A} = 4\,\text{sen.A}\,\text{sen.}(60° + \text{A})\,\text{sen.}(60° - \text{A}).$$

122. (66), $\cos.2\text{A} = 2\cos.^2\text{A} - 1 = 2(\cos.^2\text{A} - \frac{1}{2})$. Però (114)

$$\cos.2\text{A} = 2\cos.(45° + \text{A})\cos.(45° - \text{A}).$$

123. (118), $\cos.3\text{A} = 2\cos.\text{A}\,\cos.2\text{A} - \cos.\text{A} =$ (66) $4\cos.\text{A}\,\cos.^2\text{A} - 3\cos.\text{A} = 4\cos.\text{A}\,(\cos.^2\text{A} - \frac{3}{4})$. Dunque (115)

$$\cos.3\text{A} = 4\cos.\text{A}\,\cos.(60° + \text{A})\,\cos.(60° - \text{A}).$$

Chi volesse espressioni di questa forma per sen.4 A, cos.4 A, &c., le troverà nell' *Introduzione all' Analisi degl' Infiniti di Eulero*. Io m' arresto a quelle che sono più utili nella pratica.

124. Ho raccolto per ordine nelle due tavole seguenti le *formole de' seni e coseni degli archi moltiplici*, (60, 66, 117, 118, 120).

$\text{Sen.}\ 0 = 0.$
$\text{Sen.}\ \text{A} = \text{sen.A}.$
$\text{Sen.}2\text{A} = 2\cos.\text{A}\ \text{sen.A}.$
$\text{Sen.}3\text{A} = 2\cos.\text{A}\ \text{sen.}2\text{A} - \text{sen.A}.$
$\text{Sen.}4\text{A} = 2\cos.\text{A}\ \text{sen.}3\text{A} - \text{sen.}2\text{A}.$
&c.

$\text{Cos.}\ 0 = 1.$
$\text{Cos.}\ \text{A} = \cos.\text{A}.$
$\text{Cos.}2\text{A} = 2\cos.\text{A}\ \cos.\ \text{A} - 1.$
$\text{Cos.}3\text{A} = 2\cos.\text{A}\ \cos.2\text{A} - \cos.\text{A}.$
$\text{Cos.}4\text{A} = 2\cos.\text{A}\ \cos.3\text{A} - \cos.2\text{A}.$
&c.

Queste due serie possono continuarsi a piacimento senz' altra fatica di calcolo, poichè è manifesta la legge, con cui progrediscono. Mentre gli archi crescono in progressione aritmetica, i loro seni e coseni formano una serie, che chiamasi *ricorrente*, a cagion che ogni termine viene determinato da alcuni dei precedenti per via di una legge costante. *La scala di relazione*, così detta da *Moivre*,

è $2\cos.A, -1$. Per esempio, per avere il valore di sen. $3A$, bisogna moltiplicare il termine precedente, sen. $2A$ per $2\cos.A$, e convien moltiplicare per -1 l'altro termine che sta avanti sen. $2A$, cioè sen. A.

125. Osservando la stessa legge, ma facendo le moltiplicazioni col secondo membro delle equazioni, in vece di farle col primo, e notando che $2\cos.A = 2\sqrt{(1 - \text{sen.}^2A)}$, (28), le medesime serie possono senza studio variarsi ne' modi seguenti con grandissima prestezza e facilità.

Seni degli Archi moltiplici, espressi in potenze del seno dell' arco semplice.

$$\text{Sen. } 0 = 0.$$
$$\text{Sen. } A = \text{sen.}A.$$
$$\text{Sen.}2A = 2\,\text{sen.}A\sqrt{(1 - \text{sen.}^2A.)}$$
$$\text{Sen.}3A = 3\,\text{sen.}A - 4\,\text{sen.}^3A.$$
$$\text{Sen.}4A = (4\,\text{sen.}A - 8\,\text{sen.}^3A)\sqrt{(1 - \text{sen.}^2A)}.$$
$$\text{Sen.}5A = 5\,\text{sen.}A - 20\,\text{sen.}^3A + 16\,\text{sen.}^5A.$$

&c.

Seni degli archi moltiplici, espressi in potenze del coseno dell' arco semplice.

$$\text{Sen. } 0 = 0.$$
$$\text{Sen. } A = \sqrt{(1 - \cos.^2A)}.$$
$$\text{Sen.}2A = 2\cos.A\sqrt{(1 - \cos.^2A)}.$$
$$\text{Sen.}3A = (4\cos.^2A - 1)\sqrt{(1 - \cos.^2A)}.$$
$$\text{Sen.}4A = (8\cos.^3A - 4\cos.A)\sqrt{(1 - \cos.^2A)}.$$
$$\text{Sen.}5A = (16\cos.^4A - 12\cos.^2A + 1)\sqrt{(1 - \cos.^2A)}.$$

&c.

Coseni degli archi moltiplici, espressi in potenze del coseno dell' arco semplice.

$\text{Cos.}\ 0 = 1.$
$\text{Cos.}\ A = \cos.A.$
$\text{Cos.}2A = 2\cos.^2A - 1.$
$\text{Cos.}3A = 4\cos.^3A - 3\cos.A.$
$\text{Cos.}4A = 8\cos.^4A - 8\cos.^2A + 1.$
$\text{Cos.}5A = 16\cos.^5A - 20\cos.^3A + 5\cos.A.$
&c.

Coseni degli archi moltiplici, espressi in potenze del seno dell' arco semplice.

$\text{Cos.}\ 0 = 1.$
$\text{Cos.}\ A = \sqrt{(1 - \text{sen.}^2A)}.$
$\text{Cos.}2A = 1 - 2\,\text{sen.}^2A.$
$\text{Cos.}3A = (1 - 4\,\text{sen.}^2A)\sqrt{(1 - \text{sen.}^2A)}.$
$\text{Cos.}4A = 1 - 8\,\text{sen.}^2A + 8\,\text{sen.}^4A.$
&c.

126. La seguente tavola per le tangenti degli archi moltiplici si continua facilmente per mezzo della formola (56), procedendo come abbiamo fatto (119), e sostituendo sempre il valor trovato della tangente che precede.

Tangenti degli archi moltiplici, espresse in potenze della tangente dell' arco semplice.

$\text{Tang.}\ A = \text{tang.}A.$
$\text{Tang.}2A = \frac{2\,\text{tang.}A}{1 - \text{tang.}^2A}.$
$\text{Tang.}3A = \frac{3\,\text{tang.}A - \text{tang.}^3A}{1 - 3\,\text{tang.}^2A}.$
$\text{Tang.}4A = \frac{4\,\text{tang.}A - 4\,\text{tang.}^3A}{1 - 6\,\text{tang.}^2A + \text{tang.}^4A}.$
&c.

127. Dalle tavolette (125) sarà facile ora d' aver le potenze del seno e del coseno dell' arco semplice espresse in seni e coseni dell' arco moltiplice. Per esempio, dalla tavola quarta si ha $2 \text{sen.}^2 A = 1 - \cos. 2A$. Dalla prima, $4 \text{sen.}^3 A = 3 \text{sen.} A - \text{sen.} 3A$. Dalla quarta $8 \text{sen.}^4 A = \cos. 4A + 8 \text{sen.}^2 A - 1$. Quì bisogna sostituire il valor precedente di $\text{sen.}^2 A$, giacchè non si vogliono potenze nel secondo membro di queste equazioni, e si avrà $8 \text{sen.}^4 A = \cos. 4A - 4 \cos. 2A + 3$. Operando in questa forma, o più speditamente per via della legge che additeremo, si ottengono le tavole seguenti, che abbiamo spinto fino alla settima potestà a cagione del loro grande uso nel calcolo integrale.

Potenze del seno dell' arco semplice espresse in seni, e coseni dell' arco moltiplice.

$$\text{Sen.}^1 A = \text{sen.} A.$$
$$2\,\text{Sen.}^2 A = 1 - \cos. 2A.$$
$$4\,\text{Sen.}^3 A = 3 \text{sen.} A - \text{sen.} 3A.$$
$$8\,\text{Sen.}^4 A = 3 - 4 \cos. 2A + \cos. 4A.$$
$$16\,\text{Sen.}^5 A = 10 \text{sen.} A - 5 \text{sen.} 3A + \text{sen.} 5A.$$
$$32\,\text{Sen.}^6 A = 10 - 15 \cos. 2A + 6 \cos. 4A - \cos. 6A.$$
$$64\,\text{Sen.}^7 A = 35 \text{sen.} A - 21 \text{sen.} 3A + 7 \text{sen.} 5A - \text{sen.} 7A.$$
&c.

Potenze del coseno dell' arco semplice espresse in coseni dell' arco moltiplice.

$$\text{Cos.}^1 A = \cos. A.$$
$$2\,\text{Cos.}^2 A = 1 + \cos. 2A.$$
$$4\,\text{Cos.}^3 A = 3 \cos. A + \cos. 3A.$$
$$8\,\text{Cos.}^4 A = 3 + 4 \cos. 2A + \cos. 4A.$$
$$16\,\text{Cos.}^5 A = 10 \cos. A + 5 \cos. 3A + \cos. 5A.$$
$$32\,\text{Cos.}^6 A = 10 + 15 \cos. 2A + 6 \cos. 4A + \cos. 6A.$$
$$64\,\text{Cos.}^7 A = 35 \cos. A + 21 \cos. 3A + 7 \cos. 5A + \cos. 7A.$$
&c.

È manifesta la legge di queste serie. I coefficienti nel secondo membro, cominciando dall' ultimo termine, sono gli stessi che quelli del binomio elevato; con la sola differenza che i numeri isolati non sono che la metà di quelli, che dà il binomio. Per esempio, i coefficienti del binomio per la sesta potestà sono, 1, 6, 15, 20; in fatti nell' equazione di 32 $\cos.^6 A$ si ha $\cos. 6A \times 1$, $\cos. 4A \times 6$, $\cos. 2A \times 15$, e $10 = \frac{20}{2}$.

Tralascio di costruire la tavola delle potenze delle tangenti, per esser più complicata, e perchè non ho veduto ancora farne uso.

128. Ho raccolto in due tavole I e II, poste in fine dell' opera, le formole di maggior uso, onde i lettori possano averle sott' occhio d' ora innanzi con facilità, e i dotti valersene di repertorio. In quelle della tavola I, nel comporner le quali è rimasta sola la lettera B, ho posto in vece la lettera A, per conservare l'uniformità. Del resto avverto i principianti, che niente è più facile, quanto il moltiplicare all' infinito le formole trigonometriche, e che io ne ho soppresso un gran numero, perchè inutili a fronte di quelle che ho dato nelle due tavole; che formano, se non m' inganno, la più copiosa collezione che esista in tal genere.

Se B $>$ A, è cosa chiara che ciò non induce alcun cangiamento ne' segni del secondo membro della formola (II. 4ª); (II. 4ª) *significa* tavola II, formola 4ª. Ho dunque posto $\cos.(A \backsim B)$ in vece di $\cos.(A - B)$, e per la stessa ragione anche nelle formole (II. 7ª, 11ª, &c.) Lo stesso s' intenda delle altre (I. 29ª, 30ª). Dimostrerò in un altro modo (154) che il coseno di un arco negativo (minor di 90°) è sempre positivo.

Avendo dato i valori di sen. A, cos. A, &c. e di sen. $(A + B)$, cos. $(A + B)$, &c. ho stimato inutile il fare altre tavole coi valori di sen. $\frac{1}{2}A$, sen. $2A$, cos. $\frac{1}{2}A$, &c. sen. $\frac{1}{2}(A + B)$, &c. Sarà agevole l'aver questi al bisogno, operando a similitudine di quello che ho già fatto più volte; e che si riduce a mettere, in vece di A o di B, qual moltiplice o sottomoltiplice più si voglia di A o di B.

Quando si vorrà il valore di una cotangente, si rovescieranno

le formole della tangente, mettendo il numeratore in luogo del denominatore, e viceversa. Per esempio, (I. 38ª), $\text{cot.}A = \frac{\text{cot.}\frac{1}{2}A - \text{tang.}\frac{1}{2}A}{2}$. Così si farà delle formole del coseno per aver la secante, e di quelle del seno per la cosecante. Tutto questo è una conseguenza evidente delle analogie (22, 23, 24).

Sarà bene imparare a memoria le formole (I. 1ª, 3ª, 16ª, 18ª, 22ª, 31ª, 32ª), di cui si fa continuo uso. D' ora innanzi saremo più parchi di citazioni, giacchè il lettore potrà ricorrere alle tavole, quando voglia verificare le formole che anderemo impiegando, delle quali non si ricordasse.

CAPITOLO V.

Espressioni dell' arco in parti del raggio, e delle linee trigonometriche per mezzo delle potenze dell' arco.

129. LA linea retta e la circolare sembrano eterogenee. È stato vano fin' ora, e sarà probabilmente per sempre, ogni sforzo per rinvenire una misura comune che sia rigorosa. Supponendo che la circonferenza del circolo si apra, e si distenda in guisa di linea retta, si dimanda quante volte contenga il suo diametro. Il quoziente di questa divisione non si è trovato che prossimamente. Ma come questa approssimazione può spingersi all' infinito, così quel che vi è di difettoso nella soluzion del problema rende bensì più complicate e più lunghe le operazioni, non però mai fallaci, nè erronee. Si perviene all' intento per vie ingegnose col mezzo delle linee trigonometriche, al calcolo delle quali a vicenda riesce poi utile la presente ricerca. Ci serviremo espressamente del calcolo differenziale, ed integrale, per dare ai nostri lettori, che non ne

fossero istrutti, un' idea della più bella invenzione che sia stata fatta nelle matematiche. I primi elementi del detto calcolo non contengono alcuna difficoltà, e porgono maraviglioso soccorso in molte occasioni, come vedremo nel decorso di quest' opera.

130. *Grandezze costanti* sono quelle che restano sempre le stesse nel mentre che le *variabili* cangiano. Nel circolo, per esempio, nel mentre che le linee trigonometriche cangiano di grandezza al variar dell' arco, il raggio rimane costante. Denoteremo, secondo il costume, le grandezze *variabili* per le ultime lettere dell' alfabeto z, y, x, &c.; e le *costanti* o invariabili per le prime a, b, c, &c. Ciò posto, se in questa equazione $x = ay$ si suppone che x aumenti di una quantità δx (intendo per δx la variazione, la differenza, o *il differenziale* della grandezza x) bisognerà che anche y riceva un aumento δy tale quale convenga perchè l' equazione sussista. Sarà dunque $x + \delta x = a(y + \delta y) = ay + a\delta y$. Levando le cose uguali, x e ay, resta $\delta x = a\delta y$.

Sia $x = 6$, $a = 2$, $y = 3$, e sia $\delta x = 4$, si troverà $\delta y = \frac{\delta x}{a} = \frac{4}{2} = 2$. Di fatti quando $x = 6 + 4 = 10$, bisogna che sia $y = 3 + 2 = 5$, giacchè la costante $a = 2$ non deve cangiare.

131. L'operazione, che abbiamo fatta, si chiama *differenziare*, o *prender le differenze*, o vero *prendere i differenziali.* In fatti l' equazione primitiva $x = ay$ è sparita, e la nuova $\delta x = a\delta y$ contiene solamente le variazioni de' termini della prima.

Se in vece di due variabili se ne avessero molte, come in questa equazione $bx + mz = u - any + c$. Facendo cangiar le variabili, e procedendo in tutto come si è fatto (130), si avrà $b(x + \delta x) + m(z + \delta z) = u + \delta u - an(y + \delta y) + c$. Eseguendo le moltiplicazioni, e sottraendo l' equazion primitiva, il resto sarà, $b\delta x + m\delta z = \delta u - an\delta y$. Si osservi che la costante isolata c è sparita affatto, giacchè *il differenziale o la variazione di una quantità costante è evidentemente zero.*

Le

Le operazioni precedenti si abbreviano con la regola seguente, che è tratta dai loro risultati. *Per differenziare un' equazione basta scriver nel luogo d' ogni variabile* (o del prodotto (134, 135) di più variabili) *il suo differenziale moltiplicato con tutti i fattori costanti di essa variabile, e sopprimere le costanti isolate.* Così nell'ultimo esempio essendo data da differenziare l' equazione $bx + mz = u - any + c$, se si scrive $\delta x \times b$ in luogo di bx, $\delta z \times m$ in luogo di mz, $\delta u \times 1$ in luogo di u, $-\delta y \times an$ in luogo di $-any$, e se si sopprime c, si ha immediatamente, e senza passare per le operazioni intermedie vedute prima, l' equazione differenziale cercata $b\delta x + m\delta z = \delta u - an\delta y$.

132. *Il differenziare ha per oggetto di scoprire la relazione fra i cangiamenti delle grandezze variabili.* Per esempio, l' equazione $\delta x = a\,\delta y$ dà $\frac{\delta x}{\delta y} = a$. Ma anche la primitiva $x = ay$ dà $\frac{x}{y} = a$. Dunque *allorchè la ragione* (9) *fra due variabili è costante, le loro variazioni*, per grandi che sieno, *hanno pure la stessa ragione.*

133. Sia al presente $xy = b$. In tal caso, poichè il prodotto delle due variabili deve esser sempre eguale alla costante b, qualunque sia la grandezza delle loro variazioni, è chiaro che, se una delle variabili cresce, l' altra deve diminuire. Ad ogni modo si dà sempre ai differenziali lo stesso segno che hanno le variabili, a cui appartengono, giacchè i risultati del calcolo non possono mancar d' indicare, se le variazioni succedono in senso contrario. Sarà dunque $(x + \delta x)(y + \delta y) = b$; o sia $xy + y\delta x + \delta y\,(x + \delta x) = b$: e, levando le cose uguali, $y\delta x + \delta y\,(x + \delta x) = 0$. Questo risultato dimostra chiaramente che una delle variazioni è negativa, poichè i termini del primo membro dell' equazione si distruggono reciprocamente.

Supponiamo adesso che δx, δy, δz, &c. siano quantità infinitamente piccole, o sia frazioni le più prossime a zero che possano immaginarsi. *Grandezza infinita*, tanto l' infinitamente

grande, quanto l' infinitamente piccola, s' intende quella, per esprimer la quale non abbiamo numeri capaci, nè sufficienti. Ogni quantità, che con numeri si può esprimere, si appella per conseguenza *grandezza finita*, poichè ha un valore finito che può rappresentarsi con note, sian poche, sian molte, le quali hanno un termine, nè vanno all' infinito.

Ciò posto, potremo nell' ultima equazione mettere x in luogo di $(x + \delta x)$, giacchè, la differenza fra queste due espressioni essendo infinitamente piccola, l' error che nascerà nel moltiplicare δy sarà infinitamente piccolo, al confronto di δy; o sia δy sarà infinitamente grande in comparazion dell' errore che quì si commette. Questo errore viene ad esser l' infinitesima parte di un infinitesimo, come si potrà averne un' idea negli esempj numerici che daremo or ora. Faremo poi vedere (138, 151), che questo errore apparente non nuoce punto all' esattezza matematica del calcolo. Operando, come si è detto, l' ultima equazione diviene $y\delta x + x\delta y = 0$. La quantità negletta è $\delta x \delta y$, la quale si chiama un infinitesimo *di secondo ordine*, come sarebbero i quadrati $(\delta x)^2$, $(\delta y)^2$, $(\delta z)^2$, &c.

Per dare una qualche idea materiale, che gl' infinitesimi di secondo ordine possono trascurarsi senza ribrezzo, quando si cerca la relazione fra gl' infinitesimi di primo ordine, quali sono δx, δy, &c, sia $\delta x = \frac{5}{1000000}$, e $\delta y = \frac{2}{1000000}$; sarà $\delta x \delta y = \frac{10}{1000000000000}$. Si vede quanto sia estrema la picciolezza dell' ultima frazione al confronto dell' una o dell' altra, che precedono. Or s' immagini chi legge quanto enorme sarebbe questa sproporzione, se nei valori quì dati a δx e δy il numero de' zeri fosse infinito tanto nell' uno come nell' altro dei due denominatori, il che è necessario perchè δx e δy abbiano un valore infinitamente piccolo, come si è supposto. Nello stesso modo si può riconoscere che un infinitesimo di secondo ordine è infinitamente grande respettivamente ad un infinitesimo di terzo ordine, e così discorrendo.

134. Ripigliando l'equazione $y\,\delta x + x\,\delta y = 0$, si osservi che il primo membro contiene la variazione di xy, (133), e il secondo quella di b, (131). Ne risulta che *per differenziare il prodotto di più variabili, si deve prendere il differenziale di ciascuna separatamente, considerando le altre come fattori costanti* (131), *e scriver la somma dei differenziali nel luogo del prodotto, da cui furono presi.*

Di fatti per differenziare xy, se si prende il differenziale di x, considerando y costante, si avrà (131), $y\delta x$; e se si prende il differenziale di y, considerando x costante, si ha $x\delta y$. La somma di questi due differenziali, $y\delta x + x\delta y$, è appunto quella che si è già trovata.

Se dunque si avesse $xyz = c + mu$, i differenziali del primo membro saranno $xy\,\delta z + xz\,\delta y + yz\,\delta x$, e quello del secondo membro, $m\delta u$. Così per l'appunto si troverà, se si faccia per disteso l'operazione coi metodi già veduti, ponendo $(x + \delta x)$ $(y + \delta y)$ $(z + \delta z) = c + m(u + \delta u)$. Questa equazione è la stessa che la seguente, $xyz + xy\delta z + y\delta x\,(z + \delta z) + \delta y\,(x + \delta x)\,(z + \delta z) = c + mu + m\delta u$. Sottraendo l'equazion primitiva $xyz = c + mu$, e ponendo x in luogo di $x + \delta x$, e z in luogo di $z + \delta z$, come abbiam fatto (133), il resto sarà $xy\delta z + yz\delta x + xz\delta y = m\delta u$.

135. La regola data (134) serve pure a differenziar le potenze delle variabili. Sia x^2, di cui si vogliono i differenziali. Si scriva xx, e trattando questo prodotto come se fosse composto di due variabili differenti, i differenziali saranno $x\delta x + x\delta x$, o vero $2x\delta x$. Col metodo stesso si troverà, che i differenziali di x^3 si riducono a $3x^2\delta x$; sicchè in generale *il differenziale di* x^m è $mx^{m-1}\delta x$, o sia $\delta(x^m) = mx^{m-1}\delta x$.

136. Quindi sarà facile il differenziare le espressioni coperte da segni radicali, scrivendole come elevate alle potenze frazionarie corrispondenti. Dato, per esempio, $\sqrt{(a + bx)}$ si scriva $(a + bx)^{\frac{1}{2}}$;

e comparando questa espressione alla generale x^m, si avrà $m = \frac{1}{2}$, e $a + bx$ in luogo di x. Dunque in vece di mx^{m-1} si ha $\frac{1}{2}(a + bx)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}(a + bx)^{-\frac{1}{2}}$. Resta ora da moltiplicare questa espressione per ∂x; ma invece di x si ha in questo caso $a + bx$, e il differenziale di $a + bx$ è $b\partial x$, (131). Dunque $\partial\sqrt{(a + bx)} = \frac{1}{2}b\partial x(a + bx)^{-\frac{1}{2}} = \frac{b\partial x}{2\sqrt{(a+bx)}}$.

137. La stessa espression generale (135) serve a differenziar le variabili che si presentano in forma di frazione. Se si avesse $\frac{x}{y} = a$, è più breve e più semplice il differenziar l'equazione ridotta così, $x = ay$, (130). Ma nelle equazioni composte di molti termini questa operazione non è sempre comoda ad eseguirsi. In tal caso in vece di $\frac{x}{y}$ si scriva l'equivalente xy^{-1}. I differenziali di questo prodotto sono (134), $x\partial(y^{-1}) + y^{-1}\partial x = x\partial(y^{-1}) + \frac{\partial x}{y}$. Paragonando ora l'espressione $\partial(y^{-1})$ con la generale $\partial(x^m)$, si ha $m = -1$, $m - 1 = -2$, y in luogo di x, e ∂y in luogo di ∂x. Dunque $\partial(y^{-1}) = -1 \times y^{-2}\partial y = -\frac{\partial y}{y^2}$; e $x\partial(y^{-1}) = -\frac{x\partial y}{y^2}$. E però $\partial\frac{x}{y} = \frac{\partial x}{y} - \frac{x\partial y}{y^2} = \frac{y\partial x - x\partial y}{y^2}$. Laonde *per differenziare una frazione composta di variabili, bisogna moltiplicare il denominatore coi differenziali del numeratore, sottrar da questo prodotto i differenziali del denominatore moltiplicati per il numeratore, e dividere il resto per il quadrato del denominatore.*

Proviam l'esattezza di questa operazione comparandola coll'altra (130). Quivi l'equazione $x = ay$ diede $\partial x = a\partial y$. Ma la stessa equazione espressa nel modo seguente $\frac{x}{y} = a$, ci ha dato or ora $\frac{y\partial x - x\partial y}{y^2} = 0$, (zero essendo (131) il differenziale di a). Si provi che le due equazioni differenziali sono le stesse sotto forma diversa. Moltiplicando l'ultima per y^2, si avrà $y\partial x -$

$x \delta y = 0 \times y^2 = 0$; e per conseguenza $y \delta x = x \delta y$, e $\delta x = \frac{x}{y} \times \delta y$. Ma per l'equazione primitiva $\frac{x}{y} = a$. Dunque la seconda equazione differenziale si riduce alla prima $\delta x = a \delta y$.

La regola data quì sopra ha somministrato un risultato rigoroso in questo caso, qualunque sia la grandezza delle variazioni; ma si avverta che non lo darà più tale per le variazioni finite, semprecchè l'equazione da differenziare contenga esplicito o implicito qualche prodotto di più variabili prese cogli esponenti positivi. Per esempio, $\frac{z}{y} = x$ contiene implicito il prodotto yx, e però sotto qualunque forma si ponga l'equazione per differenziarla, sarà sempre negletta la quantità $\delta y \delta x$, (133).

Questi sono gli elementi del calcolo differenziale, che ho sminuzzati con più prolissità, che non suol farsi, onde agevolarne l'intelligenza ai principianti. Colle regole date, ogni espressione algebraica si può differenziare. Ma l'*integrazione* non si estende egualmente ad ogni sorte d'espressioni. Quantunqne, per *integrare*, le regole si riducano, per così dire, ad una sola; nulladimeno l'esecuzione per lo più è difficile, e spesse volte impossibile.

138. *Integrare* è l'operazione inversa del differenziare. Date le quantità variabili, si trova differenziando la relazione fra i loro cangiamenti. All'incontro da questi cangiamenti si rimonta integrando a trovare le grandezze variabili, a cui essi appartengono. Quindi se il differenziale di x è δx, l'integrale di δx è x; e se il differenziale di x^m è $mx^{m-1} \delta x$, (135), l'integrale di $mx^{m-1} \delta x$ è x^m. Donde si cava la regola seguente per integrar questa specie di differenziali. *Accrescete di una unità l'esponente della variabile, e dividete per l'esponente così aumentato, e per il differenziale.* Nell'espressione $mx^{m-1} \delta x$ l'esponente $m-1$ accresciuto d'una unità diviene m. Si ha dunque $mx^m \delta x$, e dividendo per $m \delta x$ a tenor della seconda parte della regola, l'integrazione è compita, e si ha x^m..

Di più *se il differenziale è moltiplicato, o diviso per qualche costante, si conserveranno, integrando, le costanti nel loro posto;* giacchè è cosa chiara che se il differenziale di ay è $a\delta y$, (131), l'integrale di $a\delta y$ deve essere ay.

Nel differenziare un prodotto qualunque di variabili, per esempio, xy, abbiamo negletto (133) l'infinitesimo di secondo ordine $\delta x\delta y$. Ora, se nell' integrare trascuriamo egualmente gl' infinitesimi dell' ordine stesso, l'errore commesso nel differenziare sarà compensato nell' integrare. E però se poniamo xy per integrale di $y\delta x + x\delta y$, quantunque questa espressione differenziale non sia completa, ma vi manchi il termine $\delta x\delta y$, è cosa evidente, che l' integrazione sarà esattissima.

Non abbiamo bisogno di saper davvantaggio del calcolo integrale in questa Trigonometria. Aggiungeremo soltanto, per non lasciar il lettore senza qualche idea delle difficoltà, che l' integrare sarebbe agevole, se le vicende del calcolo non presentassero quasi sempre i differenziali incompleti, ed inviluppati molestamente. E impossibile, per esempio, d' integrare $y\delta x$, perchè non ci è alcuna espressione, la quale differenziata possa produr solamente $y\delta x$. In due parole, qualunque espressione differenziale voglia integrarsi, bisogna comporne una libera da differenziali, la quale differenziata produca esattamente l' espressione differenziale data. Questa può dirsi l' unica regola, ed in ciò consiste tutta l' arte del calcolo integrale : ma *hoc opus, hic labor.*

139. Le espressioni impiegate sin quì essendo generalissime, tutte le regole del calcolo differenziale e integrale dovranno dunque potersi applicare alle linee trigonometriche.

Vediamo in prima, come il valore de' loro differenziali, per grandi che siano, si tragga a tutto rigore da alquante formole della tavola II, le quali non so che siano state ancora trasformate da altri in questa maniera, fecondissima di utilità.

Poichè l' equazione (II. 22ᵃ), sen. A — sen. B $=$ 2 sen. $\frac{1}{2}$(A — B) cos. $\frac{1}{2}$(A + B), suppone A $>$ B, potrà chiamarsi δB, alla ma-

niera del calcolo differenziale, quella aumentazione, che bisognerebbe all'angolo B per esser eguale all'angolo A, e δ sen.B l'accrescimento che farebbe d'uopo a sen.B per uguagliar sen.A. Sarà dunque $A = B + \delta B$, e sen.A $=$ sen.B $+ \delta$ sen.B. Sostituendo questi valori, l'equazione diviene

$$\delta \text{ sen.} B = 2 \text{ sen.} \tfrac{1}{2} \delta B \cos.(B + \tfrac{1}{2} \delta B).$$

Operando in simil modo sulle equazioni (II. 23ª, 24ª, 25ª), e rammentando che al crescer dell'arco B il coseno, e la cotangente devono diminuire (33), si avranno le tre seguenti.

$$-\delta \cos.B = 2 \text{ sen.} \tfrac{1}{2} \delta B \text{ sen.}(B + \tfrac{1}{2} \delta B).$$

$$\delta \text{ tang.} B = \frac{\text{sen.} \delta B}{\cos.B \cos.(B + \delta B)}.$$

$$-\delta \cot.B = \frac{\text{sen.} \delta B}{\text{sen.} B \text{ sen.}(B + \delta B)}.$$

Si osservi, che le quattro equazioni precedenti contengono la più rigorosa verità, qualunque sia la grandezza di δB, giacchè niuna quantità fu negletta nel formarle, e non sono altra cosa che le stesse quattro formole (II. 22ª a 25ª) presentate sotto una forma diversa. Si potranno paragonare queste equazioni con quelle date da Eulero (*Calculi Diff. Pars prior*, 21), nelle quali egli esprime le differenze finite de' seni e de' coseni, col mezzo di serie infinite delle potenze della variazione dell'arco.

I differenziali della secante e della cosecante si vedranno negli articoli 703, 712, dove solamente ne avremo bisogno.

140. Ripigliando la prima delle quattro equazioni, se si sviluppa (53) l'espressione $\cos.(B + \tfrac{1}{2} \delta B)$, si troverà $\delta \text{sen.} B = 2 \text{ sen.} \tfrac{1}{2} \delta B (\cos.B \cos.\tfrac{1}{2} \delta B - \text{sen.} B \text{ sen.} \tfrac{1}{2} \delta B) = 2 \text{ sen.} \tfrac{1}{2} \delta B \cos.B \cos.\tfrac{1}{2} \delta B - 2 \text{ sen.}^2 \tfrac{1}{2} \delta B \text{ sen.} B =$ (I. 6ª, 22ª) $\text{sen.} \delta B \cos.B - \text{sen.} B (1 - \cos.\delta B)$.

Supponiamo al presente, che δB sia un arco infinitamente piccolo, cioè l'arco più prossimo a zero che possa immaginarsi (133). In tal caso è facile da comprendere immaginando, se si vuole, un arco infinitamente piccolo sulla fig. 1, che il seno di quest'arco

tanto piccolo sarà il più prossimo, che possa immaginarsi, a confondersi con l'arco stesso; e che il coseno di quest' arco sarà il più prossimo, che possa immaginarsi, a confondersi col raggio. Si ponga dunque δB in luogo di sen.δB, e R, o sia 1, in vece di cos.δB (vedremo ben presto (152, 154) che l'errore di queste supposizioni consiste in infinitesimi di secondo ordine, di terzo ordine, &c;) l' equazione δsen.B $=$ sen.δB cos.B — sen.B) (1 — cos.δB) diviene

$$\delta \text{sen.} B = \delta B \cos. B.$$

Collo stesso metodo la seconda delle quattro equazioni differenziali (139) si riduce

$$-\delta \cos. B = \delta B \text{ sen.} B.$$

Se si pongano le due seguenti in vece della 3ª e della 4ª,

$$\delta \text{tang.} B = \frac{\delta B}{\cos.^2 B},$$

$$-\delta \cot. B = \frac{\delta B}{\text{sen.}^2 B},$$

si avranno i differenziali infinitesimi de' seni, coseni, tangenti, e cotangenti, quali furono dati fin' ora dagli Autori.

Per conoscere immediatamente, che nelle due ultime formole si negligono solo gl'infinitesimi (133) di secondo ordine, si sviluppino le primitive nel modo seguente; $\delta \text{tang.} B = \frac{\text{sen.} \delta B}{\cos. B \cos.(B + \delta B)} = \frac{\text{sen.} \delta B}{\cos B (\cos. B \cos. \delta B - \text{sen.} B \text{ sen.} \delta B)} = \frac{\delta B}{\cos.^2 B - \delta B \text{ sen.} B \cos. B}$, facendo come sopra sen.$\delta B = \delta B$, e cos.$\delta B = 1$. Si eseguisca ora, secondo le regole dell'algebra, la divisione indicata dall' ultima frazione, e si troverà, che dopo il primo termine $\frac{\delta B}{\cos.^2 B}$, tutti gli altri termini del quoziente sono implicati con le potenze $(\delta B)^2$, $(\delta B)^3$, &c. Lo stesso sia detto della formola della cotangente.

141. I differenziali infinitesimi ora trovati delle linee trigonometriche concorrono a provare una regola che è di grandissima utilità nelle matematiche. Quando B $= 0$, cos.B è il più grande possibile (41). Allora sen.B $= 0$, (42), e la seconda formola (140) dà

dà $-\delta\cos.B = \delta B \times 0 = 0$. Parimente sen.B è il più grande possibile, quando $B = 90°$, ed allora $\cos.B = 0$, (42), e la prima formola (140) dà $\delta\text{sen}.B = \delta B \times 0 = 0$. Donde si vede che una variazione infinitamente piccola dell' arco non produce alcun cangiamento nel seno o nel coseno, allorchè queste linee sono al loro *maximum*.

Questi risultati sono conformi alla regola seguente : *Quando il valore finito di una quantità è il massimo possibile, il differenziale di essa quantità è zero.*

Sia proposto, per esempio, di dividere una quantità data a in due parti, il prodotto delle quali sia il massimo possibile. Chiamando x una delle due parti, l' altra sarà $a - x$, e il prodotto $ax - xx$. Nel caso del *maximum*, cioè del più grande valore di questo prodotto, si ha per la regola precedente $\delta(ax - xx) = 0$, ovvero $a\delta x = 2x\delta x$, (135), donde si cava $x = \frac{1}{2}a$. E però le due parti devono essere uguali, perchè il loro rettangolo sia il più grande possibile. Si vede quanto sia pronta e felice la regola data.

142. Passiamo ai differenziali delle seconde potenze.

$\text{Sen.}^2A - \text{sen.}^2B = \cos.^2B - \cos.^2A = \text{sen.}(A-B)\,\text{sen.}(A+B)$.
Dunque, col metodo tenuto (139), si avrà

$$\delta(\text{sen.}^2B) = -\delta(\cos.^2B) = \text{sen.}\delta B\ \text{sen.}(2B + \delta B).$$

Similmente procedendo, le equazioni (II. 28ª, 29ª) forniscono le due seguenti.

$$\delta(\text{tang.}^2B) = \frac{\text{sen.}\delta B\ \text{sen.}(2B + \delta B)}{\cos.^2B\ \cos.^2(B + \delta B)},$$

$$-\delta(\cot.^2B) = \frac{\text{sen.}\delta B\ \text{sen.}(2B + \delta B)}{\text{sen.}^2B\ \text{sen.}^2(B + \delta B)}.$$

Queste formole sono rigorose per qualsivoglia differenza finita, egualmente che quelle lineari (139). Riduciamole ora alle date dagli Autori per le differenze infinitesime.

143. $\delta(\text{sen.}^2B) = \text{sen.}\delta B\ \text{sen.}2(B + \frac{1}{2}\delta B) =$ (I. 6ª) $2\,\text{sen.}\delta B\ \text{sen.}(B + \frac{1}{2}\delta B)\cos.(B + \frac{1}{2}\delta B)$. Facendo δB infinita-

mente piccolo, mettendolo in luogo di sen.δB, e ponendo B in vece di (B $+\frac{1}{2}\delta$B), (133), l'equazione diviene

$$\delta(\text{sen.}^2\text{B}) = 2\,\delta\text{B sen.B cos.B}.$$

Questo è quello che si sarebbe trovato facendo sen.^{2}B $= x^m$, e differenziando con la formola generale $mx^{m-1}\,\delta x$, (135). In fatti $m = 2$, $x =$ sen.B, $\delta x = \delta$sen.B $= \delta$B cos.B, (140). Dunque $mx^{m-1}\delta x = 2\,(\text{sen.B})^{2-1}\,\delta\text{B cos.B} = 2\,\text{sen.B}\,\delta\text{B}$ cos.B. Facendo dunque uso della formola generale per abbreviare, si ha

$$\delta(\text{tang.}^2\text{B}) = 2\,\text{tang.B}\,\delta\text{tang.B} = 2\,\text{tang.B} \times \frac{\delta\text{B}}{\text{cos.}^2\text{B}},\ (140),\ \text{e}$$

$$-\,\delta(\text{cot.}^2\text{B}) = 2\,\text{cot.B} \times \frac{\delta\text{B}}{\text{sen.}^2\text{B}}.$$

Ho posto nella tavola II tutti i differenziali trovati negli articoli 139, 140, 142, 143; onde si abbiano sotto l'occhio ad ogni occorrenza. Alla tavola stessa si avrà ricorso quando si voglia verificare qualunque dei detti differenziali, che impiegheremo in progresso senza citarla.

Come il differenziale di un seno negativo deve essere negativo (133), il che indica decremento nel seno, e per conseguenza nell'arco corrispondente, la formola (II. 30^a) diviene in tal caso $-\,\delta$sen.B $= -\,2$ sen. $\frac{1}{2}\,\delta$B cos.(B $- \frac{1}{2}\,\delta$B). Da questo discorso convenevolmente applicato anche alle formole seguenti risulta per regola generale, che quando si avrà ad impiegare il secondo membro delle formole differenziali finite della tavola II col segno negativo, converrà usar (B $-\,\delta$B) in luogo di (B $+\,\delta$B), (B $-\frac{1}{2}\delta$B) in vece di (B $+\frac{1}{2}\,\delta$B), e (2B $-\,\delta$B) in cambio di (2B $+\,\delta$B).

144. Poichè $\delta\text{B} = \frac{\delta\text{sen.B}}{\text{cos.B}} = \frac{\delta\text{sen.B}}{\sqrt{(1-\text{sen.}^2\text{B})}} = \delta\text{sen.B} \times (1-\text{sen.}^2\text{B})^{-\frac{1}{2}}$, alzando il binomio $1 -$ sen.^{2}B alla potenza $-\frac{1}{2}$ per via della nota formola Neutoniana, si avrà $\delta\text{B} = \delta\text{sen.B} \times (1 + \frac{1}{2}\,\text{sen.}^2\text{B} + \frac{1.3}{2.4}\,\text{sen.}^4\text{B} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\text{sen.}^6\text{B} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\text{sen.}^8\text{B} + \&\text{c})$. Questa serie va all' infinito, ed è manifesta la sua legge, se vuol

continuarsi più oltre. Or si dimanda l'integrazione di questa equazione.

L'integrale di δB è B, (138), e per la stessa ragione sen. B è l'integrale di δsen. B $\times$ 1. Per trovar l'integrale di $\frac{1}{2}$ sen.^{2} B $\times$ δsen. B, si accresca di un' unità l'esponente, e si avrà $\frac{1}{2}$ sen.^{3} B $\times$ δsen. B; si divida per 3 δsen. B, l'integrale cercato sarà $\frac{\text{sen.}^3 B}{2.3}$. Integrando con questo metodo ogni termine della serie, e ponendo A in luogo di B, l'equazione integrata, che nomino (S), sarà

$$(S) \ldots A = \text{sen. } A + \frac{\text{sen.}^3 A}{2.3} + \frac{3 \text{sen.}^5 A}{2.4.5} + \frac{3.5 \text{sen.}^7 A}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7 \text{sen.}^9 A}{2.4.6.8.9} + \&c.$$

Eccoci giunti per vie un poco lunghe, ma feconde di utilità, allo scopo che avevamo fissato. La serie infinita, che abbiamo trovato (vedremo (161) un metodo breve per calcolarla), ci darà per mezzo del seno il valore di un arco qualunque A espresso in parti del raggio.

145. E vaglia il vero, sia A = 30°: sappiamo (18) che sen. 30° = $\frac{1}{2}$ R = $\frac{1}{2}$: sostituendo questi valori, l'equazione diviene

$$\text{ARCO di } 30° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{3}{2.4.5.2^5} + \frac{3.5}{2.4.6.7.2^7} + \frac{3.5.7}{2.4.6.8.9.2^9} + \&c.$$

Si facciano le divisioni indicate di termine in termine, e si avrà, limitandoci a otto decimali per averne sei conformi al vero;

$$\frac{1}{2} = 0{,}5$$
$$\frac{1}{48} = 0{,}02083333$$
$$\frac{3}{1280} = 0{,}00234375$$
$$\frac{15}{43008} = 0{,}00034877$$
$$\frac{105}{1769472} = 0{,}00005934$$
$$\frac{945}{86507520} = 0{,}00001092$$
$$\frac{10395}{4907335680} = 0{,}00000212$$
&c.

SOMMA. 0,523598

Sicchè l'arco di 30° : R :: 0,523598 : 1.

Ho trascurato le due ultime decimali della somma, perchè non giuste. Questa può aversi con quanto numero si voglia di decimali esatte, purchè si continuino le divisioni quì interrotte, e si prendano nuovi termini della serie, di cui è chiara la progressione. Ma queste fatiche son fatte, e moltiplicando per 6 l'arco di 30°, fu calcolata fino a 127 decimali la semicirconferenza del circolo, e si trovò l'arco di $180° = R \times 3,141592\ 653589\ 793238\ 462643\ 383279\ 502884\ 197169\ 399375\ 105820\ 974944\ 592307\ 816406\ 286208\ 998628\ 034825\ 342117\ 067982\ 148086\ 513272\ 306647\ 093844\ 6 +$. Dunque la semicirconferenza del circolo, distesa in guisa di linea retta, è lunga tre volte il raggio, più una parte di esso espressa dalla frazione or ora data. L'ultima nota di questa frazione non la compisce esattamente, mentre, se si continua l'operazione, se ne trovano ancora delle altre (come indica il segno $+$) e ciò all'infinito, come è la natura dell'equazione (S), il cui secondo membro non ha mai fine. Quindi si vede la verità del già detto (129) che fin'ora almeno la relazione fra il diametro e la circonferenza non si può avere che prossimamente.

146. Trovato il valore di un arco, è facile aver quello di tutti gli altri con le sole prime operazioni dell' Aritmetica. Partendo dal numero dato quì sopra per il valore dell' arco di 180°, la sua metà sarà l'arco di 90°, il terzo quello di 60°, e così discorrendo. In tal modo fu composta la tavola utilissima (AA), che si troverà alla fine di quest'Opera, e dalla quale si ha con facilità in parti del raggio il valore d'ogni arco qualunque, il qual sia dato in gradi, minuti, secondi, e decime, centesime, &c.

Vogliasi, per esempio, con 7 decimali l'arco di $6° 22' 17'', 3$; si prenderanno successivamente nella tavola le quantità seguenti, con una o due decimali di più per aver la somma esatta.

L'arco di 6° =	0,104719755
20'	 5817764
2'	 581776
10″	 48481
7″	 33937
$\frac{3''}{10}$ ou 0″, 3	 1454
Arco di 6° 22' 17″, 3 ...	0,1112032

Ho preso la tavola (AA) dalla Raccolta preziosa del benemerito Lambert, (*Supplementa Tabul. Logarith. et Trigonometr.* Berlino, 1770); non però senza averla verificata per intiero, e corretti alcuni errorucci, quasi tutti nelle ultime note. Che se mai si volesse un arco con più decimali di quelle che sono date dalla tavola, converrà ricavarlo da quello di 180°, (145).

147. L'espressione dell' arco, avuta per via del seno, si trova col metodo stesso per mezzo della tangente. $\delta B =$ (II. 39°) δ tang.B cos.^{2}B = (I. 19°) $\frac{\delta \text{tang.B}}{1 + \text{tang.}^2 B} = \delta \text{tang.B} (1 + \text{tang.}^2 B)^{-1}$. Alzando alla potenza — 1 il binomio 1 + tang.^{2}B, moltiplicando ogni termine per δtang.B, integrando l' equazione (sarà bene esercitarsi in queste operazioni), e ponendo al solito A in luogo di B, si troverà la seguente equazione, che nomino (T):

$$(T) \ldots A = \text{tang.}A - \tfrac{1}{3}\text{tang.}^3 A + \tfrac{1}{5}\text{tang.}^5 A - \tfrac{1}{7}\text{tang.}^7 A + \&c.$$

Ma tang.45° = 1, (17); dunque

$$\text{arco di } 45° = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \&c.$$

Eulero trasforma questa serie in due altre assai più *convergenti*, senza di che sarebbe infinitamente più laboriosa della già data (145). Ma, come questi calcoli sono già fatti, le ometteremo. *Convergenti* si chiamano le serie decrescenti, e *divergenti* le serie crescenti. Quanto più rapida è nelle prime la diminuzione da un termine all' altro, tanto meno termini fa d' uopo calcolare per avere un valor molto prossimo al giusto.

Per esempio, per aver l'arco di 30° con sei decimali esatte convenne calcolar sette termini della serie (145). All'incontro per computare l'arco di 45° con sei decimali esatte per mezzo della serie trovata or ora, ci vorrebbe mezza la vita d'un uomo, essendo facile da conoscere che bisognerebbe calcolare 500000 termini per giungere ad uno, che avesse sei zeri dopo la virgola.

Si noti che l'espressione dell'arco per via di una serie contenente le potenze del coseno si ridurrebbe a quella (S) già trovata con le potenze del seno. In fatti $-\,\mathrm{d}\cos.B = \mathrm{d}B\,\mathrm{sen}.B$. Dunque $-\,\mathrm{d}B = \frac{\mathrm{d}\cos.B}{\mathrm{sen}.B} = \mathrm{d}\cos.B(1 - \cos.^2B)^{-\frac{1}{2}}$. Sviluppato il binomio, e fatta l'integrazione, si avrà $-\,B = \cos.B + \frac{\cos.^3B}{2.3} + \frac{3\cos.^5B}{2.4.5} + \&c.$, continuando i coefficienti e gli esponenti, come nella serie (S), (144). Per sapere cosa sia l'arco B negativo, osservo che ponendo, nell'equazione (S), $90° - B$ in vece di A, si ha $90° - B = \mathrm{sen}.(90° - B) + \frac{\mathrm{sen}.^3(90° - B)}{2.3} + \&c.$ la qual serie è la stessa che la precedente espressa in potenze del coseno, giacchè $\mathrm{sen}.(90° - B) = \cos.B$, (5). Dunque l'arco negativo in questo caso non è altro che quello che in vece di crescere da 0° a 90°, andrebbe da 90° a 0°, presa la sua origine a 90°, che è il punto corrispondente all'origine del coseno, e seguendo l'aumentazione del coseno positivo, che si fa da 90° a 0°.

Sia, per esempio, $B = 60°$, sarà $90° - B = 30°$, e però l'arco negativo di 60° non è altro in questo caso, che l'arco positivo di 30°.

Nello stesso modo si trova, che l'espressione dell'arco, per via di una serie contenente le potenze della cotangente, si riduce alla serie (T).

Il Sig. Jeaurat (*Mém. présentés à l'Académie des Sc. de Paris, Tom. IV. pag.* 527) dà senza dimostrazione le due serie seguenti;

$$A = 1 - \cos.A - \tfrac{1}{3}\cos.^3A - \tfrac{3}{40}\cos.^5A - \&c.\,,\ \text{e}$$
$$A = 1 - \cot.A + \tfrac{1}{3}\cot.^3A - \tfrac{1}{5}\cot.^5A + \&c.$$

Facendo A $= 90°$, ambe queste serie danno A $= 1, (34)$. Ma l'arco di $90° = 1, 57$; come si può vedere nella tavola (AA). Dunque ambedue queste serie sono false.

148. Le linee trigonometriche ci hanno servito a trovare il valore degli archi in parti del raggio. Vagliano ora questi archi espressi così a trovare a vicenda in parti del raggio il valore delle respettive loro linee trigonometriche. Questo si ottiene in modo egualmente ingegnoso, che semplice, il quale si chiama *Ritorno delle serie.* Data, per esempio, la serie (S), (144), nella quale l' arco A è espresso in potenze del seno, si dimanda il valore di sen. A espresso in potenze dell' arco. Tratteremo questa conversione, che è d' infinita utilità nelle matematiche, con ogni chiarezza e generalità, in favore di que' lettori che non ne fossero istrutti.

Sia dunque proposta la seguente equazione generale, che chiamo (P):

(P) . . . $m = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 +$ &c.

nella quale si suppone noto il valore di m, egualmente che quello dei coefficienti $a, b, c, d,$ &c; e si dimanda il valore di y.

Si converta la serie nella seguente, che chiamo (Q).

(Q)... $y = Am + Bm^2 + Cm^3 + Dm^4 +$ &c.

È indubitato che questo valore di y esiste in qualunque caso, poichè $A, B, C, D,$ &c. sono espressioni *indeterminate*, e però suscettibili ciascheduna d' ogni qualunque valore, che sia necessario, perchè l' equazione sia giusta. Si tratta dunque di definire, qual sia il valore che aver deve ciascuna delle dette *indeterminate*, perchè l'equazione abbia luogo. Non v'è cosa più facile e ammirabile insieme.

Poichè $y = Am + Bm^2 + Cm^3 +$ &c., s'innalzi questa equazione alle potenze seconda, terza, quarta, &c. separatamente, e si ordinino i prodotti facendo una colonna verticale al solito per ogni potenza di m, si avrà

$$\begin{array}{lllllll}
y & = Am & + Bm^2 & + Cm^3 & + Dm^4 & + Em^5 & + \&c. \\
y^2 & = \ldots\ldots & A^2m^2 & + 2ABm^3 & + 2ACm^4 & + 2ADm^5 & + \&c. \\
 & & & & + B^2m^4 & + 2BCm^5 & + \&c. \\
y^3 & = \ldots\ldots\ldots\ldots & & A^3m^3 & + 3A^2Bm^4 & + 3A^2Cm^5 & + \&c. \\
 & & & & & + 3AB^2m^5 & + \&c. \\
y^4 & = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & A^4m^4 & + 4A^3Bm^5 & + \&c. \\
y^5 & = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & A^5m^5 & + \&c. \\
\&c. & & & & & &
\end{array}$$

Si sostituiscano adesso questi valori di y, y^2, &c. nell' equazione (P) disponendo i termini con l'ordine stesso, e scrivendo per brevità le potenze di m solamente in testa d' ogni colonna verticale, sottintendendole ripetute ne' termini inferiori, si avrà

$$m = \left\{\begin{array}{lllllll}
ay & = aAm & + aBm^2 & + aCm^3 & + aDm^4 & + aEm^5 & + \&c. \\
+ by^2 & = \ldots\ldots & bA^2 & + 2ABb & + 2ACb & + 2ADb & + \&c. \\
 & & & + & B^2b & + 2BCb & + \&c. \\
+ cy^3 & = \ldots\ldots\ldots\ldots & & cA^3 & + 3A^2Bc & + 3A^2Cc & + \&c. \\
 & & & & & + 3AB^2c & + \&c. \\
+ dy^4 & = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & dA^4 & + 4A^3Bd & + \&c. \\
+ ey^5 & = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & eA^5 & + \&c. \\
+ \&c. & & & & & &
\end{array}\right.$$

Adunque, trasportando m, risulterà, $0 = m\,(aA - 1) + m^2\,(aB + bA^2) + m^3\,(aC + 2ABb + cA^3) +$ &c.

Bisogna che i valori di A, B, C, &c. sieno tali, che il secondo membro di questa equazione, continuato quanto si voglia, si riduca a zero. Questo è facile ad ottenersi; basta supporre, che i valori delle indeterminate siano tali, che riducano ogni termine a zero. Sia dunque $m\,(aA - 1) = 0$; sarà $mAa = m$, donde si cava $A = \frac{1}{a}$. Così facendo $m^2\,(aB + bA^2) = 0$, sarà $B = -\frac{bA^2}{a}$. Sostituendo il quadrato del valore di A trovato prima, si avrà $B = -\frac{b}{a^3}$. Col metodo stesso si troverà $C = \frac{2b^2 - ac}{a^5}$, $D = \frac{5abc - a^2d - 5b^3}{a^7}$, $E = \frac{14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e}{a^9}$; e così tutte le altre indeterminate,

indeterminate, finchè si vorrà continuare la serie. Sostituendo questi valori nell'equazione (Q), non resterà alcuna incognita nel secondo membro, e si avrà quel che si cerca, cioè il valore di $y = \frac{1}{a} m - \frac{b}{a^3} m^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^5} m^3 + \frac{5abc - a^2d - 5b^3}{a^7} m^4 + \&c.$

149. Esorto gli studiosi ad esercitarsi continuando le operazioni dell' articolo precedente, almeno fino alla nona potenza di m. Queste operazioni una volta fatte serviranno loro di formola generale per convertire ogni serie di qualunque forma. Facciamone l' applicazione al caso nostro. Comparando alla generale (P) l' equazione (S), (144), osservo che in quest' ultima mancano le potenze pari. Convien rendere simile l' equazione (P) a quella che è data da risolvere, il che è facile ad ottenersi, facendo eguali a zero nell' equazione (P) i coefficienti delle potenze che mancano nella proposta. Dunque nel caso nostro $b = 0$, $d = 0$, $f = 0$, &c. Ciò posto, si cerchi quel che divengano i valori già dati delle indeterminate nell' equazione (Q).

Abbiamo trovato 1°. $A = \frac{1}{a}$; questo valore sussiste. 2°. $B = -\frac{b}{a^3}$; ma $b = 0$, dunque $B = 0$. 3°. $C = \frac{2b^2 - ac}{a^5}$; ma $b = 0$, dunque $C = -\frac{ac}{a^5} = -\frac{c}{a^4}$. Seguendo così, si troverà che $D = 0$, $E = \frac{3a^2c^2 - a^3e}{a^9} = \frac{3c^2 - ae}{a^7}$, $F = 0$, $G = \frac{8ace - 12c^3 - a^2g}{a^{10}}$, &c. Ma, comparando all' equazione (P) la proposta (S), si ha, $a = 1$, $c = \frac{1}{2.3}$, $e = \frac{3}{2.4.5}$, $g = \frac{3.5}{2.4.6.7}$. Sostituendo questi valori, si trovano quelli delle indeterminate, $A = 1$, $C = -\frac{1}{2.3}$, $E = \frac{1}{2.3.4.5}$, $G = -\frac{1}{2.3.4.5.6.7}$, donde apparisce visibile il valore ed il segno delle susseguenti senza calcolarle. E poichè si ha in questo caso l' arco A in vece di m, e sen.A in vece di y, l' equazione (Q) diviene,

$$(W) \ldots \text{sen.A} = A - \frac{A^3}{2.3} + \frac{A^5}{2.3.4.5} - \frac{A^7}{2.3.4.5.6.7} + \&c.$$

Col mezzo di questa serie si potrà dunque calcolare con quante

decimali si voglia il seno d' ogni arco, prendendo il valore di questo nella tavola (AA).

Se in vece di A si pone 2A, la serie diviene, sen.2A $= 2A - \frac{8A^3}{2.3} + \frac{32A^5}{2.3.4.5} -$ &c. con che si vede facile il modo d' esprimer con questa sorte di serie le linee trigonometriche d'ogni arco moltiplice.

È pur facile da vedere, che se si volesse il seno di un arco, espresso da una serie delle potenze del coseno, o della cotangente, o della tangente dell' arco stesso, basterebbe ridurre in serie, col mezzo del binomio, le espressioni (I. 3ª, 4ª, 5ª); il qual cenno sarà sufficiente per far comprendere, come si possa avere qualunque linea trigonometrica espressa con le potenze di ogni altra. Questo lavoro è stato già fatto dal Sig. Jeaurat nella Memoria citata (147).

150. Si dia tosto la prova alla serie (W), cercando il seno di 30°, sul qual non possiamo esser ingannati, perchè ne sappiamo il valore esattamente (18). Per abbreviar la fatica singolarmente, additerò il modo seguente, che in generale è senza comparazione più comodo e breve della formola preparata da Eulero (*Introd. in Analys. infinit.* Tom. I. 134). Si esprima la serie così

(R) . . . Sen.A $= A - B + C - D + E$, &c.

Quindi si avrà, comparando la (R) alla (W),

$$B = A^2 \tfrac{1}{6} A \qquad C = A^2 \tfrac{1}{20} B$$

$$D = A^2 \tfrac{1}{42} C \qquad E = A^2 \tfrac{1}{72} D.$$

Si vede che basta calcolare una volta sola A^2, che è l' unica potenza di A, che resta attualmente in ogni termine; e che i divisori sono divenuti molto piccoli e comodi: ma ciò non è tutto. Dispongo questi quattro primi divisori verticalmente; prendo le prime e le seconde differenze; e, trovate queste ultime costanti, continuo le tre colonne secondo la legge scoperta, e andando da dritta a sinistra.

Divisori.	*Diff.* 1ª	*Diff.* 2ª
6		
	14	
20		8
	22	
42		8
	30	
72		8
	38	
110		8
	46	
156		8
	54	
210		

&c.

Al presente per continuare la nostra serie (R) non v'è più bisogno di moltiplicazione per formare i divisori nel valore de' termini successivi, F, G, H, &c. Le colonne formate quì sopra li forniscono agevolmente all' infinito per mezzo di semplici addizioni. Stia dunque avvertito chiunque si dedica al calcolo numerico, per indagare ove regnino differenze costanti, il che riesce di gran sollievo in molti casi.

151. Or suppongo che si voglia calcolare il seno di 30° con nove decimali. Prendo nella tavola (AA) l' arco di 30° con 10 decimali per maggior cautela, e ne formo il quadrato, per più speditezza, nel modo insegnato dagli Autori per la moltiplicazione delle frazioni decimali (veggansi gli Elementi delle Matematiche del Sig. Ab. Marie, *Paris* 1778, art. 79), cioè prendendo i fattori nel moltiplicatore da sinistra a dritta, e negligendo da dritta a sinistra nel moltiplicando una nota per il primo fattore, due note per il secondo, tre per il terzo, &c. tenendo conto però delle decine date dal prodotto d' ogni fattore per l'ultima nota negletta. Per non ingannarsi, si può punteggiar successivamente il fattore, e la nota, dalla qual si principia ogni moltiplicazione, come si vede

quì fatto per le due prime corrispondenti nel moltiplicatore e nel moltiplicando.

Formazione del quadrato dell' arco A.

$$
\begin{array}{r}
A = 0,\ 5235987756 \\
0,\ 5235987756 \\
\hline
0,\ 2617993878 \\
104719755 \\
15707963 \\
2617994 \\
471239 \\
41888 \\
3665 \\
367 \\
26 \\
3 \\
\hline
A^2 = 0,\ 2741556778
\end{array}
$$

Indi faccio col mezzo di successive addizioni del valore di A^2 con se stesso

$$
\left\{
\begin{array}{l}
2A^2 = 0,\ 5483113556 \\
3A^2 = 0,\ 8224670334 \\
4A^2 = 1,\ 0966227112 \\
5A^2 = 1,\ 3707783890 \\
6A^2 = 1,\ 6449340668 \\
7A^2 = 1,\ 9190897446 \\
8A^2 = 2,\ 1932454224 \\
9A^2 = 2,\ 4674011002
\end{array}
\right.
$$

La preparazione di questi moltiplici di A^2 renderà velocissimo il calcolo della serie (R). Si avranno occasioni continue (cioè in tutti i casi, ove si abbia a impiegar molte volte un fattore costante) di profittare della grande utilità di questa operazione; che è tanto semplice, e che non avevo veduta indicata in alcun libro, quando la usai, ma che ho poi trovata in Eulero (*Calc. diff. Pars II.* 96).

Per avere il valore di B bisogna moltiplicare il valore di A^2 per

quello di $\frac{1}{6}$ A = o , 0872664626. Ma , poichè abbiamo già il valore di A^2 moltiplicato separatamente per ciascuno dei nove caratteri dell' aritmetica , ne segue che i suoi prodotti per ciascuna delle note componenti il valore di $\frac{1}{6}$ A sono pronti , nè occorre se non disporli nel luogo loro per prenderne poi la somma. Per non ingannarsi , si può punteggiare ogni nota nel valore di $\frac{1}{6}$ A , a misura che si scrivono , come quì sotto , i prodotti corrispondenti.

$$
\begin{array}{rr}
0,08A^2 = & 0,0219245422 \\
0,007A^2 = & 0,0019190897 4 \\
0,0002A^2 = & 0,0000548311 4 \\
0,00006A^2 = & 0,0000164493 4 \\
\&c. & 164493 \\
 & 10966 \\
 & 1645 \\
 & 55 \\
 & 16 \\
\hline
B = & 0,0239245962
\end{array}
$$

Ora dividendo B per 20 , si avrà poi , nella stessa maniera per via di addizione , la moltiplicazione di A^2 per $\frac{B}{20}$, il che darà $C = 0,0003279532$. Col medesimo metodo si troverà, sempre più prestamente, il valore di D e di E. Ecco i termini positivi separati dai negativi.

$$
\begin{array}{ll}
A = 0,5235987756 & -B = 0,0239245962 \\
C = 0,0003279532 & -D = 0,0000021407 \\
E = 0,0000000082 & \quad -0,0239267369 \\
\hline
+0,5239267369, & \text{somma de' termini positivi.} \\
-0,0239267369, & \text{somma de' termini negativi.} \\
\hline
\end{array}
$$

Onde sen.30° = o, 500000000, a tenor della verità (18).

Si vede quanta sia l' esattezza delle serie, che abbiamo formate col mezzo del calcolo differenziale ed integrale, e per via del *Ritorno*. Se si prendesse l' arco di 30° con tutte le 127 decimali, con cui può ottenersi dividendo per 6 l' arco di 180° dato (145), e se si calcolassero tanti termini della serie (R) continuata con le regole indicate (150), quanti occorrono per aver sen. 30° con 127 decimali, sempre si troverà, che la somma de' termini si riduce a 0, 5; negligendo soltanto la centoventisettesima nota, o la sua susseguente, che non può esser mai giusta, perchè la serie va all' infinito, onde deve sempre restar qualche cosa, che sarebbe distrutta dai termini susseguenti, i quali lascierebbero in appresso, dovunque il calcolo si sospenda, un altro resto più piccolo, avvicinandosi perpetuamente all' infinitesimo senza giungervi mai, perchè i nostri numeri sono incapaci di pervenire ad una espressione infinitamente piccola (133).

152. Le serie (144, 149) presentate nel modo seguente offrono due espressioni della differenza fra l' arco e il seno:

$$A - \text{sen.}A = \frac{\text{sen.}^3 A}{2.3} + \frac{3\,\text{sen.}^5 A}{2.4.5} + \&c.$$

$$A - \text{sen.}A = \frac{A^3}{2.3} - \frac{A^5}{2.3.4.5} + \&c.$$

Donde si vede che se l'arco è infinitamente piccolo, l'errore che si commette, prendendolo in vece del seno, consiste in infinitesimi di terzo ordine, di quinto ordine, &c.

Se si pone in entrambe le equazioni $\frac{1}{2}$ A in luogo di A, (128), e se poi si moltiplica l' una e l' altra per 2, si avrà la differenza dall' arco alla corda (19) in ciascuna delle due seguenti equazioni:

$$A - 2\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}A = \frac{\text{sen.}^3 \frac{1}{2}A}{3} + \frac{3\,\text{sen.}^5 \frac{1}{2}A}{4.5} + \frac{3.5\,\text{sen.}^7 \frac{1}{2}A}{4.6.7} + \&c.$$

$$A - 2\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}A = \frac{A^3}{2.3.2^2} - \frac{A^5}{2.3.4.5.2^4} + \frac{A^7}{2.3.4.5.6.7.2^6} - \&c.$$

Prendendo gli archi nella tavola (AA) si potrebbero dunque calcolar facilmente le corde, con quante decimali si voglia, per mezzo dell' ultima serie.

153. Le equazioni generali (P) e (Q) servirebbero a convertire la serie (T) delle potenze della tangente (147), come si è fatto di quella delle potenze del seno. Ma, per conseguire più semplici le espressioni delle indeterminate, e spinger la serie fino alla nona potenza, onde avere una formola comoda in casi simili, faremo

$$(P') \ldots m = ay + cy^3 + ey^5 + gy^7 + iy^9 + \&c.$$
$$(Q') \ldots y = Am + Cm^3 + Em^5 + Gm^7 + Im^9 + \&c.$$

Quindi, per le vie tenute (148), si avrà

$$m = \left\{ \begin{array}{llllll} ay = aAm + & aCm^3 + & aEm^5 + & aGm^7 + & aIm^9 & + \&c. \\ + cy^3 = \ldots\ldots\ldots & cA^3 & + 3cA^2C & + 3cA^2E & + 3cA^2G & + \&c. \\ & & & + 3cAC^2 & + 6cACE & + \&c. \\ & & & & + cC^3 & + \&c. \\ + ey^5 = \ldots\ldots\ldots & & eA^5 & + 5eA^4C & + 5eA^4E & + \&c. \\ & & & & + 10eA^3C^2 & + \&c. \\ + gy^7 = \ldots\ldots\ldots & & & gA^7 & + 7gA^6C & + \&c. \\ + iy^9 = \ldots\ldots\ldots & & & & iA^9 & + \&c. \\ + \&c. & & & & & \end{array} \right.$$

Si ricaveranno, come si fece (148), i valori delle indeterminate A, C, E, &c. espressi in a, c, e, &c. Indi si sostituiranno in luogo di a, c, e, &c. i valori numerici, che sono somministrati dall' equazione (T), la qual comparata alla (P') dà $a = 1$, $c = -\frac{1}{3}$, $e = \frac{1}{5}$, &c. Ridotti così in numeri i valori di A, C, E, &c. se ne farà la surrogazione nell' equazione (Q'), e ponendo l' arco A in vece di m, e tang. A in vece di y, si troverà

$$(U) \ldots \text{Tang.} A = A + \frac{A^3}{3} + \frac{2A^5}{3.5} + \frac{17A^7}{3.5.7.3} + \frac{62A^9}{3.5.7.9.3} + \&c.$$

Cercheremo fra poco una legge per continuar questa serie senza altro calcolo.

Intanto si osservi che, se l'arco sia infinitamente piccolo, e si faccia tang. A = A, gli altri termini trascurati non sono che infinitesimi di terzo ordine, di quinto ordine, &c.

154. Se si divide con le regole dell' algebra la serie (W) (149) per la (U), si troverà

$$(Y) \ldots \text{Cos.} A = 1 - \frac{A^2}{2} + \frac{A^4}{2.3.4} - \frac{A^6}{2.3.4.5.6} + \frac{A^8}{2.3.4.5.6.7.8} - \&c.$$

La legge è manifesta per continuar questa serie; e per servirsene a calcolare un coseno speditamente, si userà il metodo tenuto (150, 151). Col mezzo di essa e della precedente si potrà dunque calcolare il coseno, e la tangente di un angolo qualunque, con quante decimali si vogliano, prendendo l'arco nella tavola (AA).

Si avverta che, le serie di questo genere essendo più convergenti quanto l'arco è più piccolo, se si vuol, per esempio, il seno di un arco maggiore di 45°, gioverà meglio cercarlo computando il coseno del suo complemento per mezzo della serie (Y). Così se si chiede il coseno di un arco maggiore di 45° s'impiegherà di preferenza la serie (W).

Dalla serie (Y) si cava l'espressione seguente del seno verso (4):

$$1 - \cos.A = \frac{A^2}{2} - \frac{A^4}{2.3.4} + \frac{A^6}{2.3.4.5.6}, \&c.,$$

dalla quale si vede che se A è infinitamente piccolo, l'errore che si commette facendo il coseno eguale al raggio, consiste in infinitesimi di secondo ordine, di quarto ordine, &c.

Se l'arco A è negativo, non per questo viene a mutarsi alcun segno nella serie (Y) come tutta composta di potenze pari di A. All'incontro se si fa A negativo nelle equazioni (S), (144), e (U), (153), tutti i segni saranno cangiati. Da ciò deduco la regola seguente, di molta utilità. *Il seno*, *la tangente* (e per conseguenza *la cotangente*) *di un arco negativo sono negativi, il coseno di un arco negativo è positivo:* di maniera che, in tutti i casi, il seno, la tangente e la cotangente di un arco negativo hanno un segno contrario a quello che prescrive la tavola (42), mentre il coseno conserva lo stesso segno che gli vien dato in essa tavola.

155. La ricerca de' termini consecutivi della serie (U) col mezzo delle indeterminate diviene laboriosissima di più in più a misura che crescono le potenze. Si può ottenere la medesima serie con molto minor fatica dividendo la (W) per la (Y), giacchè è manifesta la legge per continuar queste due a piacere. Ma anche la divisione è tediosa, e quindi ho pensato di profittare del metodo additato da Eulero

Eulero per ridurre ad una serie infinita ogni sorte di funzioni frazionarie, tanto finite quanto infinite. (Si chiama *funzione* d' una quantità variabile, per esempio dell'arco A nel caso nostro, ogni espressione analitica composta, in qualunque maniera, di essa variabile e di quantità costanti). Esprimendo con lettere i coefficienti dell' arco A nelle tre serie, si ha

$$\frac{(W)\ldots A - bA^3 + cA^5 - dA^7 + \&c.}{(Y)\ldots 1 - \beta A^2 + \gamma A^4 - \delta A^6 + \&c.} = (U)\ldots A + BA^3 + CA^5 + DA^7\ \&c.$$

Si moltiplichi l'equazione per la serie (Y) ordinando i termini per rispetto alle potenze di A, scritte una volta sola in testa delle colonne verticali, come facemmo (148, 153); si avrà

$$\begin{array}{rcrrrr}
A - bA^3 + cA^5 - dA^7 + \&c. & = & A & + BA^3 & + CA^5 & + DA^7 + \&c. \\
 & & & -\beta & -\beta B & -\beta C - \&c. \\
 & & & & +\gamma & +\gamma B + \&c. \\
 & & & & & -\delta - \&c.
\end{array}$$

E trasportando il primo membro,

$$\begin{array}{rrrrrrr}
0 = & A & + BA^3 & + CA^5 & + DA^7 & + EA^9 & + \&c. \\
 & & -\beta & -\beta B & -\beta C & -\beta D & - \&c. \\
 & & & +\gamma & +\gamma B & +\gamma C & + \&c. \\
 & & & & -\delta & -\delta B & - \&c. \\
 & & & & & +\varepsilon & + \&c. \\
 & -A & +b & -c & +d & -e & + \&c.
\end{array}$$

Dunque, facendo al solito che ogni colonna verticale si riduca a zero, si avrà

$$\begin{array}{l}
B = \beta - b \\
C = -\gamma + c + \beta B \\
D = \delta - d + \beta C - \gamma B \\
E = -\varepsilon + e + \beta D - \gamma C + \delta B
\end{array}$$

Osservando, come procedono le colonne verticali, diviene facile adesso il continuar senza calcolo queste equazioni contenenti i valori, che si cercano, de' coefficienti successivi della serie (U). Si avrà, per esempio,

$$F = \zeta - f + \beta E - \gamma D + \delta C - \varepsilon B$$
$$G = -\eta + g + \beta F - \gamma E + \delta D - \varepsilon C + \zeta B$$
&c.

Sostituendo i numeri, riducendo tutte le frazioni al massimo denominatore, e la somma delle frazioni all'espressione più semplice, si troverà

$$F = \frac{1382}{3^2 . 5^2 . 7 . 9 . 11}, \ G = \frac{21844}{3^3 . 5^2 . 7 . 9 . 11 . 13}, \ H = \frac{929569}{3^3 . 5^2 . 7^2 . 9 . 11 . 13 . 15}, \text{\&c.}$$

Si faccia ora, a similitudine di ciò che si fece (150),

$$\text{tang.A} = \text{A} + B' + 2C' + 17D' + 62E' + 1382F' + 21844G' + 929569H' + \text{\&c};$$ e si avrà

$$B' = \text{A}^2 \tfrac{1}{3} \text{A} \qquad F' = \text{A}^2 \tfrac{1}{55} E'$$
$$C' = \text{A}^2 \tfrac{1}{5} B' \qquad G' = \text{A}^2 \tfrac{1}{39} F'$$
$$D' = \text{A}^2 \tfrac{1}{21} C' \qquad H' = \text{A}^2 \tfrac{1}{105} G'$$
$$E' = \text{A}^2 \tfrac{1}{9} D' \qquad \text{\&c.}$$

Si calcoleranno i volori di B', C', D', &c. nella maniera che ho additata (151), ed il calcolo di una tangente sarà abbreviato quanto è possibile. Passiamo a quello della cotangente.

156: $\text{Cot.A} = \frac{\text{cos.A}}{\text{sen.A}}$. Sostituendo a $\frac{\text{cos.A}}{\text{sen.A}}$ le serie $\frac{(Y)}{(W)}$, come sono espresse (155), si avrà

$$\text{cot.A} = \frac{1 - \beta\text{A}^2 + \gamma\text{A}^4 - \delta\text{A}^6 + \varepsilon\text{A}^8 - \text{\&c.}}{\text{A} - b\text{A}^3 + c\text{A}^5 - d\text{A}^7 + e\text{A}^9 - \text{\&c.}}$$

Ora applicando a questa equazione il metodo Euleriano adoperato quì sopra per la tangente, si eguagli questa espressione frazionaria della cotangente ad una serie coi coefficienti indeterminati, come segue

$$\frac{1 - \beta\text{A}^2 + \gamma\text{A}^4 - \delta\text{A}^6 + \text{\&c.}}{\text{A} - b\text{A}^3 + c\text{A}^5 - d\text{A}^7 + \text{\&c.}} = \frac{1}{\text{A}} + B\text{A} + C\text{A}^3 + D\text{A}^5 + \text{\&c.}$$

Moltiplicando l'equazione per il denominatore del primo membro, ordinando, e trasportando il numeratore, si avrà

$$
o = \left\{
\begin{array}{lllllll}
1 + BA^2 + & CA^4 + & DA^6 + & EA^8 + & FA^{10} + & \&c. \\
-b & -bB & -bC & -bD & -bE & -\&c. \\
& +c & +cB & +cC & +cD & +\&c. \\
& & -d & -dB & -dC & -\&c. \\
& & & +e & +eB & +\&c. \\
& & & & -f & -\&c. \\
-1+\beta & -\gamma & +\delta & -\varepsilon & +\zeta & -\&c.
\end{array}
\right.
$$

Facendo ogni colonna verticale eguale a zero, si avrà

$$
\begin{aligned}
B &= \quad b - \beta \\
C &= -c + \gamma + bB \\
D &= \quad d - \delta + bC - cB \\
E &= -e + \varepsilon + bD - cC + dB \\
&\&c.
\end{aligned}
$$

Queste equazioni sono facili a continuarsi senza calcolo come le altre consimili (155).

Prendendo nelle serie (W), (Y), i coefficienti numerici corrispondenti alle lettere b, c, &c., β, γ, &c., si troveranno i valori di B, C, D, &c., che sostituiti nella serie $\frac{1}{A} + BA + CA^3 +$ &c. $=$ cot.A secondo l' ipotesi, daranno l' equazione seguente:

$$
(Z)\ldots\ \text{cot.A} = \frac{1}{A} - \frac{A}{3} - \frac{A^3}{3^2.5} - \frac{2A^5}{3^3.5.7} - \frac{A^7}{3^3.5^2.7} - \frac{2A^9}{3^3.5.7.9.11} - \frac{1382A^{11}}{3^4.5^3.7^2.9.11.13} - \frac{4A^{13}}{3^4.5^2.7.9.11.13} - \&c.
$$

Indi fingendo cot.A $= \frac{1}{A} - B' - C' - 2D' - E' - F' - 691\,G' - H' -$ &c., si avrà

$$
\begin{array}{ll}
B' = A \times \frac{1}{3} & F' = A^2 \frac{10}{99} E' \\
C' = A^2 \frac{1}{15} B' & G' = A^2 \frac{1}{6825} F' \\
D' = A^2 \frac{1}{21} C' & H' = A^2 \frac{2}{195} F' \times A^2 \\
E' = A^2 \frac{1}{5} D' & \&c.
\end{array}
$$

Ho tirato il valore di H' da F' piuttosto che da G', per aver

l'espressione più semplice. La quantità $F' \times A^2$ si tiene già pronta nel calcolo fatto per aver G'.

È facile da vedere che la serie (Z) è molto più convergente, e più comoda al calcolo di quel che sia la (U), (153, 155). Si vedrà (366) che in generale se si cerca la tangente di un arco maggiore di 32°, giova meglio computare la cotangente del suo complemento (7), per mezzo della serie (Z).

CAPITOLO VI.

Delle tavole trigonometriche in numeri naturali.

157. Il valore delle linee trigonometriche non può ottenersi che prossimamente, da pochissime in fuori, come le eguali al raggio, alla sua metà, &c. Questo non è già un difetto del metodo delle serie infinite, che abbiamo composto nel Cap. precedente. I metodi geometrici usati dagli antichi non danno il valore delle linee trigonometriche, se non per via di radici sorde, come sono, (43), (44), $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, e simili; ed è noto che non è possibile avere queste radici esattamente, per quanto si spinga innanzi l'estrazione, e che solo l'errore diviene sempre minore, con quante più decimali si esprima il valore cercato.

Le linee trigonometriche sono state calcolate, altre con 10, altre con 15 note. Bisognano 12 decimali, supponendo $R = 1$, per avere con precisione i minuti secondi, e le decime di secondo, dai seni degli angoli sommamente prossimi al retto, o sia dai coseni degli angoli estremamente piccoli. Ciò nonostante le tavole più comuni sono ridotte a 7 decimali, perchè più comode all'uso, e sufficienti in esattezza nella più parte de' casi. Contengono i seni, tangenti, e secanti, di minuto in minuto, da 0° a 90°, e per conseguenza i coseni, le cotangenti, e le cosecanti (5, 7). Queste tavole servono

pure pegli archi maggiori di 90°,(35). È ammirabile veramente la pazienza di coloro, che le hanno fabbricate per vie penosissime, senza i preziosi soccorsi del calcolo differenziale, e di tante formole, che si sono trovate in appresso. Diviene ora inutile l'esposizione di que' metodi faticosi; ed in vece, perchè questo Trattato sia più completo, suppongo due casi: 1°. che in certi calcoli delicati si desideri, come accade talvolta, qualche linea trigonometrica con più note di quelle, che uno abbia dalle tavole che possiede: in tal caso le vie più spedite saranno quelle che abbiamo additato nel precedente capitolo; 2°. che si vogliano calcolar nuove tavole con più note di quel che sia stato fin'ora fatto; e per questo propongo il seguente metodo speditissimo.

Se nelle formole (II. 22ª, 23ª) si pone nA in luogo di A, e $(n-2)A$ in luogo di B, si avranno le due seguenti

$$\text{sen.}nA = \text{sen.}(n-2)A + 2\,\text{sen.}A\ \cos.(n-1)A$$

$$\cos.nA = \cos.(n-2)A - 2\,\text{sen.}A\ \text{sen.}(n-1)A$$

Sia ora A = 1°, e si calcolino, con le serie (W), (Y), (molto convergenti in tal caso), e coi modi additati nel capitolo precedente, il seno e il coseno di 1°, ma con 3 o 4 decimali di più, di quelle che vogliono mettersi nella tavola, affinchè in essa l'ultima nota risulti esatta quanto è possibile. Si raddoppj il seno di 1°, indi si scrivano sotto a questo seno così raddoppiato il suo duplo, il triplo, &c. fino al nonuplo, come facemmo per A^a, (151). Ciò fatto dico, che il calcolo di una tavola de' seni, di grado in grado, è ridotto a pure addizioni, e sottrazioni, e che il fabbricarla (quand'anche fosse a 28 decimali, quante ne contengono le formole preparate da Eulero (*Introd. in Analys. Infinit.* Tom. I. 134), che certo sarebbero molto più laboriose (169) del metodo nostro seguente) diviene tenue fatica di non molte ore, dove coi metodi tenuti dagli antichi forse non basterebbe un mese, impiegato nelle più disgustose e pesanti operazioni dell'Aritmetica.

Di fatti conoscendo il seno e il coseno di 1° si trovano il seno

e il coseno di 2°, facendo $n = 2$ nelle nostre formole date quì sopra, le quali si convertono nelle due seguenti già cognite

$$\text{sen.}2^\circ = \text{sen.}0^\circ + 2\,\text{sen.}1^\circ\,\text{cos.}1^\circ = 2\,\text{sen.}1^\circ\,\text{cos.}1^\circ$$

$$\text{cos.}2^\circ = \text{cos.}0^\circ - 2\,\text{sen.}1^\circ\,\text{sen.}1^\circ = 1 - 2\,\text{sen.}1^\circ\,\text{sen.}1^\circ$$

Parlando della prima; per avere il seno di 2° bisogna dunque moltiplicare $2\,\text{sen.}1^\circ$ per $\text{cos.}1^\circ$. Ma abbiamo $2\,\text{sen.}1^\circ$ moltiplicato già per ciascuno dei nove caratteri della nostra aritmetica. Non occorre dunque altro, se non che il disporre questi prodotti, secondo richiedono l'una dopo l'altra le note componenti il coseno di 1° (veggasi l'esempio nella moltiplicazione fatta (151) di A^2 per $\frac{1}{6}A$); prendendo la somma di questi prodotti così disposti, si avrà il seno di 2°. Similmente, per la seconda formola, se si dispongono gli stessi prodotti secondo richiedono le note componenti il seno di 1°, che è il moltiplicatore di 2 sen. 1°, presa la somma, e sottratta dall'unità, si avrà il coseno di 2°. Se dunque nelle nostre formole generali si pongano in luogo di n i numeri successivi 3, 4, 5, &c. fino a 30, si avranno col metodo stesso tutti i seni e coseni, di grado in grado, perfino a 30° con somma facilità. Imperciocchè si osservi 1°. che il seno o coseno cercato, cioè il seno o coseno di nA, si trova sempre per mezzo de' seni e coseni calcolati prima, poichè nA è l'arco maggiore in ciascuna delle formole: 2°. che, qualunque sia il valore di n, il fattore $2\,\text{sen.}A$ è costante; sicchè preparati una volta i prodotti separati di questo fattore per ciascun de' caratteri dell' aritmetica, come si è detto, non restano più che addizioni e sottrazioni da fare per comporre la tavola. Le formole date quì hanno più vantaggi sopra quelle analoghe (124), che abbiamo formate sulle tracce di Eulero, come sarà facile il riconoscerlo a chiunque ne faccia esperimento.

Dissi di spingere il calcolo fino a 30° solamente, poichè i restanti seni e coseni si deducono velocissimamente dai già calcolati, per via di semplice sottrazione, mediante la formola (I. 15°), $\text{sen.}(60^\circ - A) = \text{sen.}(60^\circ + A) - \text{sen.}A = \text{cos.}(30^\circ - A) - \text{sen.}A$, (5).

Facendo A successivamente eguale, in progressione aritmetica, a 1°, 2°. . . 29°, si avranno col mezzo di questa formola tutti i seni da 30° a 60°. Ora quelli da 60° a 90° non sono altra cosa che i coseni già noti da 0° a 30°. Dunque la tavola de' seni e coseni di grado in grado per tutto il quadrante sarà compita.

158. Vogliansi ora formare i seni e coseni di minuto in minuto. Facendo $A = 1'$, le formole e metodi stessi serviranno; ma quando si saranno riempiti i due o tre primi gradi, si potrà abbreviar la fatica, prendendo le prime differenze, le seconde, le terze, &c. fin che si ritrovino le costanti, ed allora fatto il calcolo per alcuni de' primi minuti ad ogni grado, ad ogni due gradi, &c. secondo il calcolatore conoscerà spediente, saranno riempiti i vacui con gran prestezza mediante il soccorso delle differenze costanti (150). Arrivando ai seni e coseni calcolati prima di grado in grado, si avrà una prova se l'interpolazione dà il giusto. Per maggior cautela converrà bensì prender le differenze fra seno e seno contigui, come pur fra coseno e coseno, con una decimale di più di quelle che si pongono nella tavola.

159. Il calcolo delle tangenti non si piega alle stesse facilità, che abbiamo proposto per quello de' seni. Ben esaminate le formole date fin' ora dagli Autori, mi sembra che niuna sia tanto utile a diminuir la fatica, quanto la nuova, (I. 43°). Allorchè le tangenti siano calcolate fino a 45°, si avranno tutte le altre, per via di pura addizione, col mezzo di essa formola convertita come segue, $\text{tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}A) = 2\ \text{tang.}A + \text{tang.}(45^\circ - \frac{1}{2}A)$. All' incontro, se si considerano quelle (69, 113), che sono state date fin' ora, si vedrà che bisogna calcolare fino a 30°, non solo le tangenti, ma anco le cotangenti, per poter poi servirsene a trovar tutte le altre.

Non so che sia stato per anco trovato alcun mezzo per evitare la divisione nel computo delle tangenti fino a 45°. Nella formola preparata da Eulero con 13 decimali osservo che occorrono molte divisioni, il complesso delle quali mi sembra più laborioso che il calcolo della formola (I. 31°). Non saprei però suggerire niente di

meglio della formola stessa, avvertendo solo che per avere l'ultima nota possibilmente giusta, conviene impiegare i seni e coseni, come saranno stati già calcolati, cioè con due o tre note di più di quelle che vogliono mettersi nella tavola. La divisione si abbrevia in modo analogo a quello, che abbiamo fatto vedere per il moltiplico formando il quadrato di A, (151). Se ne troverà un esempio (163).

160. Calcolate le tangenti, si hanno le secanti, per via di pura addizione, mediante una o l'altra delle formole (I. 9°, 10°), solchè si rammenti che cosec. $= \frac{1}{\text{sen.}}$, (24). Si avrà dunque cosec.A $= \frac{\text{cot.} \frac{1}{2} \text{A} + \text{tang.} \frac{1}{2} \text{A}}{2} =$ cot.A + tang.$\frac{1}{2}$A.

161. Veduto il modo per costruire le tavole, o per calcolare di sbalzo una linea trigonometrica, convien dir due parole dell' operazione inversa. Suppongo che per risultato di un calcolo si abbia una linea trigonometrica espressa con più note di quelle che siano nelle tavole, e che si voglia sapere l' esatta misura dell' arco al quale essa linea corrisponda. Fuori de' casi enunziati (pag. 60), le tavole comuni a 7 decimali sono sufficienti a far conoscere un arco con tutta l'esattezza, di cui si può aver bisogno nella pratica. Data dunque un'espressione con più decimali, si negligeranno quelle che sono dopo la settima, e si avrà dalle tavole l'angolo cercato. Ma ne' casi d'aver l' espressione del seno di un arco prossimo a 90°, o del coseno di un angolo piccolissimo, converrà aver ricorso alla serie (S), (144). L'espressione data si porrà nella stessa serie in luogo di sen.A, e si calcoleranno tanti termini, quanti saranno necessarj per avere con precisione il valore dell' arco A, ovvero di (90° — A) caso che l'espressione fosse di un coseno. Per abbreviare il calcolo, sia sen.A $= a$; facendo alla maniera già veduta più volte,

$$\text{A} = a + \frac{B}{3} + \frac{C}{5} + \frac{D}{7}, \text{ \&c., si avrà}$$

$$B = a^2 \tfrac{1}{2} a \qquad D = a^2 \tfrac{5}{6} C$$

$$C = a^2 \tfrac{3}{4} B \qquad \text{\&c.}$$

La

La legge dell' ultima serie, e quella de' coefficienti numerici nel valore di B, C, D, &c. è manifesta. Si tratterà a^2 come abbiam fatto di A^2, (151), e quando si sarà trovato il valore di A, si cercherà nella tavola (AA) a quanti gradi, minuti, secondi, &c. corrisponda.

A risparmio di simili fatiche in molti casi, gioverà l' esser provveduto delle utilissime Tavole Trigonometriche dell' illustre Sig. Abate Toaldo, Professore d'Astronomia nell' Università di Padova.

162. Supponendo da questo punto che i miei lettori siano forniti di tavole, il che è indispensabile nello studio e nella pratica della trigonometria, gli esorto ad esercitarsi dando la prova alle serie (con pochi termini, per non perdervi molto tempo), e alle formole contenute in questo e nel precedente Capitolo. In testa alle tavole si trovano ordinariamente le istruzioni per farne uso: noi però aggiungeremo due avvertimenti necessarj.

In primo luogo, le linee trigonometriche sono presentate ordinariamente nelle tavole, come proporzionali ad un raggio di 100000 parti. Di fatti in molti casi si possono trascurare le due ultime note, che restano separate dal punto, o dalla virgola, sotto forma di decimali (noi faremo sempre uso della virgola, perchè il punto è anche segno di moltiplicazione). Ma, qualunque sia stata la ragione di dar le tavole in questo modo, ciò non deve causare il minimo imbarazzo, se si rammentano le regole (25). La serie (149) derivata da formole, in cui fu supposto $R = 1$, dà, per esempio, $\text{sen.}8° = 0,1391731$. Sia $R' = 100000$, sarà (25), $\text{sen.}'8° = R' \text{sen.}8° = 13917,31$: così è nelle tavole. In pratica giova prendere i numeri dalle tavole sotto la forma corrispondente alla supposizione di $R = 1$, il che è facile con avanzar la virgola di cinque note a sinistra; e noi faremo sempre così, perchè si risparmia ne' calcoli ogni attenzione al raggio, il che far non si potrebbe senza gravi errori, se s' impiegassero le linee trigonometriche sotto la forma data dalle tavole.

163. Il secondo avvertimento è questo. Quando le differenze

fra i valori delle linee trigonometriche, da un minuto all' altro, camminano equabilmente, o con poco divario, si può far uso della regola aurea per trovare le parti proporzionali corrispondenti ai minuti secondi, decime, &c. Ma se le differenze sono ineguali notabilmente, come si può vedere nelle tangenti da 73° a 90°, la regola suddetta non dà più il giusto. Un esempio farà intender la cosa. Si dimanda la tang. di 85° 7′ 25″.

Nelle tavole si ha tang. $\begin{cases} 85^\circ\ 8' = 11{,}7447786 \\ 85^\circ\ 7' = 11{,}7045003 \end{cases}$

Differenza. 0,0402783

Se tale è la differenza della tangente, per 1′ o sia per 60″ di differenza nell'arco, qual sarà la differenza della tangente, per 25″ di differenza nell' arco? Questa è la regola ordinaria che dà 60″ : 25″ : : 0,0402783 : $x = \frac{25 \times 0{,}0402783}{60} = 0{,}0167826$

Aggiungi 11,7045003 = tang. 85° 7′

Si ha 11,7212829 per il valore di tang. 85° 7′ 25″.

Questa operazione suppone visibilmente che le variazioni delle linee trigonometriche siano proporzionali a quelle degli archi per un piccolo cangiamento di 1′. Ciò in fatti è sempre vero pe' seni, nelle tavole a 7 decimali solamente. Ma non è così per le tangenti. Nel caso nostro,

$$\text{tang.}85^\circ\ 7' - \text{tang.}85^\circ\ 6' = 0{,}0400050$$
$$\text{tang.}85^\circ\ 9' - \text{tang.}85^\circ\ 8' = 0{,}0405545$$

Comparando queste differenze con quella di mezzo trovata di sopra, 0,0402783, si vede che procedono con notabile disuguaglianza, della quale non tenendosi conto nella proporzione impiegata, il suo risultato non può esser giusto. In tal caso convien ricorrere alla formola rigorosa (II. 32ª) che, per 25″ di variazione nell' arco, dà $\delta \text{tang.}85^\circ 7' = \frac{\text{sen.}25''}{\cos.85^\circ\ 7'\ \cos.85^\circ\ 7'\ 25''}$. Ecco il calcolo.

Si hà dalle tavole cos.$85^\circ 7' = 0,0851271$

La regola aurea dà cos.$85^\circ 7' 25'' = 0,0850063$

$$\text{Moltiplicazione} \left\{ \begin{array}{r} 0,00681017 \\ 42563 \\ 51 \\ 3 \end{array} \right.$$

Dunque cos.$85^\circ 7' \times$ cos.$85^\circ 7' 25'' =$ | $0,00723634$, *divisore.*

Sen.$25'' = 0,00012120342$, *dividendo.* | $0,01674927$, *quoziente*

$$\begin{array}{r} 4884002 \\ 542198 \\ 35654 \\ 6709 \\ 196 \\ 51 \\ 0 \end{array}$$

Nella divisione ora fatta a tenor della formola, si osserverà che, per avere con esattezza l'ultima nota del quoziente, ho cominciato, solamente dalla terza nota effettiva di esso dopo la virgola, a negligere nella moltiplicazione le unità del prodotto di essa nota per l'ultima del divisore. Indi per la quarta nota del quoziente ho trascurato il suo prodotto per l'ultima del divisore, e le unità del prodotto per la penultima. Per la quinta del quoziente, il prodotto per le due ultime del divisore, e le unità del prodotto per l'antepenultima, e così in progresso; punteggiando successivamente ogni nota del divisore, a misura che fu adoperata nel moltiplico. Questo è il metodo insegnato dagli Autori per abbreviare la divisione quando si tratta di frazioni decimali, analogo a quello indicato (151) per abbreviar la moltiplicazione. Per avere il quoziente esatto con sette decimali, ne ho preso due di più nel dividendo che nel divisore, non contando i primi zeri dell' uno e dell' altro. Abbiamo tratto il valore del detto dividendo, o sia di sen.$25''$ dalla tavola (AA), giacchè si può prender l'arco in luogo del seno, allorchè l'arco è molto piccolo; e se quest' arco non eccede un minuto, si possono avere almen dieci decimali

esattissime, come è facile di riconoscere calcolando sen. 1′ per mezzo della serie (W), (149). Tutto questo avvertito per intelligenza dell' operazione, si esamini adesso il risultato.

Si ha dunque δ tang. 85° 7′ =	0,0167493
Aggiungi tang. 85° 7′ =	11,7045003
La formola rigorosa dà tang. 85° 7′ 25″ =	11,7212496
Si trovò per la regola aurea	11,7212829
Errore della regola del tre	0,0000333

Si conchiuda che, quando si vogliano con esattezza le tangenti degli archi da 73° a 90°, convien cercare la parte proporzionale, per li minuti secondi, col mezzo della formola differenziale (II. 32ª). S'impiegherà l'altra formola (II. 33ª) per le cotangenti da 0° a 17°.

È cosa chiara che, se la tangente sia data, e si cerchi l' arco, a cui corrisponde; la formola (II. 32ª) da calcolarsi per avere i minuti secondi, decime, &c. prende l'aspetto seguente, sen. δB, o vero δB = δ tang. B cos. B cos. (B + δB). Facciamone l' applicazione al medesimo esempio, cercando l' arco a cui corrisponde la tangente 11,7212496. Cerco nelle tavole la più prossima, che trovo essere la tang. 85° 7′ = 11,7045003 = tang. B. Prendo la differenza fra queste due tangenti, ed ho δ tang. B = 0,0167493. La moltiplico per cos. B = cos. 85° 7′. Questo prodotto che chiamo P si deve moltiplicare per cos. (B + δB). Ma perchè δB è ignoto, si trascuri per ora, e si adoperi cos. B; il che viene ad esser lo stesso che se s'impiegasse la formola (II. 39ª) in vece della (II. 32ª). Facendo il calcolo, si troverà δB = $P \times$ cos. B = 0,0001213 75. Cercando nella tavola (AA) l'arco più prossimo in meno a questo valore di δB, trovo esser quello di 20″, che sottratto dal detto valore di δB lascia di resto 0,000024412. Trovo nel modo stesso che questo resto corrisponde ad un arco di 5″, e che resta encora 0,000000171. Per avere il valore di questo secondo resto in

decimali di minuto secondo, prendo nella tavola stessa l'arco di $1'' = 0{,}0000048{,}48$, e dico

$$0{,}0000048{,}48 : 1'' :: 0{,}000000171 : x'' = 0'',028$$

Dunque $\delta B = 25'',028$. E però l'errore causato dall' avere impiegato cos.B in luogo di cos.$(B + \delta B)$ non giunge a tre centesime di un minuto secondo. Pur se si volesse andare a tutto rigore, dopo aver trovato $\delta B = 25''$ prossimamente, si rifarebbe l'ultima moltiplicazione impiegando cos.$(B + 25'')$ in vece di cos.B, e si avrebbe $\delta B = P \times \cos.85^\circ\ 7'\ 25'' = 0{,}000121202 = 25''$ esattamente. In generale, si può sempre impiegare, senza error sensibile, in questa operazione la formola (II. 39ª), in vece della (II. 32ª). Non così nell'operazion precedente, quando si voglia la tangente con esattezza, altrimenti tanto varrebbe il far uso della regola del tre. In fatti se si fa detta operazione con la formola (II. 39ª), si troverà tang.$85^\circ\ 7'\ 25'' = 11{,}7212258$, cioè più piccola del giusto di $0{,}0000238$.

Si chiamano *Tavole Trigonometriche in numeri naturali* quelle, delle quali abbiamo parlato in questo Capitolo. Un tal nome serve a distinguerle dalle altre, di cui passiamo a trattare.

CAPITOLO VII.

Delle Tavole Trigonometriche in logaritmi.

164. NON c'è lode, nè gratitudine, che basti per onorar la memoria del Barone Nepero Scozzese, inventore de' logaritmi, poichè l'utilità loro nelle Matematiche è grande oltre ogni espressione. È uffizio dell'Algebra l'indicar la teoria, sulla quale sono fondati, e gli ammirabili servizj che prestano. Io per altro sarò costretto d'inserir quì molte parti di questa dottrina, le quali mi sono ne-

cessarie per trattare completamente della costruzione delle tavole trigonometriche in logaritmi.

Chiamando c la caratteristica de' logaritmi, si sa che $c+1$ è la quantità delle note del numero intiero corrispondente ad un logaritmo. Quindi 0,301030 è il logaritmo di 2; e 2,301030 è il logaritmo di 200. Nel primo caso $c=0$, dunque il numero deve avere una sola nota, 2. Nel secondo caso $c=2$, dunque il numero deve avere tre note, e diviene 200. Secondo questa regola, bisognerebbe che la caratteristica de' logaritmi delle frazioni decimali fosse, per così dire, minore di zero, cioè negativa (16). Tratteremo soltanto de' logaritmi delle frazioni decimali, giacchè a queste si possono ridur tutte le altre.

I logaritmi delle frazioni decimali possono esprimersi in tre diverse maniere. Sia, per esempio, la frazione $0{,}75=\frac{75}{100}$. Secondo la teoria de' logaritmi, $\log.\frac{75}{100}=\log.75-\log.100=1{,}87506-2{,}00000$, non prendendo per brevità se non cinque decimali. Se si fa la sottrazione nel modo ordinario, si ha $\log.\frac{75}{100}=-0{,}12494$. Ma questo metodo, quantunque legittimo, è affatto sbandito dai Matematici, a cagione de' gravi incomodi de' logaritmi negativi. Il principale si è, che il numero corrispondente ad un logaritmo negativo non si può aver dalle tavole, se non come denominatore di una frazione, che ha per numeratore l'unità. Quindi ogni diverso logaritmo negativo dà un denominatore diverso, e così si hanno frazioni, che non hanno il vantaggio che godono le frazioni decimali, cioè d'essere immediatamente comparabili fra loro.

La seconda maniera adoperata da qualche Autore consiste nell'eseguire la sottrazione fra le sole caratteristiche, come segue; $\log.\frac{75}{100}=1{,}87506-2{,}00000=-1+0{,}87506$, che scrivono anche così: $\bar{1}{,}87506$. Questa maniera è spedita, ma pure non è la più usitata, poichè obbliga a scrivere il segno negativo, e ad usar attenzione per non ingannarsi in due operazioni contradittorie, cioè di sommare le decimali, e sottrarre le caratteristiche. Ecco un

esempio di questa maniera: avendo trovato il log. di $\frac{75}{100}$, suppongo che or venga richiesto per logaritmi il prodotto di $12 \times \frac{75}{100}$.

$$\begin{aligned} \log. 12 &= 1,07918 \\ \log. \tfrac{75}{100} &= \overline{1},87506 \end{aligned}$$

Onde $\log.(12 \times \frac{75}{100}) = \log. 9 = 0,95424$

Tale è in fatti il log. di 9 nelle tavole. Avverto solo, che alcuni Autori, fra' quali il Sig. Ab. Toaldo, omettono la virgola fra la caratteristica e le decimali.

165. Vengo alfine alla terza maniera, che sembra più generalmente abbracciata. Siccome non è mai possibile in alcun calcolo qualsivoglia di prendere uno sbaglio di diecimila milioni, così non v'è rischio ad aggiungere 10 alla caratteristica, quante volte può far di bisogno per averla sempre positiva. Però nell' esempio proposto se si fa $\log. \frac{75}{100} = 11,87506 - 2,00000$ si avrà $\log. 0,75 = 9,87506$. Ma secondo la regola generale (164), $9,87506 = \log. 7500000000$. Dunque perchè questa promiscuità di caratteristiche induca in errore, bisognerebbe prendere in fallo settemila cinquecento milioni in vece di $\frac{75}{100}$, o sia di $\frac{3}{4}$ dell' unità; il che è impossibile.

Se si osserva che $9,87506 = 10 - 0,12494$, se ne conchiiderà 1°. che è facile convertire in positivo ogni log. negativo (164); 2°. che la caratteristica del logaritmo di una frazione decimale è sempre minore di 10.

Adottando che sia $\log. 0,75 = 9,87506$; per le stesse ragioni sarà $\log. 0,075 = \log. \frac{75}{1000} = 8,87506$; e parimente $\log. 0,0075 = \log. \frac{75}{10000} = 7,87506$; e così in progresso. Donde si prenda per regola, che *i logaritmi delle frazioni decimali hanno per caratteristica il compimento a 9 del numero de' zeri, che stanno dopo la virgola nella frazione data.*

Da questa regola segue che, quando si ha il logaritmo d'una frazione decimale, convien cercar nelle tavole il numero, a cui corrisponde il logaritmo dato, senza tener conto della caratteris-

tica. Dipoi si metterà avanti il numero trovato un zero seguito dalla virgola, e da tanti zeri, quante unità mancano alla caratteristica per esser eguale a 9. Tutto ciò sarà facile ad intendere, per poco che si rifletta agli esempj precedenti e ai seguenti.

166. Abbiamo detto che la caratteristica d'una frazione decimale è sempre minore di 10. Quindi ne segue che *nelle addizioni de' logaritmi delle frazioni decimali non si deve tener conto delle decine nella caratteristica della somma.* Sopprimendo le decine succederà, che se il logaritmo di una somma deve esser quello d'un numero intiero, la caratteristica sarà esatta e senza aumentazione; e se deve esser quello d'una frazione, la caratteristica sarà conforme alla regola (165). Per esempio, vogliasi per logaritmi il prodotto di $24 \times 0,75$; si avrà

$$\begin{array}{rl} \log. 24 = & 1,38021 \\ \log. 0,75 = & 9,87506 \\ \hline \text{somma} & 11,25527 \end{array}$$

Nel far la somma si negligano le decine, e si scriva solamente 1,25527. Ecco distrutto l'error risultante dalla regola (165), poichè questo è il logaritmo esatto di $18 = 24 \times 0,75$.

Si cerchi ora il prodotto di $0,75 \times 0,4$.

$$\begin{array}{rl} \log. 0,75 = & 9,87506 \\ \log. 0,4 = & 9,60206 \\ \hline \text{somma} & 19,47712 \end{array}$$

Negligendo le decine, si scrive solamente 9,47712; donde si vede subito, che la caratteristica denota una frazione decimale, secondo la regola data (165), e che il logaritmo trovato è quello di $0,3 = 0,75 \times 0,4$.

167. Sia dunque preso per regola di trascurar sempre le decine nella caratteristica. Così, per esempio, nell'elevare a potenze le frazioni decimali, poichè il quadrato di 0,4 è 0,16, sarà $2 \log. 0,4 = 19,20412$; questo logaritmo si scriverà 9,20412, e sarà conforme alla

alla regola (165). Volendo per logaritmi il cubo di 0,4, che è 0,64, si avrà 3 log.0,4 = 28,80618, e si scriverà 8,80618. Si noti che per la seconda potenza si è negletta una decina nella caratteristica, per la terza due decine; per la quarta se ne avrebbero tre da negligere, e così discorrendo. Ne viene che per l'estrazione delle radici, che è l'operazione inversa, convenendo supplire queste decine neglette, altrimenti il calcolo sarebbe pessimo, la regola per supplirle sarà di scrivere o sottintendere $m - 1$ decine avanti la caratteristica, detto m l'esponente del radicale. Sicchè per la radice quadra si supplirà una decina; per la radice cubica due decine; e così successivamente. Vogliasi per mezzo de' logaritmi la radice cubica di 0,064; il suo logaritmo, secondo la regola (165), è 8,80618; prima di dividerlo per 3, si suppliscano due decine alla caratteristica, scrivendo, o supponendo scritto 28,80618; il quoziente della divisione 9,60206 sarà il logaritmo di $0,4 = \sqrt[3]{0,064}$.

Mi sono diffuso alquanto sui logaritmi delle frazioni decimali, a cagione dell'uso continuo che se ne fa nella Trigonometria. Le tangenti fino a 45°, e tutti i seni, non sono altra cosa che frazioni decimali, ponendo R = 1. Le caratteristiche de' loro logaritmi si vedranno però, nelle tavole, conformi alla regola (165). Per le tangenti degli archi maggiori di 45° alcune tavole impiegano le caratteristiche, 10, 11, &c. In queste tavole le linee trigonometriche non sono considerate in parti di R = 1, ma in parti di R = 10000000000. Nel prendere i logaritmi da queste tavole, io trascurerò la decina costantemente in tutti gli esempj, attenendomi sempre alla sola e più comoda supposizione di R = 1.

168. Le tavole trigonometriche in logaritmi sono state calcolate con 15 note da Briggs per ogni centesima di grado (*Trigonometria Britannica*, Goudæ, 1633), e con undici note, di 10 in 10 secondi, da Ulacq (*Trigonometria artificialis. . . . . ab* Adriano Ulacco. . . . Goudæ, 1633). Queste tavole, ora divenute rarissime, sono state ridotte ad otto note da Gardiner, la cui edizione data in

Londra nel 1742 è stata ristampata in molte parti. Esse contengono ancora i logaritmi de' numeri fino al 100000, e per mezzo delle parti proporzionali si prendono agevolmente fino al milione: queste sono le più adottate generalmente. Il librajo Jombert ne ha dato di fresco in Parigi un'edizione portatile, fatta con grande accuratezza, e nella quale i logaritmi, e le loro differenze sono state disposte dal Sig. Callet in una maniera sommamente comoda. Nelle tavole date dal celebre Sig. Abate Toaldo si hanno i logaritmi de' numeri fino al 10800, il che è sufficiente nella maggior parte de' casi.

Persuaso dell'importanza di aver delle tavole senza errori, ho verificato, nota per nota, quelle portatili comodissime, stampate in Parigi (*chez Desaint*, 1768). Questa edizione è smaltita; ma ho stimato far cosa utile e grata ai possessori di queste tavole, e a quelli che potranno procurarsele in avvenire, nelle continue vendite che si fanno in Parigi delle Biblioteche private, di pubblicare in fine di quest' Opera la lista di tutti gli errori delle medesime tavole.

Or supponendo, come abbiam fatto per le linee trigonometriche in numeri naturali, che s' abbia mestieri, in certi casi, de' loro logaritmi con più note di quelle che uno abbia dalle tavole che possiede, o vero che si volessero costruir nuove tavole con più note di quel che sia stato fin' ora fatto; passerò a rintracciare i mezzi più espediti per conseguire l'intento.

169. Eulero (*Introd. in Analys. infinit.* Tom. I, 194) per vie molto laboriose, ma sempre dotte, ha preparato, con 20 decimali in ogni termine, due serie, che danno il logaritmo iperbolico (171) del seno e del coseno d'un angolo qualunque nominato generalmente $\frac{m}{n}\,90°$, senza che vi sia bisogno di conoscere il valore delle dette linee in numeri naturali. Queste serie sono molto convergenti, e potrebbero esser di utilità nella costruzion d'una tavola. Soffrono per altro a mio credere gl' incomodi seguenti. 1°. Chi volesse averle con più di 20 decimali, spenderebbe forse tanta fatica

a prepararle seguendo i principj di Eulero, quanta a costruire la tavola stessa de' logaritmi di grado in grado, per le vie che saranno da noi proposte. 2°. Queste serie suppongono cogniti con tante note, con quante si vorranno far gli altri calcoli, i logaritmi de' numeri m, n, $n - m$, $n + m$, $2n - m$, e $2n + m$. Bisogna dunque formare per ogni seno e coseno espressamente ciascuno di questi logaritmi, se non si hanno dalle tavole con tante decimali, con quante si bramano. 3°. Ogni termine delle serie di Eulero è espresso in decimali, che devono esser moltiplicate, come segue; il primo termine per $\frac{m^2}{n^2}$, il secondo per $\frac{m^4}{n^4}$, il terzo per $\frac{m^6}{n^6}$, e così seguitando. Si cerchi, per esempio, il log. del seno di 43°, sarà $\frac{m}{n}\, 90° = 43°$, e però $\frac{m}{n} = \frac{43}{90}$. Si osservi però qual fatica occorre per elevare questa frazione alle potenze pari, seconda, quarta, sesta, &c. indi per fare il moltiplico di ognuna di queste potenze col suo termine corrispondente espresso in decimali. Sarebbe comodo in vero il fare uso di queste serie per gli archi, che sono parti aliquote di 90°; per esempio, per l' arco di 45° si ha $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$; per l'arco di 18°, $\frac{m}{n} = \frac{1}{5}$, e simili; ma questi sono ben pochi. Al contrario si chieda di sbalzo il log. del seno di un arco espresso in gradi, minuti, secondi, e decime, sicchè sia, per esempio, $\frac{m}{n}\, 90° = 43° \; 17' \; 17'', 7$. Bisognerà ridurre ambi gli archi in decime, e si avrà $\frac{m}{n} = \frac{43° \, 17' \, 17'', 7}{90°} = \frac{155837'', 7}{324000'', 0}$. Sono superflui i riflessi sopra le smisurate operazioni che questa frazione richiederebbe. Il medesimo incomodo ha luogo nelle serie date da Eulero per il calcolo delle linee trigonometriche in numeri naturali.

170. Le esposte difficoltà, e la mia inclinazione a dar formole generali, che siano applicabili ad ogni arco di qualunque valore, intiero o frazionario, che non presentino un numero limitato di decimali, nè suppongano cognita altra cosa che l' arco, mi servirono di sprone a far molti tentativi; ma non avendo ottenuto fiu' ora

che delle serie men convergenti di quelle contenute nel Cap. V, stimo, generalmente parlando, la via più breve quella di dedurre i logaritmi delle linee trigonometriche dal loro valore trovato prima in numeri naturali. Però le facilità, che sono per porgere, serviranno in generale ad agevolare il calcolo de' logaritmi de' numeri. Ma come non tutti i libri d'Algebra elementare additano le belle formole, che sono state inventate per la rapida costruzione de' logaritmi; contentandosi di spiegar l'uso di essi, ed i principj su cui è fondata la sola specie de' logaritmi comuni: così penso di farle conoscere a' miei lettori, che non ne fossero istrutti.

PROBLEMA. *Dato un numero, trovare il suo logaritmo.*

La seguente soluzione è cavata in gran parte dagli Elementi del Sig. Ab. *Marie* citati (151).

Sia $(1+x)$ il numero dato, $(1+z)$ un altro numero qualunque, e sia $a^m=(1+x)$, e $a^n=(1+z)$. Secondo le nozioni elementari di questa teoria, m è il logaritmo di $(1+x)$, n quello di $(1+z)$; a si chiama *la base* de' logaritmi, mentre è chiaro che ogni valore diverso di a induce cangiamento ne' valori di m, e di n, e costituisce un *sistema* diverso di logaritmi. Ma le equazioni precedenti danno $a^{mn}=(1+x)^n=(1+z)^m$, donde si cava $1+z=(1+x)^{\frac{n}{m}}$. Questa equazione fa vedere, che fra i logaritmi di due numeri regna una ragione costante in qualunque sistema; sicchè il logaritmo m di un numero $(1+x)$ basta per fissare il valore del logaritmo n d'ogni altro numero qualsivoglia $(1+z)$. Posta questa dipendenza reciproca, se si finge $\log.(1+x)=Mx+Nx^2+Px^3+Qx^4+\&c.$, e $\log.(1+z)=Mz+Nz^2+Pz^3+Qz^4+\&c.$ e se combinando queste due equazioni con la precedente si perviene a ricavare un valore delle indeterminate M, N, P, &c.; questo valore soddisferà ad entrambe le equazioni, e il problema sarà risolto con facilità.

Di fatti l'equazione $1+z=(1+x)^{\frac{n}{m}}$ dà (facendo per bre-

vità $\frac{n}{m} = r$), log. $(1 + z) = r$ log. $(1 + x)$. E però, sostituendo i valori finti di sopra, $Mz + Nz^2 + Pz^3 + \&c = r(Mx + Nx^2 + Px^3 + \&c.)$. Or si ponga nel primo membro il valore di z preso dall' equazione $1 + z = (1 + x)^r$, svolgendo quest' ultimo binomio con la formola Neutoniana, il che dà $z = rx + \frac{r(r-1)}{2} x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{2.3} x^3 + \&c.$ Fatta la sostituzione, si divida per r, e si trasportino da una parte sola tutti i termini, ordinandoli al solito relativamente alle potenze di x; si avrà

$$o = \left\{ \begin{array}{lllll} Mx + M\frac{r-1}{2}x^2 & + M\frac{(r-1)(r-2)}{2.3}x^3 & + M\frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{2.3.4}x^4 & + \&c. \\ + Nr & + Nr(r-1) & + N\frac{r(r-1)(r-2)}{3} & + \&c. \\ & & + N\frac{r(r-1)^2}{4} & + \&c. \\ & + Pr^2 & + 3P\frac{r^2(r-1)}{2} & + \&c. \\ & & + Qr^3 & + \&c. \\ -M - N & - P & - Q & - \&c. \end{array} \right.$$

Quindi eguagliando a zero ogni colonna verticale secondo i principj esposti (148), si ha 1°. $M - M = o$, ciò che nulla produce. 2°. $M\frac{r-1}{2} + Nr - N = o$, donde si cava $N = -\frac{1}{2}M$. Sostituendo questo valore di N nella terza colonna, si ha $P = \frac{1}{3}M$; la quarta dà $Q = -\frac{1}{4}M$. Continuando le operazioni, si avrebbe dalla quinta $R = \frac{1}{5}M$, e così successivamente. Dunque ponendo questi valori di N, P, Q, &c. nell' equazione log. $(1 + x) = Mx + Nx^2 + \&c.$, si avrà la seguente

(A)... log. $(1 + x) = M\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \&c.\right)$

171. Si osservi in prima, che un medesimo numero, come $(1 + x)$, può avere un' infinità di logaritmi diversi, secondo il diverso valore che dar si voglia all' indeterminata M, che quindi si dice il *modulo*. Il sistema più semplice è quello nel qual si pone $M = 1$. I logaritmi calcolati su tale ipotesi si chiamano logaritmi

naturali, o sia logaritmi *iperbolici*, a cagion del loro uso nella quadratura dell' iperbola.

172. Si osservi inoltre che per avere il logaritmo di 1 bisogna porre $x = 0$. Ma in tal caso il secondo membro dell' equazione (A) si riduce a zero. Dunque *in tutti i sistemi immaginabili*, $\log. 1 = 0$.

173. Se si chiama I il logaritmo iperbolico di un numero qualunque, T il logaritmo del medesimo numero in un altro sistema, e S la somma della serie ($x - \frac{1}{2}x^2 +$ &c.) sarà $I = S$, e $T = MS = MI$. Dunque *moltiplicando il logaritmo iperbolico di un numero per il modulo di un altro sistema, si avrà il logaritmo del numero stesso nel detto sistema.*

Ma si ha pure $I = \frac{T}{M}$; dunque *dividendo un logaritmo di qualunque sistema per il modulo del detto sistema, si avrà il logaritmo iperbolico corrispondente.*

174. Non è facile da intendere, come l'equazione (A) possa dare il logaritmo di un numero qualunque, quando non occorre che x sia di molto più grande dell' unità, perchè la serie sia divergente. Per rinvenire un rimedio utile, si facciano per avere il log. di $(1 - x)$ tutte le operazioni che abbiamo fatte per aver quello di $(1 + x)$, e si troverà

(B)... $\log.(1 - x) = M(-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 -$ &c.)

Si sottragga adesso l'equazione (B) dalla (A), e riflettendo che $\log.(1 + x) - \log.(1 - x) = \log. \frac{1+x}{1-x}$, secondo le prime nozioni de' logaritmi, si avrà

(C)... $\log. \frac{1+x}{1-x} = 2M\,(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 +$ &c.)

Or si voglia, per esempio, il logaritmo iperbolico di 2. Risolvendo l'equazione $\frac{1+x}{1-x} = 2$, si troverà $x = \frac{1}{3}$, e però, rammentando (171) che $M = 1$,

$$\log.2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \text{\&c.}\right)$$

È agevole da conoscere, che questa serie è senza comparazione più convergente, che se si facesse $x = 1$ nella (A). Ma avanti di seguitare le applicazioni, si finisca la preparazion delle formole.

175. La differenziazione de' logaritmi per ogni sorte di differenze finite si trova facilmente col mezzo delle formole precedenti. Se un numero qualunque n riceve un aumento δn, si dimanda qual sia l'aumentazione corrispondente di log. n. Il quesito sarà contenuto ed espresso nell'equazione seguente, $\log. n + \delta \log. n = \log. (n + \delta n)$, donde si cava, $\delta \log. n = \log. (n + \delta n) - \log. n = \log. \frac{n + \delta n}{n} = \log. \left(1 + \frac{\delta n}{n}\right)$. Riducendo in serie questa ultima espressione per mezzo della formola (A), con far $\frac{\delta n}{n} = x$, risulta

$$\text{(D)} \ldots \delta \log. n = M \left(\frac{\delta n}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta n}{n}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\delta n}{n}\right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{\delta n}{n}\right)^4 + \&c. \right)$$

Questa è la formola differenziale data dagli Autori: della quale si prende solamente il primo termine $\frac{\delta n}{n}$ per le differenze infinitesime.

Se n diminuisce in vece di crescere, il suo logaritmo deve pure farsi minore. Allora si ha $\log. (n - \delta n) - \log. n = - \delta \log. n$. Il primo membro si riduce a $\log. \left(1 - \frac{\delta n}{n}\right)$, e col mezzo della formola (B) si ha

$$\text{(E)} \cdots - \delta \log. n = M \left(- \frac{\delta n}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta n}{n}\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\delta n}{n}\right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{\delta n}{n}\right)^4 - \&c. \right)$$

Ma formole molto più convergenti otterremo noi, le quali potranno utilmente tener luogo di tutte le precedenti.

Si faccia $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n + \delta n}{n}$, donde si cava $x = \frac{\delta n}{2n + \delta n}$. Sostituendo questi valori nell' equazione (C), e ponendo, come quì sopra, $\delta \log. n$ in vece di $\log. \frac{n + \delta n}{n}$, si avrà

$$\text{(F)} \cdots \delta \log. n = 2M \left(\frac{\delta n}{2n + \delta n} + \frac{1}{3} \left(\frac{\delta n}{2n + \delta n}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{\delta n}{2n + \delta n}\right)^5 + \&c. \right)$$

Questa nostra serie è senza comparazione più convergente che la (D) per calcolare la differenza da un logaritmo noto ad un altro più grande. Se si parte dalla supposizione che $\log. n = \log. 1 = 0$; (172), la stessa serie (F) sarà convergente quanto la (C) per calcolare *immediatamente* il logaritmo intiero di un numero qualunque.

Quando δn è negativo, vedemmo tale pur essere $\delta \log. n$; per il che l'equazione (F) si cangia nella seguente:

$$(G) \ldots -\delta \log. n = 2M\left(-\frac{\delta n}{2n-\delta n} - \frac{1}{3}\left(\frac{\delta n}{2n-\delta n}\right)^3 - \frac{1}{5}\left(\frac{\delta n}{2n-\delta n}\right)^5 - \&c.\right)$$

Così si sarebbe trovato, sottraendo la (A) dalla (B), e facendo $\frac{1-x}{1+x} = \frac{n-\delta n}{n}$.

Questa nostra serie è parimente molto più convergente che la (E) per calcolare la differenza in meno da un log. noto ad un altro più piccolo. Partendo dalla supposizione che $\log. n = \log. 1$, la stessa serie (G) servirà a calcolare immediatamente il log. intiero negativo (164, 165) di una frazione decimale qualunqne.

Or si faccia un primo saggio della grande e generalissima utilità di queste due formole (F), (G).

176. Poichè la (F) dà la differenza da $\log. n$ a $\log. (n + \delta n)$, questa formola servirà a costruire una tavola de' logaritmi de' numeri con maravigliosa prestezza. Per esempio, essendosi trovata (174) una serie spedita per calcolare il log. iperbolico di 2 (la formola (F) la darebbe egualmente, facendo $n = 1$ e $\delta n = 1$), si ha pure il log. di 4, giacchè $\log. 4 = \log. 2^2 = 2 \log. 2$. Avendo il log. di 4, si calcola in pochi minuti il log. di 5, il quale ha costato più giorni d'intollerabile fatica ai primi inventori de' logaritmi, che non conoscevano alcuna delle formole precedenti. In tal caso $n = 4$, $\delta n = 1$, e però la (F) diviene

$$\delta \log. 4 = 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \&c.\right)$$

Quattro soli termini di questa serie bastano per ottener quella quantità

quantità che bisogna aggiungere a log. 4, per avere il log. iperbolico di 5 con 7 decimali esatte. Questo logaritmo aggiunto a quello di 2 dà log. 10 $= 2,302585 +$.

177. Diviene ora facile il conoscere il modulo de' logaritmi *tabulari*, o sia *volgari* (così si chiamano quelli delle tavole comuni). Si sa che in questo sistema log. 10 $= 1$. Dunque se nell' equazione $T = MI$, (173), si fa $T = 1$, sarà I il log. iperbolico di 10, (176); e con 25 decimali, $I = 2,3025850929940456840179914 = \frac{1}{M}$. L' ultima equazione dà $M = 0,4342944819032518276511289$. Moltiplicando per questo numero un log. iperbolico, si ha il tabulare corrispondente; e moltiplicando per il numero precedente, o sia per $\frac{1}{M}$, un log. tabulare, si ha l'iperbolico corrispondente, (173).

178. Si nomina la *base* di un sistema quel numero, il cui logaritmo è 1. Di fatti nell' equazione fondamentale $a^m = 1 + x$ abbiamo fatto (170), $m = \log.(1 + x)$. Ma la stessa equazione fondamentale dà pure $m \log. a = \log.(1 + x)$. Dunque $\log. a = 1$. E però 10 è la base del sistema ordinario, o sia del sistema di Briggs, che fu il primo calcolatore delle tavole comuni. Troveremo (179) la base de' logaritmi iperbolici, o sia del sistema di Neper. Quello di Briggs sembra il più comodo, che possa immaginarsi, a cagione che, per mezzo di un facile cangiamento nella sola caratteristica, il logaritmo di un numero serve costantemente al medesimo numero benchè moltiplicato o diviso per qualsivoglia potenza di 10. Sappiamo (164) che, per esempio, il log. di 2 è pure il log. di 20, di 2000, di 0,02, &c. solchè si accresca, o si diminuisca la caratteristica convenevolmente. Non hanno tal comodo i logaritmi iperbolici.

179. *Dato un logaritmo, trovare il numero, a cui corrisponde.* Questo problema si scioglie facilmente, dividendo per M l' equazione (A), (170), indi convertendola col metodo del Ritorno delle Serie (148). Sia dunque $(1 + x)$ il numero cercato, e si faccia per

L

brevità $\frac{\log.(1+x)}{M} = y$, l'equazione (A) convertita darà $x = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{2.3} + \frac{y^4}{2.3.4} +$ &c. e per conseguenza il numero cercato $(1+x) = 1 + y + \frac{y^2}{2} +$ &c. Dunque in generale per un numero qualunque n si avrà

$$(\text{H})\ldots n = 1 + \left(\frac{\log.n}{M}\right)^1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\log.n}{M}\right)^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{\log.n}{M}\right)^3 + \frac{1}{2.3.4}\left(\frac{\log.n}{M}\right)^4 + \&c.$$

Se in questa serie si suppone $\log.n = 1$, e $M = 1$, il valore di n sarà (178) la base de' logaritmi iperbolici. Si ha dunque $n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} +$ &c. Calcolando si troverà $n = 2,7182818284590452353 6028$. Questo numero è di grande uso nel calcolo integrale.

180. Paragonando la formola (D) con la generale (P), (148), si ha $\frac{\delta\log.n}{M} = m$, $\delta n = y$, $\frac{1}{n} = a$, $-\frac{1}{2n^2} = b$, e così discorrendo. Con questi valori di a, b, c, &c., si troveranno quelli di A, B, C, &c., nella formola (Q), (148), e la serie (D) convertita sarà

$$(\text{K})\ldots \delta n = n\left(\frac{\delta\log.n}{M} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta\log.n}{M}\right)^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{\delta\log.n}{M}\right)^3 + \&c.\right)$$

Convertendo similmente la (E), ma facendo ben attenzione ai segni, giacchè in questo caso $m = -\frac{\delta\log.n}{M}$, $y = -\delta n$, i coefficienti a, b, c, &c. conservando gli stessi segni che nell' operazion precedente, si troverà

$$(\text{L})\cdots -\delta n = n\left(-\frac{\delta\log.n}{M} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta\log.n}{M}\right)^2 - \frac{1}{2.3}\left(\frac{\delta\log.n}{M}\right)^3 + \&c.\right)$$

Questa formola può anche dedursi a colpo d' occhio dall' antecedente (K), considerando che quando δn è negativo, cioè quando si passa da un numero maggiore ad un minore, $\delta\log.n$ deve pur essere negativo, ma il suo segno convien che si cangi nelle potenze pari, secondo le prime regole dell' Algebra.

181. Finita la costruzion delle formole, gioverà preparare, nel

modo che ho immaginato e mostrato (151), i fattori M e $\frac{1}{M}$, de' quali si ha bisogno continuo per passare dai logaritmi iperbolici ai tabulari, e viceversa.

Prendendo i valori (177), si ha dunque

$M =$	0,43429	44819	03251	82765	11289
$2M =$	0,86858	89638	06503	65530	22578
$3M =$	1,30288	34457	09755	48295	33867
$4M =$	1,73717	79276	13007	31060	45156
$5M =$	2,17147	24095	16259	13825	56445
$6M =$	2,60576	68914	19510	96590	67734
$7M =$	3,04006	13733	22762	79355	79023
$8M =$	3,47435	58552	26014	62120	90312
$9M =$	3,90865	03371	29266	44886	01601

182. Similmente

$\frac{1}{M} =$	2,30258	50929	94045	68401	79914
$\frac{2}{M} =$	4,60517	01859	88091	36803	59828
$\frac{3}{M} =$	6,90775	52789	82137	05205	39742
$\frac{4}{M} =$	9,21034	03719	76182	73607	19656
$\frac{5}{M} =$	11,51292	54649	70228	42008	99570
$\frac{6}{M} =$	13,81551	05579	64274	10410	79484
$\frac{7}{M} =$	16,11809	56509	58319	78812	59398
$\frac{8}{M} =$	18,42068	07439	52365	47214	39312
$\frac{9}{M} =$	20,72326	58369	46411	15616	19226

183. Mediante queste preparazioni, la conversione de' logaritmi volgari in iperbolici, e viceversa, è ridotta a pure addizioni. Si cerchi, per esempio, il logaritmo iperbolico di 10,09. Prendo il tabulare corrispondente (con 8 decimali, se si può, per aver la settima più esatta): esso è 1,00389117. Disponendo nel luogo loro

i prodotti di $\frac{1}{M}$ moltiplicato per ciascuna delle note componenti questo logaritmo, ho come segue

$$\begin{array}{rr} \frac{1}{M} = & 2{,}30258509 \\ \frac{0{,}003}{M} = & 690776 \\ \frac{0{,}0008}{M} = & 184207 \\ \text{\&c.} & 20723 \\ & 230 \\ & 23 \\ & 16 \\ \hline \text{Somma} & 2{,}3115448 = \log. 10{,}09. \end{array}$$

Questa operazione mi par tanto breve, da poter essere non di rado preferita anche per la formazione de' logaritmi de' numeri composti. Del resto il benemerito Lambert nell' Opera citata (146) ha dato una tavola de' numeri primi, ed un' altra utilissima che somministra il fattore minimo d'ogni numero composto fino a 100000; e si sa che, sommando insieme i logaritmi de' fattori di un numero, si ha il logaritmo di esso numero.

184. Or si osservi in questo medesimo esempio la gran convergenza della serie (F), (175). Non fa bisogno di calcolare che il solo primo termine di essa per aver giusta, fino alla settima ed anche ottava decimale, la quantità che si deve aggiungere a 2,3105532, log. di 10,08, per formare il log. di 10,09. In questo caso $n = 10{,}08$, e $\delta n = 0{,}01$. Dunque prendendo il solo primo termine della serie (giacchè il secondo avrebbe nove zeri dopo la virgola, onde non influisce nelle sette prime decimali), sarà

$$\begin{array}{rl} \delta \log. n = 2 \times \frac{0{,}01}{20{,}17} = & 0{,}0009916 \\ \log. 10{,}08 = & 2{,}3105532 \\ \hline \text{Somma, o sia } \log. 10{,}09 = & 2{,}3115448 \end{array}$$

Non lascieremo di ripetere ancora una volta, che in tutti i

calcoli d'approssimazione, quando si vuol far uso d'una quantità trovata per calcolarne un' altra, di questa per passare ad una terza, e così successivamente, bisogna fare i calcoli con una, due, tre, &c. (secondo i casi) decimali di più di quelle che voglionsi esattamente, altrimenti l'errore delle decimali neglette potrebbe accumularsi con pregiudizio delle conservate.

185. Conosciuto (177) il logaritmo di 10, è tolta ogni difficoltà sulla divergenza (174) della serie (A), poichè divien facile il renderla convergente anche per numeri altissimi. Si dimandi, per esempio, il log. iperbolico di 12389. È cosa chiara, che $12389 = 1{,}2389 \times 10000 = 1{,}2389 \times 10^4$. Dunque $\log.12389 = 4 \log.10 + \log.1{,}2389$. Facendo $x = 0{,}2389$, la serie (A) sarà convergente, e darà un logaritmo che, aggiunto a $4 \log.10$, porgerà quello che si cercava.

Se in vece di 12389 il numero dato fosse 0,12389, si avrebbe $\log.0{,}12389 = \log.\frac{1{,}2389}{10} = \log.1{,}2389 - \log.10$. E così si discorra di $0{,}0012389 = \frac{1{,}2389}{1000}$, e simili. Si avverta solo che quì, il logaritmo maggiore essendo negativo, bisogna sottrarre il minore dal maggiore, e scrivere il resto col segno negativo, secondo la regola ordinaria; non essendo applicabile ai logaritmi iperbolici delle frazioni l'espediente adottato (165) pei tabulari, e ciò per le ragioni indicate (178).

186. Si osservi ora che la serie (F), trattando nel modo stesso il numero dato, deve essere anteposta in tutti i casi alla serie (A) per calcolare immediatamente il logaritmo di un numero qualunque. Di fatti, ridotto il numero 12389 alla forma, 1,2389, e facendo $n = 1$, sarà $\delta n = 0{,}2389$. Con questi valori, non vi sarà bisogno di calcolare, che soli tre termini della (F), laddove avremmo dovuto calcolarne almeno otto della serie (A), per formare con 7 decimali esatte il logaritmo richiesto.

187. Quanto più sarà maggiore dell'unità la prima nota del numero dato, tanto meno la formola (F) sarà convergente per calco-

lare immediatamente il log. intiero di esso numero. Si dimandi, per esempio, il log. di 3412. Scrivo 3,412 $\times$ 1000, e poichè $n = 1$, ho $\delta n = 2{,}412$, e $\frac{\delta n}{2n + \delta n} = \frac{2{,}412}{4{,}412}$. Questa frazione è molto maggiore di quello che fosse $\frac{0{,}2389}{2{,}2389}$ nel caso dell' articolo precedente.

Si faccia dunque $3412 = 0{,}3412 \times 10000$, e si metta alla prova la serie (G). Poichè (175), $-\delta \log. n = \log.(n - \delta n) - \log. n = \log.(n - \delta n)$, posto $n = 1$, (172); facendo $(n - \delta n)$ o vero $1 - \delta n = 0{,}3412$, sarà $\delta n = 0{,}6588$, e $\frac{\delta n}{2n - \delta n} = \frac{0{,}6588}{1{,}3412}$. Questa frazione è un poco più piccola di $\frac{2{,}412}{4{,}412}$. Gioverà dunque in tal caso servirsi piuttosto della formola (G), che della (F).

188. Abbiamo veduto (185, 187) che, moltiplicando o dividendo per le potenze di 10, si può ridurre uu numero qualunque ad avere una sola nota, o nessuna, avanti la virgola. Ridotto alla prima forma, si trova il suo logaritmo intiero per mezzo della formola (F). Ridotto alla seconda forma, si trova il suo logaritmo con la formola (G). Resta solo d'avere una regola fissa per sapere a qual delle due sarà più vantaggioso il ricorrere ne' diversi casi. Risolviamo questo problema.

È cosa chiara che la più convergente delle due serie sarà quella che, per calcolare il log. di un numero dato, avrà per primo termine una frazione più piccola. Se si chiama generalmente z il numero di cui si cerca il logaritmo, l'egual convergenza delle due serie avrà dunque luogo, quando z sia tale, che mediante le sostituzioni convenevoli il valore del primo termine sia lo stesso nell'una e nell' altra: ben inteso che se z rappresenta un numero ridotto ad avere una nota avanti la virgola, come esige la formola (F); sarà $\frac{z}{10}$ lo stesso numero ridotto a non avere alcuna nota avanti la virgola, come richiede la (G). Ciò posto, se per più chiarezza e facilità si segue con l'occhio l'esempio (187) mettendo z in vece di 3,412, si vedrà che, per la (F), $\frac{\delta n}{2n + \delta n} = \frac{z - 1}{2 + (z - 1)} = \frac{z - 1}{z + 1}$,

e per la (G), $\frac{\delta n}{2n - \delta n} = \frac{1 - \frac{1}{10}z}{2 - (1 - \frac{1}{10}z)} = \frac{10 - z}{10 + z}$. Dunque, nel caso di valor eguale, si ha $\frac{z - 1}{z + 1} = \frac{10 - z}{10 + z}$. Risolvendo questa equazione, si trova $z = \sqrt{10} = 3{,}1622776 +$; e secondo che si darà a z un valore maggiore, o minore, si avrà $\frac{z - 1}{z + 1}$ maggiore, o minore di $\frac{10 - z}{10 + z}$. Dunque, semprecchè il numero dato, ridotto ad avere una nota avanti la virgola, sia minore di $3{,}16 +$; gioverà cercare il suo logaritmo per mezzo della formola (F); e se è maggiore, sarà meglio impiegare la (G).

Quando poi da un logaritmo cognito si vuol passare a conoscerne un altro, queste formole, usate come si fece (176, 184), e come si vedrà (189), saranno tanto più convergenti, quanto più sarà grande il numero n, di cui si si conosce il logaritmo, e quanto più δn sarà piccolo.

189. Poichè con le formole (F) e (G) si può calcolare immediatamente il logaritmo intiero di un numero qualsivoglia, serviranno dunque per calcolare il logaritmo d'ogni linea trigonometrica, la qual si conosca prima in numeri naturali. Per *logaritmo* intendiamo sempre da quì innanzi il tabulare, giacchè non si fa uso degl'iperbolici nella Trigonometria.

Volendo poi costruir delle tavole, ecco il metodo che mi sembra il più breve. Si calcoli, per esempio, il log. del coseno di 26°. Questo è uno de' più avvantaggiosi, per avere la formola (G) convergente, ed insieme la quantità delle note nel divisore non maggiore di molto della quantità delle note nel dividendo, il che amplifica l'esattezza nel quoziente. Indicherò l'operazione con poche decimali, onde serva di norma per fare il calcolo con quante note si voglia. Ho dalle tavole $\cos. 26° = 0{,}898794 = 1 - 0{,}101206$. Sia $n = 1$, e $\delta n = 0{,}101206$; sarà (187), $- \delta \log. n = \log. (1 - \delta n)$, che è il log. richiesto. Si calcoli dunque la serie (G).

$$- \quad \frac{\delta n}{2n - \delta n} = \frac{-0,101206}{1,893794} = -0,0533015$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{\delta n}{2n - \delta n}\right)^3 = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad -0,00005047$$

$$-\frac{1}{5}\left(\frac{\delta n}{2n - \delta n}\right)^5 = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad -0,00000008$$

Somma $-0,0533507$

Conviene moltiplicare l'aggregato de' termini per $2M$. Il doppio della somma è $-0,1067014$. Prendo (181) i prodotti corrispondenti alle note contenute in questa doppia somma, come segue.

	0,04342945
	260577
	30401
	43
	17
Somma	— 0,04633983

Si converta in positivo (165) questo logaritmo negativo, e si avrà $10 - 0,0463398 = 9,9536602$. Tale è appunto nelle tavole il log. cos. 26°.

Determinando in questo modo alquanti logaritmi di tratto in tratto, come di 5 in 5 gradi, più o meno, a misura che si scorgerà necessario all' esattezza, diviene poi molto rapida l'operazione per formar successivamente tutti i logaritmi intermedj. Vogliasi, per esempio, dedurre dal log. cos. 26° il log. cos. 26° 1'. Si faccia $n =$ cos. 26° $= 0,898794$, e $\delta n =$ cos. 26° — cos. 26° 1' $= 0,0001275$. Quindi $\frac{\delta n}{2n - \delta n} = \frac{0,0001275}{1,7974605}$. Si osservi che il numeratore non ha che quattro note effettive, mentre il denominatore ne ha otto. Per eseguire la divisione bisognerà dunque aggiunger de' zeri al primo: ma ciò non sarà conforme alla vera differenza che passa tra cos. 26° e cos. 26° 1', poichè in questi, dati dalle tavole con 7 decimali, sono neglette le ulteriori. Ora v'è un mezzo facile per conoscere questa vera differenza con più decimali di quelle che diano le

tavole

tavole, quantunque non si conosca il valore assoluto dei due coseni. Facendo $B = 26°$, e $\delta B = 1'$, si ha (II. 31ª), $-\delta\cos.26° = 2\,\text{sen}.30''\ \text{sen}.26°\ 0'\ 30''$. Faccio il calcolo di questa formola coi logaritmi delle tavole comuni, ed ho

$$\begin{aligned} \log.2 &= 0,3010300 \\ \log.\ \text{sen}.30'' &= 6,1626961 \\ \log.\ \text{sen}.26°\ 0'\ 30'' &= 9,6419714 \\ \log.\ -\delta\cos.B &= 6,1056975 \end{aligned}$$

Questo logaritmo nelle tavole de' log. de' numeri corrisponde al numero seguente 0,000127555. Se si calcolassero con nove decimali esatte il cos. 26°, e il cos. 26° 1', tale si troverebbe la differenza fra essi. Si conosca anche da questo esempio l'utilità delle formole (II. 30ª a 33ª). Per altro di questo espediente non si avrà bisogno nel costruire una tavola, poichè allora è necessario conoscere i seni e i coseni in numeri naturali con qualche decimale di più di quelle, che si vogliano ne' logaritmi, (184). Or si rifletta che avendo fatto con 8 decimali i calcoli per avere il log. cos. 26°, non ci bisogna di spinger più oltre quelli, che ora facciamo per rintracciare la differenza fra il detto log. e quello di cos. 26° 1'. Per ciò basta prendere $\frac{\delta n}{2n - \delta n} = \frac{0,000127555}{1,79746}$. Ho segnato con un punto nel denominatore la nota da cui basta cominciare la moltiplicazione con la prima del quoziente, tenendo conto solamente delle decine date dal 4, o dal 46. Il quoziente si troverà 0,00007096. Il suo doppio moltiplicato per M al modo solito darà

$$-\delta\log.\cos.26° = -0,00006163$$

$$9,95366017 = \log.\cos.26° \text{ con 8 decimali come fu calcolato.}$$

Differenza $9,9535985 = \log.\cos.26°\ 1'$. Così è nelle tavole.

Con un solo termine della serie (G), (il secondo avrebbe almeno 12 zeri dopo la virgola) siamo dunque passati, dato il log.cos. 26°, ad ottenere il log.cos. 26° 1'. Così di minuto in minuto si possono

calcolare i log. de' coseni degli archi maggiori; e nella stessa maniera i log. de' coseni degli archi minori col mezzo della formola (F). È poi cosa chiara, che se, in vece di costruire una tavola di logaritmi, di minuto in minuto, si volessero di 10″ in 10″, o pure di grado in grado, &c. il metodo stesso servirebbe, purchè non si dimentichi l'avvertimento (184).

Ho suggerito d'incominciare il calcolo da un coseno, perchè quando si siano formati i logaritmi de' coseni da 0° a 45°, se ne deducono tutti gli altri per via di semplice sottrazione col mezzo della formola (I. 29ª), che dà log. cos. $(45° + \frac{1}{2} A) =$ log. cos. A — log. 2 — log. cos. $(45° - \frac{1}{2} A)$.

Formati i logaritmi de' coseni, e per conseguenza de' seni di tutto il quadrante, si hanno tosto quelli delle tangenti mediante la formola (I. 31ª), onde log. tang. A = log. sen. A — log. cos. A.

190. Ho dato i metodi per formare i logaritmi con numero illimitato di decimali: ma, perchè sembra difficile che venti decimali non bastino ai casi più straordinarj, ho posto alla fine di questa Opera la tavola (BB), che sarà di gran soccorso, come ora vedremo. La ho presa da Gardiner, limitandomi ai logaritmi de' numeri primi. Vi ho aggiunto i fattori de' numeri composti, che non sono divisibili per 2, per 3, e per 5, giacchè i divisibili si distinguono alla sola ispezione. Sarà facile formare, al bisogno, i logaritmi de' numeri composti, col mezzo di quelli contenuti nella tavola. Per esperimentarne l' utilità, si dimandi la radice quinta di 161900 con 12 decimali. Omettendo i due zeri, perchè influiscono solamente nella caratteristica, fa d'uopo trovare (con 14 decimali per più cautela) il log. di 1619. Il più prossimo, che si può aver dalla tavola, è quello di 162, o sia di 1620. Faccio $n = 1620$, ed ho $\delta n = 1$. Quindi per la formola (G)

$$-\frac{\delta n}{2n - \delta n} = -\frac{1}{3239} = -\ 0,\ 000\ 308\ 737\ 264\ 59$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{\delta n}{2n - \delta n}\right)^3 = \ \cdot\ \cdot\ \cdot\ -\ 0,\ 000\ 000\ 000\ 009\ 81$$

$$\text{Somma} -\ 0,\ 000\ 308\ 737\ 274\ 40$$

Il doppio di questa somma, moltiplicato per M al modo solito, dà

$$-\delta\log.1620 = -0{,}0002681\,6578925$$

$$\log.1620 = \log.2 + 4\log.3 + \log.10 = 3{,}2095\,1501\,454263$$

$$\text{Differenza, o sia } \log.1619 = 3{,}2092\,4684\,875338$$

Aggiungendo 2 alla caratteristica, perchè il log. cercato è quello di 161900, e dividendo per 5 il logaritmo, sarà

$$\log.\sqrt[5]{161900} = 1{,}041\,849\,369\,750\,68$$

Cercando nelle tavole ordinarie, a qual numero corrisponda questo logaritmo considerato nelle prime decimali, si trova che il logaritmo più prossimo è quello di 11,01 che si ha poi dalla tavola (BB), come or si vedrà.

$$\log.\sqrt[5]{161900} = 1{,}041\,849\,369\,750\,68$$

$$\log.11{,}01 = \log.3{,}67 + \log.3 = 1{,}041\,787\,318\,971\,75$$

$$\text{Differenza} \quad 0{,}000\,062\,050\,778\,93$$

Chiamando $\delta\log.n$ questa differenza, e facendo $n = 11{,}01$, la formola (K), (180), darà la quantità che si deve aggiungere a 11,01 per aver la radice cercata. La moltiplicazione del valore di $\delta\log.n$ per quello di $\frac{1}{M}$ si farà, per via di addizione, col mezzo delle preparazioni (182), indi si avrà

$$\frac{\delta\log.n}{M} = 0{,}000\,142\,877\,198\,57$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\delta\log.n}{M}\right)^2 = 0{,}000\,000\,010\,206\,94$$

$$\frac{1}{6}\left(\frac{\delta\log.n}{M}\right)^3 = 0{,}000\,000\,000\,000\,49$$

$$\text{Somma} \quad 0{,}000\,142\,887\,406\,00$$

Moltiplicando questa somma per n o sia per 11,01 si avrà

$$\delta 11{,}01 = \delta n = 0{,}001\,573\,190\,340$$

$$n = 11{,}01$$

$$\text{Somma, o sia } \sqrt[5]{161900} = 11{,}011\,573\,190\,340$$

191. Tutti i calcoli precedenti sono brevissimi, troncando ogni

operazione alla decimaquarta decimale, che è il limite assunto. Credo però che mediante i soccorsi che ho dati questo metodo sia più spedito di quello di Halley, le cui formole sono state generalizzate dal Sig. Ab. *Marie*, ma non possono dare che un certo numero di decimali esatte. Abbiamo preso il problema da quest' ultimo, che lo risolve nel modo seguente. Data la formola d'approssimazione $\sqrt[5]{(a^5 - b)} = \frac{3}{4} a + \sqrt{\left(\frac{1}{16} a^2 - \frac{b}{10 a^3}\right)}$, sia $161900 = a^5 - b$. Dividendo per 5 il logaritmo di 161900 preso nelle tavole ordinarie, si ha per radice prossima 11,012. Fatto $a = 11,012$, convien elevare alla quinta potenza questo valore di a, il che dà un numero composto di 6 note avanti la virgola, e di 15 decimali. Si chiami b la differenza da questo numero al numero dato 161900; e calcolando la formola con questi valori di a e di b, si potrà far la prova qual sia il metodo più breve. In ogni caso ecco la formola generale del Sig. Ab. *Marie* per comodo di quelli che la preferissero; $\sqrt[m]{(a^m \pm b)} = \frac{m-2}{m-1} a + \sqrt{\frac{a^2}{(m-1)^2} \pm \frac{2b}{(m^2 - m) a^{m-2}}}$. Avverto novamente che questa formola non è rigorosa, nè può servire che per un numero limitato di decimali.

192. Veduto l'uso che si può far delle nostre formole, e della tavola (BB), nell'estrazione delle radici, ognuno potrà facilmente farne l'applicazione alla ricerca de' logaritmi delle linee trigonometriche, o sia d'ogni numero qualunque. Si dimandi, per esempio, con 20 decimali il logaritmo dell'arco di 1", del quale avremo bisogno in appresso. Preso con 22 note il valore di quest' arco nella tavola (AA), osservo che, separando le prime quattro a sinistra e considerandole per più comodo come un numero intiero, posso averne il log. dalla tavola (BB), poichè log. $4848 =$ log. $3 + 4$ log. $2 +$ log. 101. Sia dunque $4848 = n$, e si chiamino δn le altre diciotto note che seguono; sarà, negligendo nel denominatore quelle che sono inutili nella divisione,

$$\frac{\delta n}{2n + \delta n} = \frac{0,\ 136\ 811\ 095\ 359\ 935\ 899}{9696,\ 136\ 811\ 095\ 359\ 9}.$$

Calcolando solo questo e il secondo termine della serie (F), e moltiplicando per $2M$, si avrà $\delta \log. n = 0,0000122556653 1072710$. Aggiungendo a questa quantità log. 3, 4 log. 2, e log. 101, si troverà, ponendo 4 per caratteristica (165) a causa che il valore dell'arco di 1'' ha cinque zeri dopo la virgola;

$$\log. 1'' = 4,\ 68557\ 48668\ 23540\ 51953.$$

Senza il soccorso della tavola (BB) questo logaritmo sarebbe costato il calcolo di 20 termini della formola (G) impiegata ne' modi additati (187), (188).

193. Abbiamo veduto nell' esempio (190) l'uso della formola (K). Quando il logaritmo più prossimo nelle tavole è maggiore del logaritmo dato, allora si adopèra la (L), che dà la differenza che deve sottrarsi dal numero corrispondente al logaritmo maggiore, per avere il numero corrispondente al minore. Il primo è quello che chiamasi n in tal caso.

Le tavole de' logaritmi portano sempre le istruzioni necessarie, per l'uso di esse, a fin di trovare le parti proporzionali, &c. Noi però ci dispenseremo dal farne parola.

I logaritmi a sette decimali delle tavole ordinarie non sono sufficienti per dare i minuti secondi, e le decime di secondo, con esattezza, per li coseni da 0° fino a 15° circa. Ne' casi, dove si voglia una tal precisione, si potrà ottenerla, per li coseni fra 5° e 15°, facendo i calcoli in numeri naturali, ed usando le tavole di questa specie. Che se il coseno dato risponde ad un arco minore di 5°, o se si vuole far uso de' logaritmi, converrà comporli, ed impiegarli nel calcolo, con quel numero di decimali, di cui si avrà bisogno; ed allora per trovare a qual arco corrisponda il logaritmo di un coseno, sarà d'uopo calcolare con una delle tre formole (H), (K), (L), il numero a cui corrisponde il logaritmo dato; indi si troverà, coi metodi additati (161), l'arco, a cui corrisponde il numero stesso. Studieremo però dei ripieghi per evitare questi coseni,

quanto si possa, nell'uso delle formole che servono alla risoluzione de' triangoli.

194. Il calcolo per logaritmi, di sua natura sommamente spedito, si agevola ancora con l'uso del *Complemento aritmetico*. Questa operazione trasforma le sottrazioni in addizioni nel modo seguente. Sia da sottrarre 579 da 895; è chiaro che $895 - 579 = 895 + 1000 - 579 - 1000 = 895 + 421 - 1000$. In vece di sottrarre 579 si può dunque aggiungere 421, purchè si levi 1 nella classe in cui viene a crescere per causa di questa trasformazione; questa classe è quella delle migliaja nel nostro esempio. Or comparando 421 a 579 si osservi, che 4 e 2 sono la differenza o sia il complemento a 9 di 5 e di 7, e che 1 è il complemento di 9 a 10. Dunque l' operazione del COMPLEMENTO ARITMETICO consiste in questo. *In luogo del numero, che si deve sottrarre, scrivete il complemento a 9 d'ogni sua nota, eccettuata l'ultima a destra, di cui scriverete il complemento a 10: indi fatta la somma sopprimete 1 nella classe ove fu aumentato da tale trasformazione.* Questa soppressione non dà alcuna briga ne' calcoli per logaritmi, poichè cade sempre nelle decine della caratteristica, che già si trascurano per massima (166). Per *ultima* nota s' intende poi l'ultima effettiva, giacchè i zeri, che fossero in fine del numero da sottrarsi, si scrivono quali sono; non così quelli intermedj fra le note effettive, in cambio de' quali si deve porre 9. Tutto questo pare un imbroglio a primo aspetto, piuttosto che una facilità: avremo cura di farla conoscere nell' atto pratico, giacchè negli esempj faremo sempre uso del complemento aritmetico. Basti dire per ora che, fatta la consuetudine, tanto costa il copiare un logaritmo come si trova in una tavola, quanto lo scrivere in vece il suo complemento aritmetico. Si esamini inoltre la conversione de' logaritmi negativi in positivi (165), e si vedrà che non consiste in altro che a prendere il complemento del logaritmo negativo. Però la cotangente ha per logaritmo il complemento aritmetico di quello della tangente, e viceversa: poichè (I. 32°), log. tang. A = log. 1 — log. cot. A = — log. cot. A, (172). Lo

stesso ha luogo fra il coseno e la secante (23); e fra il seno e la cosecante (24).

195. Quanto sono mirabilmente utili i logaritmi nelle moltiplicazioni, divisioni, formazioni delle potenze, ed estrazioni delle radici; tanto sembrano incapaci, per natura, di servire al calcolo, quando si tratta di somme e di sottrazioni. Sarà pregio dell'opera l'indagare ripieghi opportuni e comodi a vincere questa difficoltà in tutti i casi.

Sia da calcolare un'equazione di questa forma, $x = ab + cd$; nella quale ab e cd rappresentano due termini composti ciascuno di qualsivoglia numero e qualità di fattori e divisori monomj. Il modo più breve per trovare il valore di x, calcolando una simile equazione col mezzo de'logaritmi, si è in generale di cercare il numero corrispondente a log. $ab = \log.a + \log.b$, e così il numero corrispondente a log. cd; indi prender la somma di questi due numeri.

196. Ma se, per esempio, x è una linea trigonometrica; per trovar l'arco corrispondente, giova meglio servirsi delle tavole trigonometriche in logaritmi, che di quelle in numeri naturali. La ragione si è, perchè nelle prime, a cagione del loro maggiore uso, sono state inserite le differenze da un logaritmo all'altro contiguo, mediante le quali si trovano prontamente le parti proporzionali ai minuti secondi, decime, &c. Non hanno tal comodo le tavole trigonometriche in numeri naturali.

Per la stessa ragione, se in luogo di ab si avesse una linea trigonometrica, o se anche un'altra in luogo di cd, sarà desiderabile di non avere a cercarle in queste ultime tavole, ma di poter risolvere l'equazione col mezzo de' logaritmi.

Daremo dunque due modi per trovare il logaritmo della grandezza ignota, nel calcolare l'equazione generale proposta.

197. Scrivo l'equazione come segue, $x = ab\left(1 + \frac{cd}{ab}\right)$. Trovato il numero corrispondente a log. $\frac{cd}{ab}$, nulla costa l'aggiungervi

l'unità, ed è facile il prender subito nella tavola il log. $\left(1+\frac{cd}{ab}\right)$, al quale aggiungendo log. ab, che si ha già pronto nel calcolo di log. $\frac{cd}{ab}$, la somma è log. x.

198. La seconda maniera, che son per proporre, è parimente generale, ma ha l'avvantaggio particolare, che dispensa dal fare uso della tavola de' logaritmi de' numeri, se tutte le quantità contenute nell' equazione sono linee trigonometriche; poichè porge il modo di calcolarla con le sole tavole trigonometriche in logaritmi. Prendo nell' equazione ridotta (197) il binomio $1+\frac{cd}{ab}$, e lo paragono col secondo membro dell' equazione $\frac{1}{\cos.^2 A} = 1 + \text{tang.}^2 A$, (I. 19°). Se dunque suppongo $\frac{cd}{ab} = \text{tang.}^2 A$, (nulla osta ad una tale supposizione, poichè una tangente può avere (34, 41) tutti i valori immaginabili) avrò $1+\frac{cd}{ab} = \frac{1}{\cos.^2 A}$, e per conseguenza $x = \frac{ab}{\cos.^2 A}$. L'equazione tang.^{2}A $= \frac{cd}{ab}$ mi dà tang.A $= \sqrt{\frac{cd}{ab}}$: determinato per mezzo di questa l'arco A, prendo nella tavola, a lato di log. tang. A, il log. cos. A, e lo impiego nell' altra equazione, $x = \frac{ab}{\cos.^2 A}$. Spezzando in due l'equazione data, si potrà dunque farne il calcolo per logaritmi con molto maggiore facilità, di quel che coi metodi suggeriti fin'ora da *la Caille*, ed altri Autori che impiegano in simil caso la formola (II. 18°).

In vece dell' equazione (I. 19°), si può prendere a piacimento anche questa $\frac{1}{\text{sen.}^2 A} = 1 + \cot.^2 A$, (I. 4°); e facendo cot.A $= \sqrt{\frac{cd}{ab}}$, si avrà $x = \frac{ab}{\text{sen.}^2 A}$.

199. Diamo un esempio di questa sorte di trasformazioni. Dati i logaritmi de' seni e de' coseni (e per conseguenza (189) delle tang.) degli archi di 1° e di 2°, si cerchi il log. sen. 3° per mezzo della formola (II. 1°), che dà sen.3° = sen.2° cos.1° + cos.2° sen.1°. Comparando questa equazione alla generale (195), si ha sen.3° = x,

sen.2°

sen.2° cos.1° $= ab$, sen.1° cos.$2^\circ = cd$. Dunque (197), sen.$3^\circ =$ sen.2° cos.1° $\left(1 + \frac{\text{sen.}1^\circ \text{cos.}2^\circ}{\text{sen.}2^\circ \text{cos.}1^\circ}\right)$ $=$ sen.2° cos.1° $\left(1 + \frac{\text{tang.}1^\circ}{\text{tang.}2^\circ}\right)$, (I. 31^a). Per conseguenza facendo, come (198), tang.A $= \sqrt{\frac{\text{tang.}1^\circ}{\text{tang.}2^\circ}}$, sarà sen.$3^\circ = \frac{\text{sen.}2^\circ \text{ cos.}1^\circ}{\text{cos.}^2\text{A}}$. Calcoliamo per logaritmi le due ultime equazioni.

$$\begin{array}{rl} \text{log. tang.}1^\circ = & 8{,}2419215 \\ \text{(I. 32}^a\text{), log.cot.}2^\circ = & 1{,}4569162 \\ \text{Somma} & 9{,}6988377 \\ \text{Metà (167), o sia tang.A} = & 9{,}8494188 \end{array}$$

Questo è nelle tavole il log. tang. 35° $15'$ $37''$. Dovrei sottrarre due volte il logaritmo del coseno di quest'angolo dalla somma di log. sen.2° e di log. cos.1°. Risparmio le sottrazioni, scrivendo due volte, in vece del log. cos.35° $15'$ $37''$, il suo complemento aritmetico, ed ho sempre una somma sola da fare, come segue.

$$\begin{array}{rl} \text{log. cos.}1^\circ = & 9{,}9999338 \\ \text{log. sen.}2^\circ = & 8{,}5428192 \\ \text{compl. log. cos.}35^\circ\ 15'\ 37'' = & 0{,}0880236 \\ & 0{,}0880236 \\ \text{Somma, o sia log. sen.}3^\circ = & 8{,}7188002 \end{array}$$

Tale è in fatti nelle tavole.

200. Giova avvertire che in questa sorte di calcoli non è necessario cercare e conoscere l'angolo A. Per esempio, in questo caso, dal log. della tangente di esso angolo si può passare immediatamente a quello del suo coseno, del qual solamente si ha bisogno. In fatti, si prenda la differenza da log. tang. A, che nel nostro esempio è 9,8494188, al logaritmo più prossimo nelle tavole. Questo è, in quelle di Gardiner, 9,8494323 $=$ log. tang.35° $15'$ $40''$; e la sua differenza a log. tang.A è 0,0000135. Prendasi pure in dette tavole la differenza 447, ovvero 0,0000447, fra i due logaritmi più prossimi, in più e in meno, a log. tang.A. Prendendo per fine la differenza 149 fra i due logaritmi corrispondenti de' coseni,

N

si faccia la proporzione $447 : 135 :: 149 : x$, e il valore di x sarà quello che deve aggiungersi in questo caso a log.cos. 35° 15′ 40″ che trovasi nella tavola, per avere il logaritmo cercato di cos.A.

201. Se l'equazione da calcolare avesse la forma seguente $x = ab - cd$; facendo $x = cd\left(\frac{ab}{cd} - 1\right)$, il primo modo indicato (197) potrà applicarsi con uguale facilità, sottraendo l'unità in vece di aggiungerla.

202. Quanto all'altro modo, si compari il binomio $\frac{ab}{cd} - 1$ al secondo membro dell'equazione (I. 33ª), $\text{tang.}^2 A = \frac{1}{\cos.^2 A} - 1$. Procedendo come si fece (198), si avrà $\cos. A = \sqrt{\frac{cd}{ab}}$, e $x = cd\ \text{tang.}^2 A$.

203. Se $\frac{ab}{cd} < 1$, si rifletta che non può essere $\frac{1}{\cos.^2 A} < 1$, perchè il quadrato $\text{tang.}^2 A$ non può essere negativo: dunque la comparazione assunta non regge più. In tal caso si scriva $x = -cd\left(1 - \frac{ab}{cd}\right)$. Prendendo l'equazione (I. 3ª), $\text{sen.}^2 A = 1 - \cos.^2 A$, si faccia $\cos. A = \sqrt{\frac{ab}{cd}}$, e si avrà $x = -cd\ \text{sen.}^2 A$.

Si può prendere indifferentemente l'equazione (I. 18ª), $\cos.^2 A = 1 - \text{sen.}^2 A$; e facendo $\text{sen.} A = \sqrt{\frac{ab}{cd}}$, si avrà $x = -cd \cos.^2 A$.

204. Sia ora l'equazione generale $y = ab \pm cd \pm ef$. (In questa e nelle seguenti equazioni generali, il segno doppio non cade sotto la regola data (11), ma abbraccia tutti i casi). Faccio $ab \pm cd = x$, cerco log.x nei modi additati (197 a 203), indi coi modi stessi risolvo per logaritmi l'equazione $y = x \pm ef$.

In questa maniera, prendendo un binomio alla volta, si potrà calcolare ogni polinomio per logaritmi.

205. Sia perfine l'equazione generale $z = \frac{ab \pm cd \pm ef \pm \&c.}{AB \pm CD \pm EF \pm \&c.}$. Con le regole date finora, si riduca il numeratore ad un solo logaritmo. Si faccia separatamente lo stesso per il denominatore. E l'equazione sarà calcolata per logaritmi.

Se il secondo membro, o parte di esso, fosse coperto da segni radicali, onde si avesse, per esempio, $z = \frac{\sqrt[m]{(ab \pm cd \pm ef \pm \&c.)}}{\sqrt[n]{(AB \pm CD) \pm EF \pm \&c.}}$, si rifletterà che $\log. \sqrt[m]{(ab \pm cd \pm ef \pm \&c.)} = \frac{1}{m}\log.(ab \pm cd \pm ef \pm \&c.)$ e che similmente $\log. \sqrt[n]{(AB \pm CD)} = \frac{1}{n} \log.(AB \pm CD)$. Con tale trasformazione il vincolo radicale sparisce, nè resta più che a seguire le regole date per trovare il logaritmo di un binomio, o di un polinomio, salva la divisione, ove spetta, per l'esponente del radicale.

Ma perchè il radicale quadratico è quello che occorre più frequentemente, daremo quì pronte le formole particolari, di cui ci prevarremo con molta utilità.

206. Sia dunque $x = \sqrt{(p^2 + q^2)}$; sarà (14), $x = p \times \sqrt{\left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right)}$. Comparando l'ultimo radicale con $\sqrt{(1 + \text{tang.}^2\text{A})}$, (I. 19°), sarà $\text{tang.A} = \frac{q}{p}$, e $x = \frac{p}{\text{cos.A}}$. Dalla semplicità di queste equazioni si vede, che la proposta è una di quelle a cui questa specie di trasformazioni è più favorevole.

Lo stesso darebbe la regola generale (205). Allora $\log.x = \frac{1}{2}\log.(p^2 + q^2) = \frac{1}{2}\log.p^2\left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right) = \log.p + \frac{1}{2}\log.\left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right)$. Quindi (198), $\frac{q^2}{p^2} = \text{tang.}^2\text{A}$, o sia $\frac{q}{p} = \text{tang.A}$. Similmente $1 + \frac{q^2}{p^2} = \left(\frac{1}{\text{cos.A}}\right)^2$. Dunque $\frac{1}{2}\log.\left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right) = \log.\frac{1}{\text{cos.A}}$. E per conseguenza $\log.x = \log.p + \log.\frac{1}{\text{cos.A}}$, o vero $x = \frac{p}{\text{cos.A}}$.

Comparando $\sqrt{\left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right)}$ con $\sqrt{(1 + \text{cot.}^2\text{A})}$, (I. 4°), si ha pure $\text{cot.A} = \frac{q}{p}$, e $x = \frac{p}{\text{sen.A}}$.

207. Se l'equazione fosse di questa forma $x = \sqrt{(p^2 + rst^2)}$, mettendo rst^2 in luogo di q^2 nell' equazione precedente $x = \sqrt{(p^2 + q^2)}$, si avrebbe $\text{tang.A} = \frac{t}{p}\sqrt{rs}$, e $x = \frac{p}{\text{cos.A}}$; o vero $\text{cot.A} = \frac{t}{p}\sqrt{rs}$, e $x = \frac{p}{\text{sen.A}}$.

208. Sia ora $x = \sqrt{(p^2 - q^2)}$. Questo caso è comodo all'uso de' logaritmi, poichè allora $x = \sqrt{(p - q)(p + q)}$. Ma se p o q, o anche entrambi sono linee trigonometriche (196), o se siano dati i logaritmi di p e q, e non il loro valore in numeri naturali, in tali casi giova il ricorrere ad una delle formole (I. 3ª, 18ª); e facendo $x = p\sqrt{\left(1 - \frac{q^2}{p^2}\right)}$, si avrà $\frac{q}{p} = \cos.A$, e $x = p\,\text{sen.}A$; o vero $\frac{q}{p} = \text{sen.}A$, e $x = p\cos.A$.

209. In fine ogni espressione, che sia comparabile a qualche formola trigonometrica, potrà risolversi e calcolarsi per mezzo delle tavole trigonometriche. Sia, per esempio, $x = m \times \frac{a+b}{a-b}$. Faccio (9), $x = m \times \frac{1 + \frac{b}{a}}{1 - \frac{b}{a}}$; e comparando questa frazione col secondo membro della formola (II. 8ª), ho $\frac{b}{a} = \text{tang.}B$, e $x = m\,\text{tang.}(45^\circ + B)$.

Eccoci alfine in grado d'intendere, e di eseguire la risoluzione de' triangoli in tutti i casi.

CAPITOLO VIII.

Risoluzione de' triangoli rettilinei rettangoli.

Fig. 1. 210. POICHÈ GD è la tangente (7) dell'arco BD descritto dal raggio CD, sarà, procedendo come si fece (46, 47),

$$CD : DG :: R : \text{tang.}C :: R : \text{cot.}CGD;$$

giacchè si sa che gli angoli obliqui sono complemento un dell'altro in un triangolo rettangolo. Dunque *in ogni triangolo rettangolo un lato sta all'altro, come il raggio alla tangente dell'angolo opposto a questo secondo lato*, o vero *come il raggio sta alla cotangente dell'angolo adjacente al lato medesimo.*

211. Si è poi veduto (46) che *in ogni triangolo rettangolo l'ipotenusa sta al raggio, come un lato sta al seno dell'angolo opposto*, o vero *come un lato sta al coseno dell'angolo adjacente.*

212. Si sa inoltre, che *in ogni triangolo rettangolo il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma de' quadrati de' due lati*, o vero *il quadrato di un de' lati è eguale alla differenza de' quadrati dell'ipotenusa, e dell'altro lato.* Queste due equazioni date dalla Geometria si risolvono pure trigonometricamente ne' modi additati (206, 208).

213. Con le regole contenute nei tre articoli precedenti, basta conoscer due cose, oltre l'angolo retto, in un triangolo rettangolo, perchè si possa trovare il valore di ciascuna delle altre parti del triangolo. Solo si eccettui il caso, ove le cose note sieno i due angoli, poichè allora il problema è indeterminato; essendo evidente che possono darsi infiniti triangoli simili, quali sono, per esempio, ABC, GCD; per il che dalla cognizione degli angoli è impossibile di conchiudere la misura assoluta di alcuno de' lati, ma solamente si può dedurre la proporzione che regna fra i lati stessi (47).

Chiamando A l'angolo retto, B e C gli altri due, abbiamo raccolto nella tavola seguente tutte le soluzioni somministrate dalle regole (210, 211, 212). Volendo verificarla, può prendersi per confronto il triangolo ABC nella fig. 1.

Si osserverà che nel caso dell'ultima formola di questa tavola giova spesso calcolar BC nel modo additato (206), il qual si riduce a cercar prima B, o C per la 17ª, indi BC per la 2ª, o la 4ª, o la 6ª, o la 8ª.

Se nelle formole 13ª e 15ª, il seno o il coseno fossero grandi (193), sicchè non potessero aversi gli angoli dalle tavole con la desiderata esattezza, si avrà ricorso alle formole (217). Vedremo poi (223) che questo difetto delle tavole non induce verun pregiudizio ed incertezza nel calcolo delle equazioni, dove i seni e coseni grandi sono nel secondo membro, cioè fra le quantità note.

Tavola per la risoluzione di un triangolo rettilineo ABC *rettangolo in* A.

DATI.	QUESITI.	FORMOLE.
AB, B	AC......	1ª $AC = AB \times \text{tang.}B$
	BC......	2ª $BC = \frac{AB}{\cos.B}$
AB, C	AC......	3ª $AC = AB \times \cot.C$
	BC......	4ª $BC = \frac{AB}{\text{sen.}C}$
AC, B	AB......	5ª $AB = AC \times \cot.B$
	BC......	6ª $BC = \frac{AC}{\text{sen.}B}$
AC, C	AB......	7ª $AB = AC \times \text{tang.}C$
	BC......	8ª $BC = \frac{AC}{\cos.C}$
BC, B	AB......	9ª $AB = BC \times \cos.B$
	AC......	10ª $AC = BC \times \text{sen.}B$
BC, C	AB......	11ª $AB = BC \times \text{sen.}C$
	AC......	12ª $AC = BC \times \cos.C$
AB, BC	B, C.....	13ª $\cos.B = \frac{AB}{BC} = \text{sen.}C$
	AC......	14ª $AC = \sqrt{(BC - AB)(BC + AB)}$
AC, BC	B, C....	15ª $\text{sen.}B = \frac{AC}{BC} = \cos.C$
	AB......	16ª $AB = \sqrt{(BC - AC)(BC + AC)}$
AB, AC	B, C....	17ª $\text{tang.}B = \frac{AC}{AB} = \cot.C$
	BC......	18ª $BC = AB\sqrt{\left(1 + \frac{AC^2}{AB^2}\right)}$

Avverto che, per formar colla mente, al bisogno, tutte le formole della tavola precedente, basta avere osservato, che tre sole dipendono dal teorema (212); e che tutte le altre consistono sui fondamenti seguenti. Presa l'ipotenusa per raggio, ogni angolo ha per seno il lato opposto, per coseno il lato adjacente. Preso un lato per raggio, l' altro lato è la tangente dell' angolo opposto, la cotangente dell' angolo adjacente; allora l'ipotenusa è la secante del primo angolo, la cosecante del secondo.

214. *Esempj della risoluzione d'un triangolo rettilineo rettangolo.* Sia PO una distanza di pertiche 752, PC di 439, e sia noto che queste due direzioni formano in P angolo retto. Si dimanda quanta sia la distanza OC. I dati sono i due lati, il quesito l'ipotenusa. Il caso però è quello della formola 18ª. Eccone il calcolo, ponendo PO in luogo di AB, PC in luogo di AC, e OC in luogo di BC.

$$\log.PC = 2{,}642465$$
$$\text{compl.}\log.PO = 7{,}123782$$
$$\log.\tfrac{PC}{PO} = 9{,}766247$$
$$\text{il doppio, o sia }\log.\left(\tfrac{PC}{PO}\right)^2 = 9{,}532494$$

Il numero più prossimo corrispondente a questo log. è 0,3408

$$\text{Dunque }\log.\left(1+\tfrac{PC^2}{PO^2}\right) = \log.1{,}3408 = 0{,}127364$$
$$\text{metà, o sia }\log.\sqrt{\left(1+\tfrac{PC^2}{PO^2}\right)} = 0{,}063682$$
$$\text{Si aggiunga }\log.PO = 2{,}876218$$
$$\text{Si ha }\log.OC = 2{,}939900$$

Il numero più prossimo, il qual corrisponde a questo logaritmo, è 870,76. Dunque la distanza OC è di pertiche 870 $\frac{76}{100}$. Questa è la soluzione geometrica, per la quale ho presentato la formola nella tavola nel modo più comodo al calcolo.

Or si faccia vedere la soluzione trigonometrica. Adoperando la 17ª formola, ho $\frac{PC}{PO}$ = tang.COP. Ora il log. $\frac{PC}{PO}$ trovato di sopra

corrisponde alla tang. 30° 16′ 31″, 4. A lato di questa prendo tosto nelle tavole il log. sen. 30° 16′ 31″, 4; e impiegando il suo complemento a tenor della formola 6ª ho

compl. log. sen. 30° 16′ 31″, 4 = 0,297435
Aggiungo log. PC = 2,642465

Ed ho giustamente, come nell' altro modo, log. OC = 2,939900

215. Sia DK l' altezza di una torre, di un campanile, &c. la qual si voglia sapere per mezzo della trigonometria. Si misuri con la pertica la distanza orizzontale DC dal piede della torre fino ad un punto arbitrario C, dal quale si possa prender con esattezza, mediante gl' istromenti convenevoli (194 e seguenti) la misura dell' angolo DCK. Pongasi aver trovato DC = 23 ¼ pertiche, e DCK = 50° 3′, si avrà per la formola 1ª (213), DK = 23 ¼ × tang. 50° 3′.

Ora log. 23, 25 = 1,366423
log. tang. 50° 3′ = 0,076956
Somma, o sia log. DK = 1,443379 = log. 27, 7574

Dunque l' altezza della torre in tal caso sarebbe di pertiche 27 $\frac{76}{100}$ circa.

Questo risultato non sodisfa l'occhio nella figura, dove DK è quasi al doppio più grande di CD; ma conviene avvezzarsi a far uso delle figure, per semplice guida del calcolo, come cadono dalla penna. Il seguente esempio potrà servir di norma per descrivere le figure a tenor de' casi.

216. L'industria de' naviganti ha trovato il modo di misurare la strada che fa un vascello. Sanno inoltre per mezzo della bussola la direzione del viaggio, o sia l' angolo formato dalla linea, su cui cammina il vascello, con la linea meridiana. Suppongo che, fatte cinquanta miglia col medesimo vento in un angolo di 35° ½ nord-est, si dimandi la posizione del bastimento, o sia quanto viaggio abbia fatto verso tramontana, e quanto verso levante. Comincio dal mettere in carta una linea qualunque NS, che chiamo la

la meridiana, segnando N l'estremità, che intendo essere verso il nord, e S quella verso il sud. Da un punto, ad arbitrio, di questa linea, il qual chiamo B, e da cui suppongo che il vascello sia partito, conduco una linea qualunque BC, con la quale mi piace di denotare le miglia 50 fatte dal vascello. Conduco questa linea a destra di NS, perchè il viaggio è verso levante, e la conduco verso N piuttosto che verso S, perchè il viaggio è ancora verso tramontana. L'angolo CBN rappresenta quello di $35^\circ \frac{1}{2}$ nord-est additato dalla bussola. Quindi dall' estremità C tiro una linea CA, che suppongo perpendicolare a NS, ed ho un triangolo BAC riputato rettangolo in A, nel quale supponendo $BC = 50$ miglia, e $CBA = 35^\circ \frac{1}{2}$, mi fa d'uopo rilevare la lunghezza di AB, che è il viaggio fatto verso tramontana, e la lunghezza di AC, che è quello verso levante. Avendo segnato i tre angoli del triangolo, che ho da risolvere, con le stesse lettere A, B, C, di cui si è fatto uso nella tavola generale (213), ho pronte, senza studio, e senza timore di equivoco, le formole che mi bisognano. I dati essendo BC, B; i quesiti AB, AC, ho per la 9ª, $AB = 50 \cos. 35^\circ\ 30'$, e per la 10ª, $AC = 50 \text{ sen.} 35^\circ\ 30'$. Calcolando si troverà $AB = 40$ miglia $\frac{7}{10}$ circa, e $AC = 29$ miglia $\frac{35}{1000}$ circa.

Fig. 4.

217. Per trovare la grandezza di un angolo esattamente, quando nelle formole 13ª e 15ª (213) il seno, o il coseno saranno grandi, gioveranno le quattro equazioni seguenti, dell'uso delle quali daremo un esempio (223).

Riducendo in proporzione la 2ª formola (213), si ha $BC : AB :: 1 : \cos. B$. Dunque (10), $BC : BC - AB :: 1 : 1 - \cos. B :: 1 :$ (I. 7ª) $2 \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} B = \frac{BC - AB}{BC}$.

La prima proporzione dà pure, $BC + AB : BC - AB :: 1 + \cos. B : 1 - \cos. B ::$ (9) $1 : \frac{1 - \cos. B}{1 + \cos. B} :: 1 :$ (I. 42ª) $\text{tang.}^2 \frac{1}{2} B = \frac{BC - AB}{BC + AB}$.

Operando nel modo stesso sulla formola 8ª, o vero permu-

tando nelle due equazioni precedenti B in C, e C in B, si avrà

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{BC-AC}{2BC}}, \quad \text{e} \quad \text{tang.}\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{BC-AC}{BC+AC}}.$$

218. Succede talvolta, che in vece di conoscere il valore assoluto di due parti d'un triangolo rettangolo, come è necessario per risolverlo con le formole (213), si conosce solamente una parte, e la somma o la differenza di due altre. Abbiamo però stimato cosa utile offrire le soluzioni seguenti.

Moltiplicando la seconda equazione (217) con la 14ª (213), si ha $\text{tang.}^2\tfrac{1}{2}B \times AC^2 = (BC - AB)^2$, e però

$$AC : BC - AB :: 1 : \text{tang.}\tfrac{1}{2}B.$$

Se in vece di moltiplicar si divide, si troverà

$$AC : BC + AB :: \text{tang.}\tfrac{1}{2}B : 1.$$

Con queste due analogie si risolverà il triangolo, qualora siano *dati un angolo, e la differenza o la somma dell'ipotenusa e di un lato.*

219. La formola 1ª (213) dà $AB : AC :: 1 : \text{tang.}B$. Dunque $AB + AC : AB - AC :: 1 + \text{tang.}B : 1 - \text{tang.}B :: 1 : \frac{1-\text{tang.}B}{1+\text{tang.}B}$, e per conseguenza (II. 8ª)

$$AB + AC : AB - AC :: 1 : \text{tang.}(45^\circ - B).$$

Con questa analogia si risolverà il triangolo, qualora siano *dati un angolo, e la differenza o la somma dei due lati.*

220. La proporzione $AB : AC :: 1 : \text{tang.}B$, dà pure $AB : AB \pm AC :: 1 : 1 \pm \text{tang.}B$. Ma (213, 9ª), $AB = BC\ \text{cos.}B$. Dunque $BC : AB \pm AC :: 1 : \text{cos.}B(1 \pm \text{tang.}B) :: 1 : \text{cos.}B \pm \text{sen.}B$; e per conseguenza (II. 7ª)

$$BC : AB \pm AC :: 1 : \text{sen.}(45^\circ \pm B)\sqrt{2}.$$

Con questa analogia si risolverà il triangolo, qualora siano *dati l'ipotenusa, e la somma o la differenza dei due lati.*

Nel caso della *somma*, le tavole non daranno con esattezza

l' arco $(45^\circ + B)$, quando B sia di poco minore di 45°. A ciò si può rimediare trasformando sen.$(45^\circ + B)$ in sen.$(45^\circ - B)$, giacchè (28), sen.$(45^\circ - B) = \sqrt{1 - \cos.^2(45^\circ - B)} = \sqrt{1 - \text{sen.}^2(45^\circ + B)}$; e però, sostituendo quì il valore di sen.$(45^\circ + B)$ tirato dall' ultima analogia, sen.$(45^\circ - B) = \sqrt{\left(1 - \frac{(AB + AC)^2}{2BC^2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2BC^2 - (AB + AC)^2}{2BC^2}\right)}$. Se la frazione $\frac{(AB + AC)^2}{2BC^2}$ differisce di poco dall' unità, convien calcolare per numeri naturali, e non per logaritmi, la quantità $2BC^2 - (AB + AC)^2$, se si vuole ottenerla con esattezza. Quindi poi si potrà cercare il suo logaritmo, sottrarne quello di $2\,BC^2$, la metà del residuo sarà il log. sen.$(45^\circ - B)$, e quest' angolo si avrà sempre con precisione dalle tavole.

221. Si considerino ancora due casi, che danno tre teoremi utili. *Sia divisa* primieramente *l'ipotenusa in due segmenti da una perpendicolare*, come AD, calata dall' angolo retto; sarà

Fig. 5.

1°. *Il segmento maggiore al segmento minore, come il raggio al quadrato della tangente dell' angolo minore.*

2°. *L'ipotenusa alla differenza de' segmenti, come il raggio al seno della differenza degli angoli.*

In fatti (210), $AD = BD \times \text{tang.}B = CD \times \text{tang.}C$. Ma $\text{tang.}C = \cot.B = \frac{1}{\text{tang.}B}$. Dunque $BD \times \text{tang.}^2B = CD$, e però se ne cava 1°.

$$BD : CD :: 1 : \text{tang.}^2B.$$

Egli è poi evidente che B deve essere l' angolo minore, posto $BD > CD$, poichè la proporzione esige che sia pure $1 > \text{tang.}B$, cioè $B < 45^\circ$, (17).

La proporzione ritrovata si trasforma, come segue. $BD + CD : BD - CD :: 1 + \text{tang.}^2 B : 1 - \text{tang.}^2 B :: 1 : \frac{1 - \text{tang.}^2B}{1 + \text{tang.}^2B} :: 1 : \cos.2B$, (I. 25'). Ma $BD + CD = BC$, e $\cos.2B = \text{sen.}(C - B)$, poichè $C = 90^\circ - B$. Dunque 2°.

$$BC : BD - CD :: 1 : \text{sen.}(C - B).$$

Fig. 5. 222. In vece della perpendicolare AD, si consideri *una linea*, come AE, *la qual cada obliquamente sopra l'ipotenusa dividendo in due parti uguali l'angolo retto*; sarà in tal caso

Il segmento maggior dell' ipotenusa al segmento minore, come il raggio alla tangente dell' angolo minore.

Di fatti (49), $AE = \frac{BE \ sen.B}{sen.BAE} = \frac{CE \ sen \ C}{sen.CAE}$. Ma $BAE = CAE$ per costruzione, e $sen.C = cos.B$. Dunque $BE \times sen.B = CE \times cos.B$, e per conseguenza

$$BE : CE :: 1 : tang.B$$

223. Finita la costruzione delle formole, che ci eravamo prefisse, daremo un esempio per farne vedere l' uso e l' utilità.

Guardando l'orizzonte del mare da un punto elevato sopra la superficie delle acque, si dimanda l' inclinazione del raggio visuale.

Fig. 6. Sia BT = 40 piedi, e sia la tangente BA il raggio visuale d' un Osservatore, che dal punto B guarda l' orizzonte del mare. Si cerca l' angolo ABO, che è l' inclinazione dell' orizzonte apparente AB sull' orizzonte vero OR dell' Osservatore.

Poichè $BAC = 90° = CBO$, sarà l' angolo che si cerca $ABO = ACB$. Per trovar la grandezza di quest' angolo, si ha (213, 15°), $cos.C = \frac{AC}{BC}$. Dagli Astronomi è stata determinata la lunghezza del semidiametro AC o TC della Terra, ed il suo valor medio è all'incirca di 19630000 piedi di Parigi, in numero rotondo. Aggiungendo 40, si ha dunque il valor di BC, e però

$$\begin{aligned} log.AC &= log.19630000 = 7,2929203 \\ compl.log.BC &= compl.log.19630040 = \underline{2,7070788} \\ log.cos.C &= 9,9999991 \end{aligned}$$

Questo logaritmo corrisponde nelle tavole al coseno di un angolo fra 6' 45'' e 7' 15''. Si avrebbe dunque il valore dell' angolo cercato con 30'' d' incertezza (193). Volendolo esatto, si ricorra in vece alla formola (217), la qual trasforma il coseno grande in un

seno piccolissimo, ed è; sen. $\frac{1}{2}$ C $= \sqrt{\frac{BC - AC}{2BC}}$. Eccone il calcolo.

$$\log.\tfrac{1}{2}(BC - AC) = \log.\tfrac{1}{2}BT = \log.20 = 1{,}3010300$$
$$\text{compl.}\log.BC = \text{compl.}\log.19630040 = 2{,}7070788$$
$$\text{Dunque } \log.\frac{BC - AC}{2BC} = 4{,}0081088$$
$$\text{la cui metà (167), o sia } \log.\text{sen.}\tfrac{1}{2}C = 7{,}0040544$$

Questo logaritmo corrisponde nelle tavole al sen. 3′ 28″, 2; e però si ha con gran precisione C = 6′ 56″, 4.

Or si noti, che l'imperfezione di log.cos.C per dare il giusto valore di C nella prima formola quì impiegata, non influirebbe punto, qualora l'angolo C fosse cognito, e dati, per esempio, BC e C, si cercasse AC con la formola (213, 12°), AC $=$ BC $\times$ cos.C. È cosa chiara, che se a log.BC preso quì sopra si aggiunge log.cos. *6′ 56″*, qual lo danno le tavole, e qual fu trovato da noi calcolando la formola cos.C $= \frac{AC}{BC}$, deve risultar necessariamente il medesimo logaritmo di AC, che abbiamo impiegato nella formola stessa.

Si conchiuda però che quanto sono poco atti i seni e coseni molto grandi a dare il valore di un angolo con esattezza per mezzo delle tavole ordinarie; tanto sono favorevoli, quando l'angolo è dato, per trovare con precisione qualunque altra quantità di un'equazione; poichè se mai vi fosse un qualche piccolo errore nell'angolo dato, ciò non altererebbe il valore del suo seno, o coseno, e per conseguenza non nuocerebbe al valore della cosa cercata.

Se in vece dell'angolo d'inclinazione si avesse curiosità di conoscere la distanza BA, si avrebbe (213, 16°), AB $= \sqrt{40 \times 39260040}$. Calcolando per logaritmi si troverà speditamente, che l'occhio elevato a 40 piedi di altezza può veder la superficie del mare fino ad una distanza di 39628 piedi, il che è quasi sette miglia.

CAPITOLO IX.

Risoluzione de' triangoli rettilinei obliquangoli.

224. D*ati due angoli*, e per conseguenza il terzo, *e conoscendo anche un lato, trovare uno degli altri due lati.*

Fig. 7. Si chiamino le cose note A, B, C, AC; se la cercata è BC, sarà per la regola (49)

$$BC = \frac{AC \times \text{sen.}A}{\text{sen.}B}.$$

Ne abbiamo dato un esempio (50).

Se la cosa cercata è AB, sarà per la regola stessa

$$AB = \frac{AC \times \text{sen.}C}{\text{sen.}B}.$$

225. *Dati due lati, e l'angolo opposto a uno d'essi, trovar l'angolo opposto all'altro lato dato*, e per conseguenza anche l'angolo intercetto; giacchè quando coi medesimi dati questo è l'angolo richiesto, la via più spedita per determinarlo si è di cercare l'altro angolo ignoto.

Si chiamino le cose note AC, BC, B; sarà A la cercata, e si avrà

$$\text{sen.}A = \frac{BC \times \text{sen.}B}{AC}.$$

Se l'angolo cercato è opposto al minore de' lati dati, l'angolo stesso è sempre acuto. In fatti, essendo per la Geometria l'angolo maggiore sempre opposto al lato maggiore, bisogna che, se $BC < AC$, sia pure $A < B$. Ora un triangolo rettilineo non può avere due angoli ottusi.

Se l'angolo cercato è opposto al maggiore de' lati dati, la specie Fig. 8. *dell'angolo stesso è dubbia*, (35). In fatti sia $BC > AC$; e si tiri $CD = AC$: si avrà $A = ADC$, e $\text{sen.}A = (19)\ \text{sen.}CDB = \frac{BC \times \text{sen.}B}{AC} = \frac{BC \times \text{sen.}B}{CD}$. Dunque per sapere se l'angolo cercato sia acuto, come A, o vero ottuso, come CDB, non basta conoscere

la grandezza di B, di BC, e di AC = CD, ma è necessario di sapere ancora, se il più piccolo lato dato sia nella posizione di AC, o pure in quella di CD. D' ordinario questa cognizione è somministrata dalle circostanze locali. Senza di essa è impossibile inoltre conoscere, quale si debba adottare dei due valori ACB, BCD per il terzo angolo, e AB, BD per il terzo lato.

226. *Dati due lati, e l' angolo opposto a uno d' essi, trovare il terzo lato.*

Si chiamino le cose note AC, BC, e B; sarà AB la cercata. Si cali sopra essa, prolungata se occorre, la perpendicolare CD. Sarà (211), $BD = BC \times \cos.B$, e $CD = BC \times \text{sen.}B$. Quindi (212), $AD = \sqrt{(AC^2 - CD^2)} = \sqrt{(AC^2 - BC^2 \,\text{sen.}^2 B)}$. Ora $AB = BD \pm AD$. Dunque

Fig. 2 e 3.

$$AB = BC \times \cos.B \pm \sqrt{(AC^2 - BC^2 \,\text{sen.}^2 B)}.$$

Si vede dalle *figure*, che il radicale negativo ha luogo quando A è ottuso. Dunque, per trovare il valore di AB, è necessario di saper prima la specie dell' angolo opposto al maggiore de' lati dati, come nel problema precedente. Se l' angolo dato B è ottuso, il radicale è positivo: ma si avverta che $BC \times \cos.B$ diventa negativo, (36).

Ho dato la soluzione diretta del problema, e così farò anche dei seguenti, perchè questa specie di espressioni è utile e necessaria nelle operazioni analitiche: però la via più spedita e più comoda in questo caso per il calcolo numerico è quella di cercar prima l' angolo A con la formola (225); allora è pur noto il terzo C, e quindi AB si trova con la seconda (224). Si osservi che AC, e sen.B sono comuni a queste due formole, sicchè non si hanno da cercare che sei logaritmi per questo metodo.

227. *Dati due lati e l' angolo intercetto, trovare il terzo lato.*

Si chiamino le cose note AB, AC, A; sarà BC la cercata. Calando una perpendicolare, come CD, sopra uno de' lati noti, sarà (212), $BC^2 = CD^2 + BD^2 = AC^2 - AD^2 + (AB - AD)^2$

Fig. 2.

$= AC^2 + AB^2 - 2AB \times AD$. Ma $AD = AC \times \cos.A$, (211). Dunque

$$BC = \sqrt{(AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos.A)}.$$

Applicando questa soluzione alla fig. 3, dove A è ottuso, si vedrà che l'ultimo termine risulta positivo. Tale si sarebbe dovuto impiegare nel calcolo per la sola considerazion delle regole (36).

228. Molesto è il calcolo della formola trovata. Per renderlo facile, si ponga $1 - 2\,\text{sen.}^2 \frac{1}{2}A$ in vece di cos. A, e si avrà (15, 8), $BC = \sqrt{(AC \backsim AB)^2 + 4AB \times AC \times \text{sen.}^2 \frac{1}{2}A}$. Or ricorrendo alle trasformazioni (207), si ottiene

$$\text{tang.}a = \frac{2\,\text{sen.}\frac{1}{2}A}{AC \backsim AB} \sqrt{AB \times AC}; \text{ e}$$
$$BC = \frac{AC \backsim AB}{\cos.a}$$

La prima di queste due equazioni serve a trovare un arco a, il quale impiegato nella seconda conduce tosto alla cognizione del lato cercato.

229. *Dati due lati e l'angolo intercetto, trovare uno degli altri due angoli.*

Fig. 2. SOLUZIONE I. Ferme le cose note AB, AC, A; sia B la cercata. Calando la perpendicolare CD dal terzo angolo C, si avrà (210), $\text{tang.}B = \frac{CD}{BD}$. Ma (211), $CD = AC \times \text{sen.}A$, e $BD = AB - AD = AB - AC \times \cos.A$. Dunque

$$\text{tang.}B = \frac{AC\ \text{sen.}A}{AB - AC \cos.A} = \frac{\text{tang.}A}{\frac{AB}{AC \cos.A} - 1}$$

L'ultima espressione fa vedere, che in questo problema non è necessario di conoscere il valore assoluto de' lati, ma basterebbe conoscer la loro ragione $\frac{AB}{AC}$.

Se A è ottuso, cos. A e tang. A saranno negativi, (36). Ma se, A essendo acuto, fosse $AC \cos.A > AB$, allora il valore di tang. B risulterà negativo, vale a dire, che B sarà ottuso. Intanto sia detto

una

una volta per tutte, che basta comporre le formole trigonometriche sulla supposizione, che tutti gli angoli siano acuti. Quando un angolo dato è ottuso, o quando il valor di una formola risulta negativo, convien poi non preterire le regole de' segni (36), ricapitolate ed estese nella tavola (42).

Se in vece di B si cercasse l'angolo C; calando la perpendicolare dal punto B sopra la linea AC, si troverà col metodo stesso

$$\text{tang.}\, C = \frac{AB \text{ sen.} A}{AC - AB \cos. A}.$$

Lo stesso si ottiene, permutando per tutto nella formola precedente B in C, e C in B; il che serva di regola facile e generale in tutti i casi.

230. Soluzione II. AB : AC :: sen.C : sen.B, (49). Dunque AB + AC : AB — AC :: sen.C + sen.B : sen.C — sen.B :: tang. $\frac{1}{2}$(C + B) : tang. $\frac{1}{2}$(C — B), (II. 12[a]). Ma tang. $\frac{1}{2}$(C + B) = tang. $\frac{1}{2}$(180° — A) = tang. (90° — $\frac{1}{2}$A) = cot. $\frac{1}{2}$A, (7). E però

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(C - B) = \cot.\tfrac{1}{2}A \times \frac{AB - AC}{AB + AC}; \text{ o vero}$$
$$\cot.\tfrac{1}{2}(C - B) = \text{tang.}\tfrac{1}{2}A \times \frac{AB + AC}{AB - AC}.$$

Per calcolar l'una o l'altra di queste formole, si nominerà AC il minore dei due lati dati. Si conosce $\frac{1}{2}$(C + B) = 90° — $\frac{1}{2}$A. Da questa quantità sottraendo il valore di $\frac{1}{2}$(C — B) dato dalla formola, si avrà quello di B. Aggiungendolo, si avrà l'angolo maggiore C; e questa addizione dà effettivamente l'angolo ottuso, quando è tale.

231. Se il valore de' lati AB, AC fosse dato in logaritmi, e non in numeri naturali, come succede delle distanze de' pianeti al Sole nelle tavole astronomiche, allora si farà (209)

$$\text{tang.}\, x = \frac{AC}{AB}; \text{ e si avrà}$$
$$\cot.\tfrac{1}{2}(C - B) = \text{tang.}\tfrac{1}{2}A \ \text{tang.}(45° + x).$$

232. *Dati i tre lati, cercare un angolo.*

SOLUZIONE I. Si nomini A l'angolo cercato. La formola (227) dà

$$\cos.A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\,AB \times AC}.$$

Sarebbe facile il dedurre da questa formola una nuova dimostrazione della formola (53), con quel metodo stesso che ho adoperato per giungere alla (51). Tale dimostrazione farebbe vedere perchè abbia prescelto l'una piuttosto che l'altra delle due radici del secondo membro dell'equazione, da cui è nata la formola (53).

L'espressione di cos.A, trovata or ora, sarà più comoda al calcolo sotto la forma seguente (15):

$$\cos.A = \frac{(AC + AB + BC)\,(AC + AB - BC)}{2\,AC \times AB} - 1.$$

233. SOLUZIONE II. Pongasi $2\cos.^2\frac{1}{2}A - 1$, in vece di cos.A, e si avrà dall'ultima formola quella che segue:

$$\cos.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\frac{AC + AB + BC}{2} \times \left(\frac{AC + AB + BC}{2} - BC\right)}{AB \times AC}}$$

Questa a me sembra la più spedita; pur la più usata è la seguente, perchè molti amano cercar nelle tavole il logaritmo di un seno, piuttosto che quello di un coseno, e perchè gli angoli piccoli non si hanno da questo con esattezza.

234. SOLUZIONE III. Nella prima formola (232) si sostituisca $1 - 2\,\text{sen.}^2\frac{1}{2}A$ in luogo di cos.A; e si avrà $2\,\text{sen.}^2\frac{1}{2}A = 1 + \frac{BC^2 - AC^2 - AB^2}{2AB \times AC} = \frac{(BC + AC - AB)\,(BC + AB - AC)}{2\,AB \times AC}$. Dunque

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\left(\frac{BC + AC + AB}{2} - AB\right)\left(\frac{BC + AC + AB}{2} - AC\right)}{AB \times AC}}$$

235. La tavola III, posta in fine di quest'Opera, contiene una collezione completa delle soluzioni analitiche di questo problema: *In un triangolo* ABC, *essendo date tre parti, delle quali una almeno sia un lato, determinare il valore di tutte le altre.* Dico *tre parti delle quali una almeno sia un lato,* salvo il caso dei due angoli,

che soli bastano a far conoscere il terzo. In questa tavola si vedranno delle espressioni complicate, ma della loro utilità si avrà un saggio nelle discussioni delicate de' minimi (334).

Le formole 1ª, 2ª, 10ª, 11ª, 19ª, 20ª, 28ª, 29ª, 55ª, 56ª, 82ª, 83ª dipendono visibilmente dalla regola (49).

Le formole 30ª, 39ª, 48ª, 57ª, 66ª, 75ª, 84ª, 93ª, 102ª, sono fondate sugli articoli 51, 36. S'intenderà che da queste nascono quelle che le seguono immediatamente, se si rammentano le formole (II. 1ª, 3ª, 5ª).

Le formole 8ª, 25ª, 43ª, 77ª, 105ª, sono dimostrate agli art. 226, 227, 232, 229.

Le formole 9ª, 17ª, 18ª, 26ª, 27ª, si dimostrano come la 8ª; o pure la 9ª si cava dalla 8ª permutando in questa A in B, e B in A: per via di consimili permutazioni, le 17ª, 26ª si hanno dalla 9ª, e le 18ª, 27ª dalla 8ª.

Le 7ª e 16ª si dimostrano come la 25ª, o si cavano da essa permutando convenevolmente le lettere. Lo stesso si dica delle 70ª, 97ª respettivamente alla 43ª.

Parimente le 50ª, 51ª si dimostrano come la 77ª; o vero la 51ª si deduce dalla 77ª e la 50ª dalla 51ª, permutando le lettere. Così s'intenda delle 78ª e 104ª respettivamente alla 105ª.

La 3ª è cavata dalla 1ª, mettendo in questa il valore di sen.A, preso dalla 31ª, e dividendo numeratore e denominatore per sen.C. Per simil modo le 4ª, 12ª, 13ª, 21ª e 22ª si tirano dalle 2ª, 10ª, 11ª, 19ª e 20ª.

Le 5ª, 6ª, 14ª, 15ª, 23ª e 24ª sono facili a ricavarsi dalle 51ª, 77ª, 105ª, 50ª, 78ª, 104ª.

La 32ª si ha dalla 28ª, mettendo in questa il valore di AB, preso dalla 7ª. Per simil modo le 33ª, 59ª, 60ª, 86ª, 87ª si tirano dalle 29ª, 55ª, 56ª, 82ª, 83ª.

Se si considera che $\text{sen.}A = \sqrt{(1 - \cos.^2 A)}$, si vedrà che le 34ª, 61ª, 88ª provengono dalle 43ª, 70ª, 97ª.

La 35ª è cavata dalla 28ª sostituendo in questa il valore di BC preso dalla 26ª. Per simil modo si cavano le 36ª, 62ª, 63ª, 89ª, 90ª dalle 29ª, 55ª, 56ª, 82ª, 83ª.

Se si considera che $\cos.A = \sqrt{(1 - \text{sen.}^2 A)}$, si conoscerà facilmente che le formole 37ª, 38ª, 64ª, 65ª, 91ª, 92ª provengono dalle 28ª, 29ª, 55ª, 56ª, 82ª, 83ª.

Si rammenti che $\cos.A = \frac{\text{sen.}A}{\text{tang.}A}$, e dividendo la 32ª per la 50ª si avrà la 41ª. Per simil modo sono formate le 42ª, 68ª, 69ª, 95ª, 96ª.

La 44ª è cavata dalla 40ª, sostituendo in questa il valore di sen.B preso dalla 56ª, e quello di cos.B preso dalla 65ª. Per simil modo sono formate le 45ª, 71ª, 72ª, 98ª, 99ª, sostituendo respettivamente nelle 40ª, 67ª, 94ª, i valori contenuti nelle 82ª e 91ª, 83ª e 92ª, 28ª e 37ª, 29ª e 38ª, 55ª e 64ª.

Si sa che $\text{tang.}A = \frac{\text{sen.}A}{\cos.A}$; dunque dividendo la 35ª per la 44ª si avrà la 53ª. Per simil modo sono formate le 54ª, 80ª, 81ª, 107ª, 108ª.

Ma si ha pure $\text{tang.}A = \sqrt{\left(\frac{1}{\cos.^2 A} - 1\right)}$. Quindi è facile il vedere che le formole 52ª, 79ª, 106ª provengono dalle 43ª, 70ª, 97ª.

Finalmente dividendo la 28ª per la 37ª si ha la 46ª, e nel modo stesso si formano le 47ª, 73ª, 74ª, 100ª, 101ª.

236. La tavola IV, collocata parimente alla fine di quest' Opera, non ha bisogno di spiegazione. Vi abbiamo raccolto le soluzioni più comode al calcolo numerico, in favor di coloro, che non amano le espressioni in lettere A, B, &c.

Si sarà già osservato, nelle formole trovate fin quì, che, per risolvere un triangolo rettilineo obliquangolo, è necessario conoscer tre parti di esso, delle quali una almeno sia un lato per la stessa ragione addotta (213). Tale è la regola generale; noi però indagheremo la soluzione in altre combinazioni differenti.

237. *Conoscendo due lati* AB, AC, *e la differenza* (C ∽ B) *degli angoli opposti, risolvere il triangolo.* Fig. 7.

Dalla seconda formola (230) si cava, impiegando per più di generalità ∽ in vece di —

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\,A = \text{cot.}\tfrac{1}{2}\,(C \backsim B) \times \frac{AB \backsim AC}{AB + AC}\,; \text{ o vero}$$

$$\text{tang.}\left\{\begin{matrix}\tfrac{1}{2}\,\text{ang. compreso}\\ \text{fra i lati dati}\end{matrix}\right\} = \frac{\text{cot.}\tfrac{1}{2}\,\text{diff. data} \times \text{diff. lati dati}}{\text{somma de' lati dati}}$$

Trovato l'angolo A, la determinazione delle altre parti ignote del triangolo non soffre più difficoltà.

238. *Conoscendo gli angoli, e la somma* (AB + AC) *o la differenza* (AB ∽ AC) *di due lati, risolvere il triangolo.*

Dalle due equazioni precedenti si cavano le seguenti:

$$(AB \backsim AC) = (AB + AC)\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}\,A\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}\,(C \backsim B)$$

$$(AB + AC) = (AB \backsim AC)\ \text{cot.}\tfrac{1}{2}\,A\ \text{cot.}\tfrac{1}{2}\,(C \backsim B)\text{, o}$$

$$\left.\begin{matrix}\text{Diff. de' lati, di cui}\\ \text{è data la somma}\end{matrix}\right\} = \frac{\text{som. data} \times \text{tang.}\tfrac{1}{2}\,\text{ang. compreso}}{\text{cot.}\tfrac{1}{2}\,\text{differ. degli altri due angoli}}\,,$$

$$\left.\begin{matrix}\text{Som. de' lati, di cui}\\ \text{è data la differenza}\end{matrix}\right\} = \frac{\text{diff. data} \times \text{cot.}\tfrac{1}{2}\,\text{ang. compreso}}{\text{tang.}\tfrac{1}{2}\,\text{diff. degli altri due angoli}}$$

Con l'una, o con l'altra di queste due formole si determina il valore assoluto di AB, e di AC.

239. *Conoscendo un angolo* A, *il lato opposto* BC, *e la somma* (AB + AC) *o la differenza* (AB ∽ AC) *degli altri due lati, risolvere il triangolo.*

Moltiplicando per $\frac{BC}{BC} = 1$ il primo membro della seconda equazione (238), riducendola in proporzione, e rammentando le formole (I. 31ª, 32ª), si ha

$$\frac{BC}{BC} : \frac{(AB \backsim AC)}{(AB + AC)} :: \frac{\text{cos.}\tfrac{1}{2}\,A}{\text{sen.}\tfrac{1}{2}\,A} : \frac{\text{sen.}\tfrac{1}{2}\,(C \backsim B)}{\text{cos.}\tfrac{1}{2}\,(C \backsim B)}$$

Se si può dimostrare, che i numeratori sono in proporzione, ne verrà, che anche i denominatori lo sono (13); e le due proporzioni faranno conoscere il valore di ciascuna delle quattro parti ignote del triangolo. Imperciocchè, siano, per esempio, BC, A, e (AB ∽ AC) le cose note. Si troverà con l'analogia de' numera-

tori il valore di $\frac{1}{2}(C \backsim B)$. S'impiegherà questo valore nell'analogia dei denominatori, la quale darà il valore di $(AB + AC)$. Conoscendo così le somme e le differenze, de' lati AB e AC, e degli angoli opposti B e C, si trarrà il loro valore assoluto nel modo indicato (230).

Si dimostri l'analogia de' numeratori. Poichè $(AB \backsim AC) = \frac{BC\ \text{sen.}C \backsim BC\ \text{sen.}B}{\text{sen.}A}$, (III. 1ª, 11ª), sarà $BC = \frac{(AB \backsim AC)\ \text{sen.}A}{\text{sen.}C \backsim \text{sen.}B} = \frac{(AB \backsim AC)\ \text{sen.}(C+B)}{\text{sen.}C \backsim \text{sen.}B} =$ (I. 6ª, II. 22ª) $\frac{(AB \backsim AC)\ 2\,\text{sen.}\frac{1}{2}(C+B)\ \cos.\frac{1}{2}(C+B)}{2\,\text{sen.}\frac{1}{2}(C \backsim B)\ \cos.\frac{1}{2}(C+B)} = \frac{(AB \backsim AC)\ \text{sen.}\frac{1}{2}(C+B)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(C \backsim B)}$. Ma $\text{sen.}\frac{1}{2}(C+B) = \text{sen.}\frac{1}{2}(180° - A) = \cos.\frac{1}{2}A$. Dunque $BC = \frac{(AB \backsim AC)\ \cos.\frac{1}{2}A}{\text{sen.}\frac{1}{2}(C \backsim B)}$; il che dà la proporzione cercata.

Applicando le analogie dimostrate ai due casi proposti nella enunziazione del problema, si ha dunque

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}(C \backsim B) = \frac{(AB \backsim AC)\ \cos.\frac{1}{2}A}{BC},$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}(C \backsim B) = \frac{(AB + AC)\ \text{sen.}\frac{1}{2}A}{BC};\ \text{o pure}$$

$$\text{sen.}\left\{\begin{matrix}\text{½ differ. degli}\\ \text{angoli ignoti}\end{matrix}\right\} = \frac{\text{diff. data} \times \cos.\ \text{½ angolo dato}}{\text{lato dato}},$$

$$\cos.\left\{\begin{matrix}\text{½ differ. degli}\\ \text{angoli ignoti}\end{matrix}\right\} = \frac{\text{somma data} \times \text{sen.}\ \text{½ ang. dato}}{\text{lato dato}}$$

240. *Conoscendo un angolo, un lato adjacente, e la somma degli altri due lati, risolvere il triangolo.*

Fig. 9. Siano le cose note B, BC, e $(AB + AC)$. Si prolunghi AB di maniera, che sia $BD = (AB + AC)$, o sia $AD = AC$. Nel triangolo BCD si conosceranno due lati BC, BD, e l'angolo intercetto B; si troverà dunque per la soluzione (230) il valore di $\frac{1}{2}(BCD - D)$, che è quello di $\frac{1}{2}ACB$, a cagione che $D = ACD$ per costruzione. E però si avrà

$$\cot.\tfrac{1}{2}ACB = \text{tang.}\tfrac{1}{2}B \times \frac{(AB + AC) + BC}{(AB + AC) - BC},\ \text{o}$$

$$\cot.\left\{\begin{matrix}\text{mezzo angolo ignoto}\\ \text{adjacente al lato dato}\end{matrix}\right\} = \text{tang.}\tfrac{1}{2}\ \text{angolo dato} \times \frac{\text{somma data} + \text{lato dato}}{\text{somma data} - \text{lato dato}}$$

241. *Conoscendo un angolo, un lato adjacente, e la differenza degli altri due lati, risolvere il triangolo.*

Siano le cose note B, BC, e (AB — AC). Prendasi BD = (AB — AC), o sia AD = AC. Nel triangolo BCD si troverà come nel caso precedente il valore di $\frac{1}{2}$(BDC — BCD). Ma BDC = 180° — ADC, BCD = ACB — ACD, e ADC = ACD per costruzione. Dunque il valore trovato è quello di 90° — $\frac{1}{2}$ ACB. E però il valore di ACB sarà dato dall'equazione seguente: Fig. 10

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}ACB = \text{tang.}\tfrac{1}{2}B \times \frac{BC + (AB - AC)}{BC - (AB - AC)}, \text{ o pure}$$

$$\text{tang.}\begin{Bmatrix}\text{mezzo angolo ignoto}\\\text{adjacente al lato dato}\end{Bmatrix} = \text{tang.}\tfrac{1}{2}\,\text{ang. dato} \times \frac{\text{lato dato} + \text{differenza data}}{\text{lato dato} - \text{differenza data}}$$

242. Passiamo ora al calcolo de' Segmenti: avvertendo in prima che, in un triangolo qualunque ABC, il lato AB, sopra il quale si cala una perpendicolare CD, si chiama *base*, e l'angolo C, da cui la perpendicolare discende, si chiama *angolo verticale.* Fig. 2 e 3.

Trovare il valore de' segmenti della base AB *del triangolo* ABC.

Siano *dati* primieramente *i tre lati.* Poichè $CD^2 = AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$, ne viene che $AC^2 \backsim BC^2 = AD^2 \backsim BD^2$, o vero che $(AC \backsim BC)\ (AC + BC) = (AD \backsim BD)\ (AD + BD)$. Se la perpendicolare cade di dentro del triangolo, (AD + BD) = AB; se cade di fuori, $(AD \backsim BD)$ = AB. Dunque per li due casi

$$AD \overset{\backsim}{+} BD = \frac{(AC \backsim BC)\ (AC + BC)}{AB}, \text{ o vero}$$

$$\begin{Bmatrix}\text{la somma o}\\\text{la differenza}\end{Bmatrix} \text{de' segmenti} = \frac{\text{som. dei due lati} \times \text{diff. di essi lati}}{\text{la base}}$$

Nell'uso di questa formola non occorre far attenzione al doppio segno, nè saper se la perpendicolare cada dentro, o fuori. La metà del valore della formola aggiunta alla metà della base darà sempre il segmento maggiore, la differenza delle due metà il minore. Ciò s'intenda ripetuto nelle soluzioni seguenti; e ne darèmo un esempio (250).

243. Siano ora *dati i tre angoli e la base* AB.

Per la regola (210) si ha CD = BD × tang.B = AD × tang.A. Fig. 2

Dunque BD : AD :: tang. A : tang. B, e BD + AD : BD $\backsim$ AD :: sen.(A + B) : sen.(A $\backsim$ B), (II. 10°).

Fig. 3. Se la perpendicolare cade di fuori, si ha BD + AD : BD — AD :: sen.(CAD + B) : sen.(CAD — B). Ma CAD + B = 180° — A + B = 180° — (A — B), e similmente CAD — B = 180° — (A + B). Dunque BD + AD : BD — AD :: sen.(A — B) : sen.(A + B). E però in generale

$$BD \overset{\backsim}{+} AD = \frac{AB \times sen.(A \backsim B)}{sen.(A + B)}, \text{ o vero (III. 84°)}$$

$$\left.\begin{matrix}\text{la somma o}\\ \text{la differenza}\end{matrix}\right\} \text{de' segmenti} = \frac{\text{la base} \times \text{sen. diff. degli angoli adjac.}}{\text{sen. angolo verticale}}$$

244. *Trovare il valore de' segmenti di un lato, formati da una linea che divide per mezzo l'angolo opposto.*

Fig. 10 Sia BCD = ACD, e *siano dati* nel triangolo ABC *gli angoli e il lato diviso* AB; *o vero* siano dati *i tre lati.*

Per la regola (49) si ha $CD = \frac{BD\ sen.B}{sen.BCD} = \frac{AD\ sen.A}{sen.ACD}$. Dunque BD : AD :: sen. A : sen. B, e BD + AD : BD $\backsim$ AD :: tang.$\frac{1}{2}$(A + B) : tang.$\frac{1}{2}$(A $\backsim$ B), (II. 12°). E però

$$BD \backsim AD = \frac{AB\ tang.\frac{1}{2}(A \backsim B)}{tang.\frac{1}{2}(A + B)} = \frac{AB\,(BC \backsim AC)}{BC + AC}, \text{ (230); o}$$

$$\text{diff. segmenti} = \frac{\text{lato diviso} \times \text{tang.} \frac{1}{2} \text{ diff. degli ang. adjacenti}}{\text{tang.} \frac{1}{2} \text{ somma angoli stessi}}$$

$$\text{diff. segmenti} = \frac{\text{lato diviso} \times \text{diff. due altri lati}}{\text{somma detti lati}}$$

245. *Trovare il valore de' segmenti dell' angolo verticale.*

Sian *dati l'angolo verticale* ACB *e i due lati adjacenti* AC, BC.

Fig. 2 e 3. Si ha (211), CD = AC × cos.ACD = BC × cos.BCD. Dunque BC : AC :: cos.ACD : cos.BCD; e BC + AC : BC $\backsim$ AC :: (II. 13°) cot.$\frac{1}{2}$(BCD + ACD) : tang.$\frac{1}{2}$(BCD $\backsim$ ACD) :: (I. 32°) cot.$\frac{1}{2}$(BCD $\backsim$ ACD) : tang.$\frac{1}{2}$(BCD + ACD). Dunque per li due casi, ove la perpendicolare cada di dentro, o di fuori,

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\,BCD \overset{\backsim}{+} ACD = \text{cot.}\tfrac{1}{2}ACB \times \frac{BC \backsim AC}{BC + AC}; \text{ o pure}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\text{differ. o}\\ \text{somma}\end{matrix}\right\} \text{de' segmenti} = \text{cot.}\tfrac{1}{2}\text{ang. verticale} \times \frac{\text{differ. lati adjacenti}}{\text{somma lati stessi}}$$

246.

246. *Trovare il valore de' segmenti di un angolo formati da una linea che divide per mezzo il lato opposto.*

Si supponga AD = BD; e siano *dati l'angolo diviso* ACB, *e i due lati adjacenti* AC, BC. Fig. 10

Si ha (49), $CD = \frac{BD \text{ sen.B}}{\text{sen.BCD}} = \frac{AD \text{ sen.A}}{\text{sen.ACD}}$. E per conseguenza sen.BCD : sen.ACD :: sen.B : sen.A :: AC : BC. Quindi AC + BC : AC ∽ BC :: tang.½(BCD + ACD) : tang.½(BCD ∽ ACD); (II. 12ª). Laonde

$\text{tang.}\frac{1}{2}(\text{BCD} \backsim \text{ACD}) = \text{tang.}\frac{1}{2}\text{ACB} \times \frac{\text{AC} \backsim \text{BC}}{\text{AC} + \text{BC}}$; o pure

$\text{tang.}\frac{1}{2}\text{diff. de' segmenti} = \text{tang.}\frac{1}{2}\text{ang. diviso} \times \frac{\text{diff. lati adjacenti}}{\text{somma lati stessi}}$

247. Veniamo per ultimo a *risolvere un triangolo isoscele.*

Il triangolo isoscele si risolve come rettangolo, mediante una perpendicolare, la qual divide in due parti eguali la base, e l'angolo verticale. Le due seguenti analogie risolvono tutti i casi.

Un lato sta alla metà della base, come il raggio al coseno di un angolo alla base, o vero *come il raggio al seno della metà dell' angolo verticale.*

È facile il verificar queste proporzioni sopra una figura col soccorso della tavola (213).

248. Gli Esempj seguenti servano di norma per l'uso delle formole composte in questo Capitolo.

Sia AC una distanza di 585 piedi 5 ½ pollici, AB un' altra distanza di 55 piedi 3 ⅓ pollici; sia pur noto CAB = 143° 36'; e si cerchi la distanza BC. Fig. 3.

Questo è il caso della soluzione (IV. 3ª). Per poter prendere i logaritmi delle due distanze note, convien ridurle ad una sola denominazione comune, e libera da frazioni. Poichè un piede = 12 pollici, e un pollice = 12 linee, sarà AC = 84306 linee, e AB = 7960 lin. Quindi

$$\begin{aligned}
\log.AC &= 4,9258585 \\
\log.AB &= 3,9009131 \\
\text{somma} &\quad 8,8267716 \\
\text{metà} &\quad 4,4133858 \\
\log.2 &= 0,3010300 \\
\log.\text{sen.}\tfrac{1}{2}CAB = \log.\text{sen.}71^\circ\,48' &= 9,9777108 \\
\text{compl. log.}(AC - AB) = \text{compl. log.}76346 &= 5,1172137 \\
\text{somma, o log. tang.}a &= 9,8093403 \\
(200),\ \text{compl. log. cos.}a &= 0,0754710 \\
\log.(AC - AB)\ \text{preso dal suo compl. quì sopra} &= 4,8827863 \\
\text{somma, o log.BC} &= 4,9582573
\end{aligned}$$

E però BC = 90836 linee. Ho preso questo esempio al n°. 74 dell' Opera citata (161) del Sig. Abate Toaldo, che lo risolve col metodo ordinario, cioè cercando prima gli angoli ignoti per la formola (IV. 4ª), indi il lato per la 1ª. Egli trova BC = 91420, a cagion di un errore nell' addizione de' logaritmi. Con quel metodo si hanno da cercare otto logaritmi. Col nostro solamente sette, giacchè log. 2 si tiene a memoria per il continuo uso che se ne fa.

249. S' impieghino ora i medesimi valori dei tre lati per dare un esempio della formola (IV. 5ª), e si cerchi un angolo, come B. Se si vuole averlo con ogni esattezza, qual si sarebbe trovato per la 4ª avanti di conoscer BC, bisogna prender quì sopra il valor di BC con tutta la precisione, che il logaritmo può dare; e si ha BC = 90835,86. Segue il calcolo della formola.

$$\begin{aligned}
\log.\tfrac{1}{2}\text{somma tre lati} = \log.91550,93 &= 4,9616627 \\
\log.(\tfrac{1}{2}\text{somma} - AC) = \log.7244,93 &= 3,8600342 \\
\text{compl.log.}AB &= 6,0990869 \\
\text{compl.log.}BC &= 5,0417427 \\
\text{somma, o log. cos.}^2\,\tfrac{1}{2}B &= 9,9625265 \\
\text{mezza somma, o log.cos.}\tfrac{1}{2}B &= 9,9812632
\end{aligned}$$

Questo log. corrisponde a cos. $16° 42' 34'' \frac{1}{2}$, e però l'angolo cercato B $= 33° 25' 9''$. Il lettore studioso potrà esercitarsi a cercarlo con le formole (IV. 4ª e 6ª). Si osservi che l'uso del complemento aritmetico ha fatto risparmiare le sottrazioni di log. AB, e di log. BC.

250. Si dimanda la larghezza AD di un fiume che passa radendo un Castello CD. Sul margine A si prenda cogl' istromenti l'angolo CAD, che suppongo di $27° 42'$. Si ritroceda in un punto B, il qual sia nel medesimo piano verticale de' punti A e C; e si prenda l'angolo B, che suppongo di $16° 23'$. Si misuri la distanza orizzontale AB, che suppongo di 125 pertiche. Tanto basta per trovar il valore di AD, che è il segmento minore della base AB, del triangolo ABC, prolungata fino alla perpendicolare CD. Ecco il calcolo della formola (243), cercando per più comodo la metà del suo valore, il che si farà in tutte le altre consimili. Fig. 11.

$$\log.\text{sen.}(CAB - B) = \log.\text{sen.}\,135°55' = 9{,}842424$$
$$\text{compl.}\log.\text{sen.}(CAB + B) = \text{compl.}\log.\text{sen.}\,168°41' = 0{,}707232$$
$$\log.\tfrac{1}{2}AB = \log.62{,}5 = 1{,}795880$$
$$\text{somma, o } \log.\tfrac{1}{2}(BD \overset{\backsim}{+} AD) = 2{,}345536$$
$$\text{E però } \tfrac{1}{2}(BD \overset{\backsim}{+} AD) = 221{,}6$$
$$\text{sottraendo } \tfrac{1}{2}AB = 62{,}5$$
$$\text{si ha il segmento minore} = 159{,}1$$

Onde la larghezza cercata del fiume, o AD $= 159$ pertiche prossimamente.

CAPITOLO X.

Delle analogie differenziali de' triangoli rettilinei.

251. I DUE capitoli precedenti contengono le soluzioni di un triangolo rettilineo. Consideriamo adesso due triangoli che hanno due parti comuni, o vero un triangolo, il quale, conservando due parti costanti, riceva cangiamento nelle altre quattro. Cercheremo la ragione, che passa fra il cangiamento di una parte, e quello di un' altra, (le analogie contenenti questa ragione si appellano *analogie differenziali*); e questa ricerca applicata anche ai casi, dove una sola parte sia costante, o nessuna, finirà di somministrare la soluzione d' ogni problema determinato, la qual possa esser data dalla sola Trigonometria rettilinea. Tratterò questo argomento in maniera affatto nuova, componendo le analogie in modo generalissimo, sicchè siano applicabili rigorosamente ad ogni sorte di variazioni di qualunque grandezza. Nominerò queste analogie *differenziali finite*, e da esse dedurrò quelle che vengono date comunemente; le quali sono esatte per le variazioni infinitesime soltanto, e servono, per approssimazione, alle variazioni molto piccole: chiamerò *infinitesimali* queste ultime analogie.

Fig. 12 Siano due triangoli ABC, ABD, aventi il lato AB e l'angolo A comuni; o vero sia un triangolo ABC, il qual si converta in ABD, conservando *costanti un lato* AB *e un angolo adjacente* A.

Il lato AC divenendo AD riceve un aumento CD, che chiameremo δAC alla maniera del calcolo differenziale. Così sarà $BD = BC + \delta BC$. Similmente l'angolo B divenendo ABD riceve un aumento CBD, che chiameremo δB; ma perchè CBD è pur la diminuzione dell' angolo C che diventa D (essendo noto che l'angolo esteriore $C = D + CBD$), si ha $\delta B = \delta C$, colla sola differenza che queste variazioni sono in senso contrario.

Ciò posto, il triangolo BCD dà, (49), CD : sen.CBD :: BC :

sen.D :: BD : sen.C. Dunque, sostituendo le denominazioni assunte, si ha

$$\delta AC : \left\{ \begin{matrix} \text{sen.}\delta B \\ o - \text{sen.}\delta C \end{matrix} \right\} :: BC : \text{sen.}(C - \delta C) :: BC + \delta BC : \text{sen.}C.$$

252. Nell' uso di questa formola e delle susseguenti differenziali finite, bisogna, nelle espressioni sen.$(C - \delta C)$, $(BC + \delta BC)$, e simili, impiegare le *differenze* col segno che conviene al caso, il che è sempre facile da conoscere nella Trigonometria rettilinea. È chiaro, per esempio, alla sola ispezione della figura, che i cangiamenti di AC e di C devono sempre farsi in senso contrario, e per indicarlo ho dato segni contrarj a δAC, ed a sen.δC, (154). Se l'angolo C aumentasse, le analogie diverrebbero $-\delta AC : -$ sen.δB *o* $+$ sen.δC :: BC : sen.$(C + \delta C)$ :: $BC - \delta BC$: sen.C. Vedremo inoltre (266), che il segno di δBC dipende anche dalla specie dell' angolo C.

253. Supponendo che le variazioni siano infinitamente piccole, si potrà (140) mettere δB in luogo di sen.δB; (133), sen.C in vece di (sen.$C \mp \delta C$), e BC in cambio di $(BC \pm \delta BC)$; e così la formola (251) diviene

$$\delta AC : \delta B \ \textit{ovvero} - \delta C :: BC : \text{sen.}C.$$

Tale (se si neglige il segno negativo) è la forma ordinaria, sotto la quale si dà quest' analogia.

Avanti di seguitare la costruzione delle analogie differenziali, darò un primo saggio della loro utilità con un esempio, il qual servirà inoltre a riconoscere i limiti, dentro i quali possono adoperarsi le infinitesimali senza detrimento del calcolo, quando le variazioni sono bensì piccole, ma finite, e non infinitamente piccole.

254. Sia AC un' altezza che vuol sapersi col metodo (215). Si dimanda a qual distanza si debba metter l'Osservatore, perchè l'errore, che può commettere l'istromento nel prendere la misura dell' angolo ABC, produca il minimo errore possibile nel calcolo dell' altezza. Fig. 13

Fig. 13 È chiaro, che se, per esempio, l'angolo è preso un poco più grande del giusto, come ABD, l'altezza calcolata sarà AD in luogo di AC. Si vede dalla figura, che questi errori non influiscono sul lato AB, e sull' angolo A, che rimangono costanti. Però chiamando δB l'errore nell' angolo osservato, e δAC l'errore nel calcolo dell'altezza, l'analogia (253) dà, $\delta AC = \frac{BC \times \delta B}{\text{sen.} C}$, ovvero $\frac{\delta AC}{\delta B} = \frac{BC}{\text{sen.} C}$. Or si osservi che in questo problema si fa astrazione dal valore assoluto di δAC, e di δB, lo scopo essendo di determinare generalmente, quale debba essere in qualunque caso la distanza AB, perchè la ragione $\frac{\delta AC}{\delta B}$ abbia il minimo valore possibile. Per determinar questo bisogna eliminare una delle due quantità BC e C, dipendenti entrambe dalla situazione cercata del punto B. Ora, per essere in questo caso $A = 90°$, si ha (213, 8ª), $BC = \frac{AC}{\cos. C}$. Dunque $\frac{\delta AC}{\delta B} = \frac{AC}{\text{sen.} C \cos. C} = \frac{2\,AC}{\text{sen.} 2C}$, (I. 6ª). In questa espressione il numeratore 2 AC è una quantità costante che non dipende nè dall'errore δB, nè dalla distanza AB. Dunque il minimo valore di $\frac{\delta AC}{\delta B}$ avrà luogo quando sen. 2 C sarà il più grande possibile, cioè quando $C = 45°$. E però l' Osservatore avrà cura di porsi, quanto più potrà, ad una distanza AB $=$ AC.

Per convincersi, che la conclusione precedente è rigorosa, qualunque sia il valore di δB, quantunque l'equazione $\delta AC = \frac{2\,AC \times \delta B}{\text{sen.} 2C}$ non possa dare un valore esatto di δAC, se non quando δB sia infinitamente piccolo, come vedremo numericamente (258); si prenda l'analogia differenziale finita (251), $\delta AC : \text{sen.} \delta B :: BC : \text{sen.}(C - \delta C)$, che dà, sostituendo il valore di BC come qui sopra, $\frac{\delta AC}{\text{sen.} \delta B} = \frac{AC}{\text{sen.}(C - \delta C) \cos. C} = \frac{AC}{\text{sen.}(C - \delta C)\, \text{sen.} ABC} = \frac{2\,AC}{\cos.(C - \delta C - B) - \cos.(C - \delta C + B)}$, (II. 16ª). Ma $B = (90° - C)$; e $\delta C = \delta B$, (251), onde si ha $\cos.(C - \delta C + B) = \text{sen.} \delta B$. Dunque $\frac{\delta AC}{\text{sen.} \delta B} = \frac{2\,AC}{\cos.(C - \delta C - B) - \text{sen.} \delta B}$, nella quale espressione

si vede chiaro, che il minimo valore di $\frac{\delta AC}{sen.\delta B}$ ha luogo quando cos.$(C - \delta C - B)$ sia il più grande possibile, cioè quando $C = B + \delta C = B + \delta B$. Ma come non si sa se l'errore δB sia commesso dall' istromento in più, o in meno, e che nel secondo caso il minimo valore cercato si troverebbe aver luogo quando $C = B - \delta B$; così convenendo prendere il mezzo per sodisfare ai due casi, risulta dall'analogia rigorosa la stessa conseguenza somministrata dall' infinitesimale, cioè che deve essere $C = B$.

255. Si noti con quale facilità il calcolo differenziale risolva questa specie di problemi. Dico *il calcolo differenziale*, giacchè la formola (253), e tutte le altre infinitesimali, che troveremo quì appresso, possono ricavarsi, differenziando quelle equazioni trigonometriche, le quali contengono le costanti e le variabili, di cui si tratta ne' respettivi casi. Quì le costanti sono AB e A; le variabili, che si prendono in considerazione, sono AC e B. Dunque conviene differenziar l'equazione (IV. 77ª), scrivendola, per più comodo, come segue; $AB \times tang.B - AC \times cos.A\ tang.B = AC \times sen.A$. Ora il differenziale di AC è δAC, e $\delta tang.B = \frac{\delta B}{cos.^2 B}$, (II. 39ª). Dunque (131, 134), $\frac{AB\,\delta B}{cos.^2 B} - cos.A\ tang.B \times \delta AC - AC \times cos.A \times \frac{\delta B}{cos.^2 B} = sen.A\ \delta AC$. Raccogliendo, e trasportando, $\delta B\left(\frac{AB - AC\ cos.A}{cos.^2 B}\right) = \delta AC(sen.A + cos.A\ tang.B)$. Si moltiplichi l'equazione per cos.B, si ponga $\frac{AC\ sen.A}{tang.B}$ in luogo di $AB - AC\ cos.A$, (IV. 77ª), indi BC in luogo di $\frac{AC\ sen.A}{sen.B}$, (IV. 19ª), e sen.C in luogo di (sen.A cos.B + sen.B cos.A), (III. 85ª); e l'equazione diverrà $\delta B \times BC = \delta AC \times sen.C$, donde si cava l'analogia (253).

256. Or si provi di dare un valore finito a δB nell'esempio (254). Si supponga, che l'istromento possa commettere un errore di $30' = \delta B$, che siasi osservato $B = 45°$, e che sia la distanza misurata $AB = 83$ piedi. In tal caso $AB = AC$, e $sen.2C = 1$.

Fig. 13 Quindi $\delta AC = \frac{2AC \times \delta B}{\text{sen.} 2C} = 2 \times 83 \times 30'$. Per far questo calcolo parrà forse che fosse meglio aver ritenuto sen. δB come nella formola rigorosa (251), poichè si hanno delle tavole de' logaritmi de' seni; laddove per aver log. δB bisognerebbe prender nella tavola (AA) il valore dell'arco δB, indi cercare il log. di esso valore fra i log. de' numeri. Ma come le tavole di questi logaritmi portano ordinariamente in testa d'ogni pagina la riduzione de' numeri in gradi, minuti, e secondi, così divien facile il prendere, per esempio, log. 1800 in vece di log. $(30' = 1800'')$, poichè aggiungendo a log. 1800 il log. dell'arco di $1''$, che abbiamo preparato (192), e le cui prime note si tengono a memoria, si avrà il logaritmo cercato dell'arco di $30'$, essendo cosa evidente, che l'arco di $1800'' = 1800 \times$ l'arco di $1''$.

In generale questa operazione è più breve, che quella di cercare il log. del seno di un piccolo arco, massime quando quest' arco è espresso in minuti, secondi, e decime, come succede continuamente nell' uso delle analogie differenziali.

257. Facciamo ora il calcolo dell'equazione $\delta AC = 2 \times 83 \times 30'$.

$$\begin{aligned} \log.(2 \times 83 = 166) &= 2,220108 \\ \log. 1800 &= 3,255273 \\ (192), \log. 1'' &= \underline{4,685575} \\ \text{somma, o } \log. \delta AC &= 0,160956 \end{aligned}$$

Il numero corrispondente a questo log. è 1,4486; e però un errore di $30'$ nel prendere l'angolo B produce sull' altezza cercata AC un errore di piedi 1,4486.

258. Questo risultato non può essere affatto giusto, perchè un arco di $30'$ non è infinitamente piccolo. Impiegando la formola differenziale finita (251), e supponendo che l'angolo sia stato preso più grande del giusto, come indica la figura (altrimenti, se fosse stato preso più piccolo, bisognerebbe (252) cangiare i segni delle *differenze*), si ha $\delta AC = BC \times \frac{\text{sen.} \delta B}{\text{sen.}(C - \delta C)} = \frac{AB}{\cos. B} \times \frac{\text{sen.} \delta B}{\text{sen.} D} = \frac{AB \text{ sen.} \delta B}{\cos. B \cos.(B + \delta B)} =$

83 ×

$\frac{83 \times \text{sen.} 30'}{\cos. 45° \cos. 45° 30'}$. Facendo il calcolo, si troverà log. δAC $= 0,164773$, e δAC $= 1,4614$. Comparando questo risultato col precedente, apparisce l' errore della formola infinitesimale 0,0128, o sia $\frac{1}{80}$ di piede prossimamente, il che non merita alcuna attenzione. Ma perchè questo errore sarebbe maggiore a misura che B, AB e δB fossero maggiori di quello che fatti si sono in quest' esempio, importa sapere quando possa negligersi, e quando no.

259. In generale l'errore, di cui si tratta, dipende da due cause. La prima, e più tenue, sta nell' impiegare δB in luogo di sen. δB. Se si paragonano i log. de' seni, e quelli degli archi, si vedrà che da 0° fino a 1° circa, la differenza è insensibile ne' calcoli ordinarj, massime quando si cerca una piccola quantità. Per esempio, la differenza da log. 30' a log. sen. 30' non è altro che di 0,000006. Ora questa quantità di più o di meno nel log. δAC non altera niente affatto nel calcolo (257) il valore 1,4486 di δAC. Si prenda dunque per regola generale nelle analogie differenziali, che si può impiegar senza scrupolo δA, δB, &c., in luogo di sen. δA, sen. δB, &c., semprecchè l'arco δA, o δB, &c. non sia maggiore di 1°. All'incontro si avrà un errore tanto più grande, quanto più si eccederà questo limite.

È chiaro che δA potrà andare fino a 2°, quando nelle formole infinitesimali si avrà $\frac{1}{2}\delta$A in luogo di sen. $\frac{1}{2}\delta$A: ma, per tenere l'errore ne' limiti stessi, converrà che δA sia minore di 1° 30', quando si avrà $\frac{1}{2}\delta$A in luogo di tang. $\frac{1}{2}\delta$A; e che δA non sia maggiore di 1° 10', quando si avrà 1 in vece di cos. $\frac{1}{2}\delta$A: come è facile di comprendere con l'esame delle tavole.

260. La seconda causa, che ha prodotto tutto l'errore nel calcolo (257), sta nell' avere impiegato 2 in luogo di $\frac{1}{\cos. 45° \cos. 45° 30'}$ che è l'espressione esatta (258); il che è lo stesso, come se si dica, per aver impiegato nel denominatore cos. 45° in luogo di cos. 45° 30', giacchè $\cos.^2 45° = \frac{1}{2}$, (44). Basta aprire le tavole per vedere, che la differenza da coseno a coseno per un intervallo δB è molto

diversa, secondo è diversa la grandezza di B. Per esempio, sia $\delta B = 30'$. Se $B = 10°$, si ha cos. $10°$ — cos. $10°30' = 0,0015528$. Ma se $B = 80°$, si ha in vece cos. $80°$ — cos. $80°30' = 0,0086006$. Dunque si prenda per regola generale nelle analogie differenziali, che l'impiegare cos. A in vece di cos. $(A \pm \delta A)$ produce un errore tanto più grande, quanto A più s'accosta a $90°$. Si rileverà similmente dalle tavole, che l'impiegare 1°. sen. A in vece di sen. $(A \pm \delta A)$, 2°. tang. A in vece di tang. $(A \pm \delta A)$, 3°. cot. A in vece di cot. $(A \pm \delta A)$, deve produrre un errore tanto più grande, nel 1°. e nel 3°. caso quanto A è più piccolo, e nel 2°. caso quanto A più s'accosta a $90°$.

Qualunque volta però si giudichi che l'errore sia tale da non doversi negligere, le mie formole differenziali finite serviranno a correggere il risultato delle infinitesimali, o a fare immediatamente il calcolo con ogni precisione. Sarà bene scandagliare il secondo errore in tutti i casi, quando δA, o $\frac{1}{2}\delta A$, non sia minore di $30'$.

261. Per avere il log. di un arco, per esempio, il log. $30'$, abbiamo aggiunto (256) log. 1800 al log. dell' arco di $1''$. Questo è lo stesso, che dividere 1800 per il numero di secondi contenuti nell'arco eguale in lunghezza al raggio; ed è quest'arco in secondi quel che s'impiega comunemente. Di fatti sia R'' il numero di secondi contenuti in quest'arco: poichè $1800 \times$ arco $1'' =$ arco $1800''$, per la stessa ragione $R'' \times$ arco $1'' =$ arco $R'' = R = 1$; quindi arco $1'' = \frac{1}{R''}$, e però $1800 \times$ arco $1'' = \frac{1800}{R''}$.

262. Dall'equazione $R'' \times$ arco $1'' = 1$ si ha facilmente il valore di $R'' = \frac{1}{\text{arco } 1''}$. Il log. del raggio espresso in secondi non è dunque altro che il complemento aritmetico di log. $1''$, (192), e però

$$\log. R'' = 5,31442\ 51331\ 76459\ 48047.$$

Il numero corrispondente a questo log. è $206264,8 +$. Tale è

il numero di secondi contenuti nell' arco eguale al raggio : e però quest' arco è di $57^\circ\ 17'\ 44''\ 48'''$, &c. È facile ricavarlo dalla tavola (AA), e spinger più avanti l'approssimazione ai minuti quarti, quinti, &c.

Sottraendo da log. R'' il logaritmo di 60, preso nella tavola (BB), si ha il log. dell' arco eguale al raggio ed espresso in minuti, o sia

$$\log. R' = 3,53627\ 38827\ 92815\ 84796.$$

Sottraendo di nuovo da questo logaritmo quello di 60, si ha il log. dell' arco eguale al raggio ed espresso in gradi, o sia

$$\log. R^\circ = 1,75812\ 26324\ 09172\ 21545.$$

Col mezzo di questi tre logaritmi è tolta ogni fatica per cercare il log. di un arco della tavola (AA). Vogliasi, per esempio, il log. dell' arco di 40°. Prendendo fra i logaritmi de' numeri naturali quello di 40, e aggiungendovi il complemento di log. R°, si avrà il logaritmo cercato. Se l' arco fosse, per esempio, di $40^\circ\ 10' = 2410'$, si aggiungerebbe a log. 2410 il complemento di log. R'. Finalmente se l' arco fosse, per esempio, di $40^\circ\ 10'\ 9'',8 = 144609'',8$; prendendo fra i log. de' numeri naturali quello di 144609,8 e aggiungendovi il complemento di log. R'', si avrebbe il logaritmo richiesto.

263. Essendo importante di non dimenticarsi d' impiegare R'' nel calcolo delle analogie infinitesimali, lo inseriremo in tutte, ed anche nella (253), ripetendola insieme con la (251), onde siano vicine a tutte le altre, che or troveremo di seguito.

$$(251),\ \delta AC : \left\{ \begin{matrix} \text{sen.}\,\delta B \\ o - \text{sen.}\,\delta C \end{matrix} \right\} :: BC : \text{sen.}(C - \delta C) :: BC + \delta BC : \text{sen.}\,C$$

$$(253),\ \delta AC : \frac{\delta B}{R''}\ o - \frac{\delta C}{R''} :: BC : \text{sen.}\,C.$$

È chiaro in quest' ultima analogia, che quando δB sarà la cosa cercata, si avrà $\delta B = \frac{\delta AC \times \text{sen.}\,C \times R''}{BC}$; e così si avrà δB, δC, &c. in minuti e secondi dalle tavole de' log. de' numeri, (256). Ciò sia detto, perchè non resti alcuna difficoltà nell' uso

di R″, ed è facile farne prova, trattando δB come incognito nell' esempio (257). Seguitiamo la costruzione delle analogie differenziali.

Fig. 12 264. Il triangolo BCD dà (49), $BD : BC :: \text{sen.}BCD : \text{sen.}D$. Donde si cava, procedendo come (230), $\cot.\frac{1}{2}(BCD - D) : \text{tang.}\frac{1}{2}CBD :: BD + BC : BD - BC$. Sostituendo le denominazioni assunte (251), e osservando che $\cot.\frac{1}{2}(BCD - D) = \cot.\frac{1}{2}(180^\circ - C - D) = \text{tang.}\frac{1}{2}(C + D) = \text{tang.}(C - \frac{1}{2}\delta C)$, si avrà $\text{tang.}(C - \frac{1}{2}\delta C) : \text{tang.}\frac{1}{2}\delta B$ *o* (154) $- \text{tang.}\frac{1}{2}\delta C :: 2BC + \delta BC : \delta BC$. E però

$$\tfrac{1}{2}\delta BC : \left\{ \begin{matrix} \text{tang.}\frac{1}{2}\delta B \\ o - \text{tang.}\frac{1}{2}\delta C \end{matrix} \right\} :: BC + \tfrac{1}{2}\delta BC : \text{tang.}(C - \tfrac{1}{2}\delta C).$$

Questa formola rigorosa si riduce alla forma infinitesimale, ponendo $\frac{1}{2}\delta B$ in vece di $\text{tang.}\frac{1}{2}\delta B$, (153); e sopprimendo le *differenze* nell'ultima ragione, (253, 260); con che si ha

$$\delta BC : \frac{\delta B}{R''} \ o - \frac{\delta C}{R''} :: BC : \text{tang.}C.$$

Queste due analogie contengono la ragione fra il cangiamento del lato BC, e quello dell' angolo B, o dell' angolo C, quando AB ed A restano costanti come si è stabilito (251).

265. Il triangolo BCD dà, secondo la penultima formola (239), $\text{sen.}\frac{1}{2}(BCD - D) = \cos.\frac{1}{2}CBD \times \frac{BD - BC}{CD}$. Ma $\text{sen.}\frac{1}{2}(BCD - D) = \cos.(C - \frac{1}{2}\delta C)$, (264); e $\cos.\frac{1}{2}CBD = \cos.\frac{1}{2}\delta B = \cos.\frac{1}{2}\delta C$, giacchè il coseno resta positivo, benchè δC sia negativo, (154). Dunque $\cos.(C - \frac{1}{2}\delta C) = \cos.\frac{1}{2}\delta B \times \frac{\delta BC}{\delta AC}$. E però

$$\delta AC : \delta BC :: \cos.\tfrac{1}{2}\delta C : \cos.(C - \tfrac{1}{2}\delta C).$$

Quindi l'infinitesimale sarà, (140, 133)

$$\delta AC : \delta BC :: 1 : \cos.C.$$

266. Si noti nelle analogie precedenti (264, 265), che quando l'angolo C è ottuso, o, più rigorosamente parlando, quando $(C - \frac{1}{2}\delta C) > 90^\circ$, la tangente e il coseno di quest' angolo

essendo negativi (36), ne viene che allora BC cangia in senso contrario di B, egualmente che AC di BC. Questo è facile da conoscere con una figura; ma attesa l'applicazione de' segni ai differenziali nelle mie analogie, non si avrà bisogno di studio, nè di figura che rappresenti esattamente la specie degli angoli, solchè si osservino inoltre le regole de' segni (36, 42).

267. Siano ora *costanti un angolo e il lato opposto.*

Se il triangolo ABC si converte in ADE, di maniera che sia DE = BC, saranno A e BC costanti; e poichè la somma degli angoli d'un triangolo rettilineo è costante, sarà $\delta B = \delta C$, ma in senso contrario. Fig. 14

Ciò posto, poichè (49), AB sen.A = BC sen.C; differenziando (131, 139), si avrà δAB sen.A = BC 2 sen.$\frac{1}{2}\delta C$ × cos.(C + $\frac{1}{2}\delta C$). Ma sen.A : BC :: sen.C : AB. Dunque δAB sen.C = AB 2 sen.$\frac{1}{2}\delta C$ cos.(C + $\frac{1}{2}\delta C$), e per conseguenza

$$\tfrac{1}{2}\delta AB : \text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta C \;\; o \; - \text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta B :: AB : \frac{\text{sen.}C}{\text{cos.}(C + \frac{1}{2}\delta C)}.$$

Quindi l'infinitesimale sarà

$$\delta AB : \frac{\delta C}{R''} \;\; o \; \frac{-\delta B}{R''} :: AB : \text{tang.}C.$$

268. Si ha pure AC sen.A = BC sen.B. Differenziando, come sopra, e ponendo i segni ai differenziali a tenor della figura, si troverà similmente

$$-\tfrac{1}{2}\delta AC : -\text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta B \;\; o + \text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta C :: AC : \frac{\text{sen.}B}{\text{cos.}(B - \frac{1}{2}\delta B)}, \text{ e}$$

$$-\delta AC : -\frac{\delta B}{R''} \;\; o + \frac{\delta C}{R''} :: AC : \text{tang.}B.$$

269. Si dividano l'una per l'altra le analogie differenziali finite (267, 268), si avrà $\frac{\delta AB}{-\delta AC} : 1 :: \frac{AB}{AC} : \frac{\text{sen.}C \;\text{cos.}(B - \frac{1}{2}\delta B)}{\text{sen.}B \;\text{cos.}(C + \frac{1}{2}\delta C)}$ $:: 1 : \frac{\text{cos.}(B - \frac{1}{2}\delta B)}{\text{cos.}(C + \frac{1}{2}\delta C)}$, (49). E però

$$\delta AB : -\delta AC :: \text{cos.}(C + \tfrac{1}{2}\delta C) : \text{cos.}(B - \tfrac{1}{2}\delta B).$$

Quindi l'infinitesimale sarà

$$\delta AB : -\delta AC :: \text{cos.}C : \text{cos.}B.$$

Questa analogia si troverebbe pure dividendo l' una per l'altra le infinitesimali (267, 268).

Fig. 15 270. Se $A = 90° = D$, sviluppando $\cos.(C + \frac{1}{2}\delta C)$ nell' analogia differenziale finita (267), si ha $\delta AB = \frac{2\,\text{sen.}\frac{1}{2}\delta C \times AB}{\text{sen}\,C}$ $(\cos.C \cos.\frac{1}{2}\delta C - \text{sen.}C\ \text{sen.}\frac{1}{2}\delta C) =$ (I. 6ª) $AB\ \text{sen.}\delta C \times \cot.C - AB\ 2\,\text{sen.}^2\frac{1}{2}\delta C = AC\ \text{sen.}\delta C - AB + AB \cos.\delta C$, (213, 3ª), (I. 7ª). Ora $AB + \delta AB = BD$, e $\delta C = ACD = ABD$. Dunque

$$BD = AC\ \text{sen.}ACD + AB\ \cos.ACD.$$

Operando egualmente sull' analogia differenziale finita (268), e considerando che, per esser l'ipotenusa costante, se $BD = AB + \delta AB$, deve essere $CD = AC - \delta AC$, si troverà

$$CD = AC\ \cos.ACD - AB\ \text{sen.}ACD.$$

Se δC fosse negativo, cioè se fosse $BCA > BCD$, come sarebbe se si ponesse, nella fig. 15, A in luogo di D, e D in luogo di A, si troverebbe, procedendo col metodo stesso, e osservando che allora $BD = AB - \delta AB$, e $CD = AC + \delta AC$,

$$BD = AB\ \cos.ACD - AC\ \text{sen.}ACD.$$
$$CD = AC\ \cos.ACD + AB\ \text{sen.}ACD.$$

Se dunque in due triangoli rettangoli, che hanno l'ipotenusa comune, sia nota la differenza degli angoli che hanno il medesimo vertice, e si conoscano inoltre i due lati dell' uno de' triangoli; le due prime, o le due ultime equazioni ora date saranno comode per trovare i due lati dell'altro. Questo caso è frequente in Astronomia. Anzi, perchè talvolta, in vece di conoscer la differenza degli angoli, si conosce la somma, qual è ACD nella fig. 16, gioverà far vedere quì subito, che allora le due ultime equazioni pur servono, col solo cangiamento de' segni nella prima di esse.

Fig. 16 271. In fatti (213, 4ª), $BC = \frac{AB}{\text{sen.}BCA} = \frac{BD}{\text{sen.}BCD}$. Dunque $AB : BD :: \text{sen.}BCA : \text{sen.}(ACD - BCA) :: \text{sen.}BCA :$

$\text{sen.ACD} \cos.\text{BCA} - \text{sen.BCA} \cos.\text{ACD} :: 1 : \text{sen.ACD} \times \cot.\text{BCA} - \cos.\text{ACD}$, (9). E però $\text{BD} = \text{AB sen.ACD} \cot.\text{BCA} - \text{AB} \cos.\text{ACD}$. Ma (213, 17°), $\cot.\text{BCA} = \frac{\text{AC}}{\text{AB}}$. Dunque

$$\text{BD} = \text{AC sen.ACD} - \text{AB} \cos.\text{ACD}.$$

Collo stesso metodo, partendo dalle equazioni $\text{BC} = \frac{\text{AC}}{\cos.\text{BCA}} = \frac{\text{CD}}{\cos.\text{BCD}}$, si troverà

$$\text{CD} = \text{AC} \cos.\text{ACD} + \text{AB sen.ACD}.$$

272. Siano ora *due lati costanti*, come AB, AC, sicchè il triangolo ABC convertendosi in ABD, sia $\text{AD} = \text{AC}$. Fig. 17

Si ha (49), $\text{AC} : \text{AB} :: \text{sen.B} : \text{sen.C} :: \text{sen.ABD} : \text{sen.D}$. L'ultima proporzione fa vedere, che se $\text{ABD} > \text{B}$, deve essere anche $\text{D} > \text{C}$, purchè tutti questi angoli siano acuti, come si suppone sempre (229), malgrado ciò che possa rappresentar la figura, (215). Faremo dunque positivo δC, o sia $\text{D} = \text{C} + \delta\text{C}$, giacchè supponiamo con la figura, che sia $\text{ABD} > \text{B}$, ovvero $\text{ABD} = \text{B} + \delta\text{B}$.

Si ha dunque $\text{sen.}(\text{B} + \delta\text{B}) : \text{sen.B} :: \text{sen.}(\text{C} + \delta\text{C}) : \text{sen.C}$. E però (10), (II. 12°), $\text{tang.}\frac{1}{2}(\text{B} + \delta\text{B} + \text{B}) : \text{tang.}\frac{1}{2}(\text{B} + \delta\text{B} - \text{B}) :: \text{tang.}\frac{1}{2}(\text{C} + \delta\text{C} + \text{C}) : \text{tang.}\frac{1}{2}(\text{C} + \delta\text{C} - \text{C})$, e riducendo, e trasponendo

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\delta\text{B} : \text{tang.}\tfrac{1}{2}\delta\text{C} :: \text{tang.}(\text{B} + \tfrac{1}{2}\delta\text{B}) : \text{tang.}(\text{C} + \tfrac{1}{2}\delta\text{C}).$$

Quindi l'infinitesimale sarà

$$\delta\text{B} : \delta\text{C} :: \text{tang.B} : \text{tang.C}.$$

Si noti, che quì il divisore R'' è inutile, poichè dovrebbe applicarsi egualmente a δB, come a δC.

273. Dal triangolo BCD, col metodo tenuto (264), si ha $\cot.\frac{1}{2}(\text{BDC} - \text{BCD}) = \text{tang.}\frac{1}{2}\text{CBD} \times \frac{\text{BC} + \text{BD}}{\text{BC} - \text{BD}} = \text{tang.}\frac{1}{2}\delta\text{B} \times \frac{2\,\text{BC} - \delta\text{BC}}{-\,\delta\text{BC}}$, supponendo $\text{BC} > \text{BD}$, come deve essere (A essendo acuto), a causa di $\text{BAC} > \text{BAD}$. Ma $\text{BDC} - \text{BCD} = \text{D} +$

ADC — (ACD — C) = D + C, a cagione del triangolo isoscele ACD. Dunque cot. $\frac{1}{2}$(D + C), o vero cot.(C + $\frac{1}{2}\delta$C) = tang.$\frac{1}{2}\delta$B $\times \frac{2(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}{-\delta BC}$. E però

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\delta B : -\tfrac{1}{2}\delta BC :: \text{cot.}(C + \tfrac{1}{2}\delta C) : BC - \tfrac{1}{2}\delta BC; \text{ e}$$

$$\frac{\delta B}{R''} : -\delta BC :: \text{cot.}C : BC.$$

274. Si dividano l'una per l'altra le analogie differenziali finite (272, 273), e si avrà

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\delta C : -\tfrac{1}{2}\delta BC :: \text{cot.}(B + \tfrac{1}{2}\delta B) : BC - \tfrac{1}{2}\delta BC.$$

Conseguentemente

$$\frac{\delta C}{R''} : -\delta BC :: \text{cot.}B : BC.$$

275. Nel triangolo BCD si ha, per l'ultima formola (239), cos.$\frac{1}{2}$(BDC — BCD) = sen.$\frac{1}{2}$CBD $\times \frac{BC + BD}{CD}$ = sen.$\frac{1}{2}\delta$B $\times \frac{2(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}{CD}$. Ora (247), $\frac{1}{2}$CD = AC sen.$\frac{1}{2}$CAD = — AC sen.$\frac{1}{2}\delta$A, chiamando A l'angolo BAC, che diminuisce divenendo BAD; e $\frac{1}{2}$(BDC — BCD) = C + $\frac{1}{2}\delta$C, (273). Dunque cos.(C + $\frac{1}{2}\delta$C) = sen.$\frac{1}{2}\delta$B $\times \frac{BC - \frac{1}{2}\delta BC}{-AC\ \text{sen.}\frac{1}{2}\delta A}$. E però

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta B : -\text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta A :: AC\,\text{cos.}(C + \tfrac{1}{2}\delta C) : BC - \tfrac{1}{2}\delta BC.$$

Quindi l'infinitesimale

$$\delta B : -\delta A :: AC\ \text{cos.}C : BC.$$

Fig. 18

276. Applicando la soluzione medesima alla fig. 18, dove ABC convertendosi in AEC, si ha AB = AE, BCE = δC, E = B + δB, CE = BC — δBC, e BAE = — δA, si troverà similmente cos.$\frac{1}{2}$(CEB — CBE) = cos.(B + $\frac{1}{2}\delta$B) = sen.$\frac{1}{2}\delta$C $\times \frac{2(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}{BE}$ = sen.$\frac{1}{2}\delta$C $\times \frac{BC - \frac{1}{2}\delta BC}{-AB\ \text{sen.}\frac{1}{2}\delta A}$. E però

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta C : -\text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta A :: AB\,\text{cos.}(B + \tfrac{1}{2}\delta B) : BC - \tfrac{1}{2}\delta BC.$$

E per conseguente

$$\delta C : -\delta A :: AB\ \text{cos.}B : BC.$$

277.

277. Si dividano l' una per l' altra le analogie differenziali finite (273, 275), e così pure le altre (274, 276); si troverà

$$-\tfrac{1}{2}\delta BC : -\text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta A :: AC\ \text{sen.}(C+\tfrac{1}{2}\delta C) : \cos.\tfrac{1}{2}\delta B$$

$$-\tfrac{1}{2}\delta BC : -\text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta A :: AB\ \text{sen.}(B+\tfrac{1}{2}\delta B) : \cos.\tfrac{1}{2}\delta C$$

Quindi le infinitesimali saranno

$$-\delta BC : -\frac{\delta A}{R''} :: AC\ \text{sen.}C : 1$$

$$-\delta BC : -\frac{\delta A}{R''} :: AB\ \text{sen.}B : 1$$

278. Se *due angoli* sono *costanti*, e per conseguenza anche il terzo; facendo variare i lati, si hanno due triangoli simili, dove le variazioni de' lati sono proporzionali ai lati medesimi, o vero (49) ai seni degli angoli opposti agli stessi lati. Questa soluzione appartiene più propriamente alla Geometria.

279. Al bisogno, sarà più comodo il ricercare nella tavola seguente le analogie differenziali composte fin quì. Avendo nella medesima espresso le infinitesimali nel modo più gradito generalmente, cioè col nome delle parti del triangolo, ho omesso per brevità R″; e converrà supplirlo nel calcolo, come diciamo a piè della tavola. Ogni analogia *infinitesimale* essendo posta sotto la sua corrispondente *finita*, si avrà sotto l' occhio in questa ciò che sta negletto nell' altra; il che servirà d' avvertimento per tenerne conto nel calcolo, quando sia d' uopo, e si possa farlo. Le analogie differenziali finite danno il valore esatto di una qualunque delle quantità contenute in ogni analogia. Non così le infinitesimali; che non sono atte a dare, che prossimamente, il valore finito di uno dei due differenziali contenuti in ciascuna. E se non fosse un differenziale quel che si cerca, ma se, per esempio, conoscendo δAC, e δBC, si cercasse l' angolo C per mezzo dell' analogia (265), $\delta AC : \delta BC :: 1 : \cos.C$, l'errore potrebbe esser grave; giacchè in generale, *nell' uso stesso delle formole rigorose, è cosa pericolosa il cercar le quantità grandi per mezzo delle piccole*, poichè un error tenue ne' piccoli dati può produrre un errore

S

considerabile nella quantità grande che si cerca : se ne vedrà un esempio (799). All' incontro, se nella stessa analogia sia noto uno dei due differenziali, per trovar l' altro molto prossimamente, basta conoscere presso poco l' angolo C. L' errore in una quantità grande, come si suppone cos.C per rispetto ai differenziali, produce ordinariamente un errore insensibile sopra una piccola quantità, qual si suppone il differenziale cercato. Se ne è veduto un esempio (258).

Dalle cose dette risulta, che il calcolo delle analogie infinitesimali è sommamente comodo, poichè, fra gli altri avvantaggi, non esige che s'impieghino le linee trigonometriche con tener conto dei minuti secondi negli archi ad esse corrispondenti.

TAVOLA DELLE ANALOGIE DIFFERENZIALI, FINITE E INFINITESIMALI, *dimostrate* (263 a 277).

Costanti AB, A; *un lato, e un angolo adjacente.*

1ª ANAL. $\delta AC : \left\{ \begin{matrix} \text{sen.}\,\delta B \\ o - \text{sen.}\,\delta C \end{matrix} \right\} :: BC : \text{sen.}(C - \delta C) :: BC + \delta BC : \text{sen.}\,C$

(M)... La variazione del *lato adjacente all' angolo costante* sta alla variazione di *uno degli angoli*, come il lato opposto all' angolo costante sta al seno dell' angolo opposto al lato costante.

2ª $\frac{1}{2}\delta BC : \left\{ \begin{matrix} \text{tang.}\,\frac{1}{2}\delta B \\ o - \text{tang}\,\frac{1}{2}\delta C \end{matrix} \right\} :: BC + \frac{1}{2}\delta BC : \text{tang.}(C - \frac{1}{2}\delta C).$

(N)... La variazione del *lato opposto all' angolo costante* sta alla variazione di *uno degli angoli*, come il detto lato sta alla tangente dell' angolo opposto al lato costante.

3ª $\delta AC : \delta BC :: \cos.\frac{1}{2}\delta C : \cos.(C - \frac{1}{2}\delta C).$

(O)... La variazione del *lato adjacente all' angolo costante* sta alla variazione del *lato opposto*, come il raggio al coseno dell' angolo opposto al lato costante.

Costanti BC, A; *un lato, e l'angolo opposto.*

4ª $\frac{1}{2}\delta AB : \text{sen.}\frac{1}{2}\delta C$ *o* $- \text{sen.}\frac{1}{2}\delta B :: AB : \frac{\text{sen.}C}{\text{cos.}(C + \frac{1}{2}\delta C)}$.

5ª $- \frac{1}{2}\delta AC : \text{sen.}\frac{1}{2}\delta C$ *o* $- \text{sen.}\frac{1}{2}\delta B :: AC : \frac{\text{sen.}B}{\text{cos.}(B - \frac{1}{2}\delta B)}$.

(P)... La variazione di *un lato* alla variazione di *un angolo*, come il medesimo lato alla tangente dell'angolo opposto.

6ª $\delta AB : -\delta AC :: \text{cos.}(C + \frac{1}{2}\delta C) : \text{cos.}(B - \frac{1}{2}\delta B)$.

(Q)... Le variazioni de' *lati* sono proporzionali ai coseni degli angoli opposti.

Costanti AB, AC; *due lati.*

7ª $\text{tang.}\frac{1}{2}\delta B : \text{tang.}\frac{1}{2}\delta C :: \text{tang.}(B + \frac{1}{2}\delta B) : \text{tang.}(C + \frac{1}{2}\delta C)$.

(R)... Le variazioni degli *angoli opposti ai lati costanti* sono proporzionali alle tangenti degli angoli stessi.

8ª $- \frac{1}{2}\delta BC : \text{tang.}\frac{1}{2}\delta B :: BC - \frac{1}{2}\delta BC : \text{cot.}(C + \frac{1}{2}\delta C)$.

9ª $- \frac{1}{2}\delta BC : \text{tang.}\frac{1}{2}\delta C :: BC - \frac{1}{2}\delta BC : \text{cot.}(B + \frac{1}{2}\delta B)$.

(S)... La variazione del *lato* sta a quella di *un angolo adjacente*, come il medesimo lato alla cotangente dell' altro angolo adjacente.

10ª $-\text{sen.}\frac{1}{2}\delta A : \text{sen.}\frac{1}{2}\delta B :: BC - \frac{1}{2}\delta BC : AC\,\text{cos.}(C + \frac{1}{2}\delta C)$.

11ª $-\text{sen.}\frac{1}{2}\delta A : \text{sen.}\frac{1}{2}\delta C :: BC - \frac{1}{2}\delta BC : AB\,\text{cos.}(B + \frac{1}{2}\delta B)$.

(T)... La variazione dell' *angolo opposto al lato variabile* sta a quella di *un angolo adjacente*, come il lato variabile sta al lato costante, che è opposto al detto angolo adjacente, moltiplicatò pel coseno dell'altro angolo adjacente.

12ª $-\text{sen.}\frac{1}{2}\delta A : -\frac{1}{2}\delta BC :: \text{cos.}\frac{1}{2}\delta B : AC\,\text{sen.}(C + \frac{1}{2}\delta C)$.

13ª $-\text{sen.}\frac{1}{2}\delta A : -\frac{1}{2}\delta BC :: \text{cos.}\frac{1}{2}\delta C : AB\,\text{sen.}(B + \frac{1}{2}\delta B)$.

(V)... La variazione dell' *angolo opposto al lato variabile* è a quella del *detto lato*, come il raggio sta al seno di uno degli altri due angoli, moltiplicato per il lato costante che gli è contiguo.

Si avverta, che nelle analogie infinitesimali noi supponiamo sempre che *le variazioni degli angoli* (le quali si prendono in secondi) sieno divise per R", (262).

280. Le analogie precedenti, e massime le infinitesimali, possono moltiplicarsi col mezzo di sostituzioni. Per esempio, se si cercasse il valore di uno dei differenziali nell'analogia (267), $\delta AB : \delta C :: AB : \text{tang.}C$, e che non fosse noto il lato AB, ma si conoscessero gli angoli B, C, e il lato AC, potrebbe trovarsi con questi dati il valore numerico del lato $AB = \frac{AC\,\text{sen.}C}{\text{sen.}B}$, per poi impiegarlo nella suddetta analogia. Ma, se in vece di sostituire il valore numerico di AB, si sostituisce il suo valore analitico dato ov ora, l'analogia diverrà, $\delta AB : \delta C :: AC\ \cos.C : \text{sen.}B$, e il calcolo sarà più spedito. Lo stesso si dica, se si conoscessero AB, AC, e A; e se l'angolo C fosse ignoto: sostituendo il valore (229) di tang.C, si avrà $\delta AB : \delta C :: AC - AB\ \cos.A : \text{sen.}A$. Si faranno dunque queste sostituzioni secondo il bisogno; omettendole noi quì, perchè abbiamo proposto di estenderci maggiormente nelle Analogie differenziali della Trigonometria sferica, che sono di maggior uso, ed alle quali potrà ricorrersi anche per la rettilinea, essendo facile di ridurle agli usi della medesima, come si vedrà (727).

281. Due sono i modi per calcolare le analogie differenziali finite, quando anche la seconda ragione contiene il differenziale cercato: per esempio, suppongo che si cerchi δC per l'analogia (279, 1°), che dà $-\text{sen.}\delta C = \frac{\delta AC}{BC} \times \text{sen.}(C - \delta C)$.

Il primo modo è il seguente, indicato anche (163 verso il fine). Non potendosi impiegare nel calcolo sen.$(C - \delta C)$, poichè δC è ignoto, s'impieghi sen.C, e si avrà un valor prossimo di δC, purchè δC sia notabilmente più piccolo di C. Con questo valor prossimo di δC si sostituisca nel calcolo sen.$(C - \delta C)$ in luogo di sen.C, e si avrà un altro valore più prossimo di δC. Se questo secondo valore non fosse ancora sì esatto, come si desidera; impiegandolo in vece del primo, se ne troverebbe un terzo molto più esatto; e così discorrendo. Ordinariamente il calcolatore comprende dal primo calcolo qual sia presso poco il valore esatto di

δC, ed ottiene il suo intento con una sola correzione di sen.C in sen.(C — δC).

282. Il secondo modo consiste in risolvere l' equazione, riducendo l'incognita da una sola parte: ma in questa operazione non si deve tener conto del segno negativo di sen.δC, che sarebbe di nocumento, e che fu da noi applicato solamente per indicare che C diminuisce quando AC aumenta (252). Si sviluppi sen.(C — δC), (II. 2ª), e dividendo l'equazione per sen.δC, si avrà

$$\text{cot.}\delta C = \frac{BC + \text{cos.}C \times \delta AC}{\text{sen.}C \times \delta AC}$$

Per altro questo modo non è comodo all' uso de' logaritmi; ed inoltre dà in certi casi un' equazione complicata di secondo grado, come, per esempio, se si cercasse δC per l'analogia (279, 2ª), sviluppando tang.(C — $\frac{1}{2}\delta$C), (II. 6ª).

283. *Se una parte sola del triangolo sia costante*, le stesse analogie (279) serviranno; ma *bisogna conoscere due variazioni per poter trovar tutte le altre.* Parlo delle analogie infinitesimali solamente, giacchè rare volte potrà applicarsi il metodo seguente alle differenziali finite, a cagione che esigono molti dati, e poco si accomodano alle sostituzioni.

Sia il triangolo DTS, il qual si converta in DES, conservando costante il solo lato DS. Sia noto il valore di EDT = + δD, e quello di TSE = + δS. Si cerchi, per esempio, la variazione di DT che divien DE. Fig. 19.

Prolungando, se fa bisogno, DT finchè s'incontri in SE, si consideri prima il triangolo DTS convertito in DRS, conservando costanti *un lato* DS, *e un angolo adjacente* D. Poichè si conosce δS, si avrà la variazione TR di DT, che in questo caso è *il lato adjacente all' angolo costante* D, dall' analogia (M), (279), che dà δDT : δS :: TS : sen.T. Osservo che S è l'angolo variabile adjacente al lato costante, e che però tiene il luogo di B nell'analogia (279, 1ª). Concludo che, δS essendo dato positivo, qual è ivi δB, δDT deve essere positivo, poichè corrisponde a δAC.

Tale ce lo dimostra la fig. 19; ma in generale non conviene fidarsi delle figure in questa specie di soluzioni. Si ha dunque $\delta DT = \delta S \times \frac{TS}{sen.T}$.

Questa equazione dà la differenza da DT a DR. Per aver la differenza cercata da DT a DE, resta da conoscere quella da DR a DE. Si consideri il triangolo DSR convertito in DSE, conservando costanti *un lato* DS *e un angolo adjacente* DSR. Poichè si conosce δD, e si cerca la variazione di DR, che è *il lato opposto all' angolo costante*, l'analogia conveniente al caso sarà la (N), (279); e si avrà $\delta DR : \delta D :: DR : tang.R$. Osservo che D corrisponde a B nell'analogia (279, 2°), e ragionando come quì sopra conchiudo che δDR deve essere positivo. Dunque conviene aggiungere il valore di δDR a quello trovato prima di δDT nel triangolo DTS, o sia di DR — DT, per avere il valore intiero cercato di δDT, o di DE — DT. E però $\delta DT = \delta S \times \frac{TS}{sen.T} + \delta D \times \frac{DR}{tang.R}$. Ponendo DT in vece di DR, e T in vece di R, come si è fatto sempre nelle analogie infinitesimali, dove s' impiegano solamente le parti del triangolo primitivo ABC, a cui corrisponde DTS in questo caso, si avrà

$$\delta DT = \frac{TS\ \delta S + DT\ cos.T\ \delta D}{sen.T}$$

284. Essendo *costante una sola parte del triangolo,* che chiamo *prima*, ed essendo date le variazioni di due altre parti, che chiamo *seconda*, e *terza*, il metodo generale, per conoscere la variazione di un'altra qualunque delle tre rimanenti parti del triangolo, che chiamo *quarta*, sarà dunque il seguente.

Considerando *costanti la prima e la seconda*, si prenderà nella tavola (279) l'analogia conveniente per calcolare la variazione o l'effetto, che produce sulla *quarta* il cangiamento cognito della *terza*. Considerando *costanti la prima e la terza*, si troverà similmente l'effetto, che produce sulla *quarta* il cangiamento cognito della *seconda*. La somma di questi due effetti sarà in tutti i casi la

variazione cercata. Dico *la somma in tutti i casi*, perchè suppongo che si prendano le analogie infinitesimali nella tavola (279), con dare ai differenziali que' segni che si troveranno avere nelle analogie finite corrispondenti, o i segni contrarj quando i dati lo esigano (252, 283). Si vedranno diverse applicazioni di questo metodo (782, 785, &c).

L'aver noi dunque tenuto conto de' segni dei differenziali nel comporre le analogie, dispensa dal formare figure esatte, che talvolta sarebbero complicate ed imbarazzanti, e nel caso di cui si tratta, e molto più nel seguente.

285. *Allorchè nessuna parte del triangolo è costante, conoscendo tre variazioni, si troveranno tutte le altre* col metodo stesso. Essendo date le variazioni di tre parti del triangolo, che chiamo *prima, seconda,* e *terza*: per conoscere la variazione di una qualunque delle altre tre parti del triangolo, che chiamo *quarta*; supponendo *costanti la prima e la seconda*, si troverà, come sopra, l'effetto che produce sulla *quarta* il cangiamento cognito della *terza;* supponendo *costanti la prima e la terza*, si troverà l'effetto che produce sulla *quarta* il cangiamento cognito della *seconda;* e supponendo *costanti la seconda e la terza*, si troverà l'effetto che produce sulla *quarta* il cangiamento cognito della *prima.* La somma di questi tre effetti, presi coi loro segni rispettivi, sarà l'effetto totale, o la variazione cercata.

La tavola (279) somministra dunque le analogie differenziali per tutti i casi possibili. Aggiungerò solamente ancora alcune espressioni, che vengono usate frequentemente nell' Analisi infinitesimale.

286. In un triangolo rettilineo rettangolo, *la differenza dall'ipotenusa al lato maggiore, quando è molto piccola, è uguale alla metà del quadrato del lato minore, divisa per l'ipotenusa.*

Poichè in un triangolo ABC rettangolo in A si ha (213, 14°), Fig.20 $BC - AB = \frac{AC^2}{BC + AB}$; chiamando δBC la differenza dall'ipote-

Fig.20 nusa BC al lato maggiore AB, ne segue che $AB = BC - \delta BC$, e però $BC - AB = \frac{AC^2}{2BC - \delta BC} = \frac{AC^2}{2(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}$. Quando δBC è molto piccolo respettivamente a BC, si può metter BC in luogo di $(BC - \frac{1}{2}\delta BC)$, (253). Dunque $BC - AB = \frac{\frac{1}{2}AC^2}{BC}$.

287. *Il seno verso di un arco molto piccolo è uguale alla metà del quadrato dell' arco stesso.*

Se con l'ipotenusa per raggio si descrive l'arco CD fino all' incontro di AB prolungato, si vedrà che $BC - AB = AD =$ sen.v. CD, (4), e che $AC =$ sen.CD. Ma quando il seno è molto piccolo, si può prendere l'arco in sua vece (259). Con queste sostituzioni l'equazione finale dell' articolo precedente diviene sen.v. $CD = \frac{\frac{1}{2}CD^2}{BC} = \frac{1}{2}CD^2$, se si fa al solito il raggio $BC = 1$.

Questo è il valore che dà pure la seconda equazione (154), giacchè sen.v. $A = 1 - \cos.A = \frac{1}{2}A^2$, se si negligono le potenze ulteriori di A, che hanno un valore insensibile respettivamente ad A^2, quando A è molto piccolo.

288. *L'eccesso della secante sul raggio, quando l'arco è molto piccolo, è uguale alla metà del quadrato dell'arco stesso.*

DE essendo la tangente, e BE la secante (7) del piccolo arco CD, si cerca il valore di CE, che anche si chiama *la distanza della tangente dall'arco*. Ora $AB : BC :: AD : CE = \frac{BC \times AD}{AB} = \frac{BC \times \frac{1}{2}CD^2}{BC - \delta BC}$, (287, 286). Dunque, negligendo come sopra δBC, resta $CE = \frac{1}{2}CD^2$.

Quindi si vede, che nel calcolo infinitesimale *il seno verso si considera eguale all' eccesso della secante sul raggio.*

Un' espressione esatta di questo eccesso, la qual può esser comoda in qualche caso, si ha dalla formola (I. 27²), che dà $\frac{1}{\cos.A} - 1$, o vero sec.$A - 1 =$ tang.A tang.$\frac{1}{2}$A.

CAPITOLO

CAPITOLO XI.

Pratiche della Trigonometria rettilinea sul terreno.

289. PARLEREMO in primo luogo della maniera di prendere la misura attuale di una distanza e di un angolo, giacchè queste sono le operazioni fondamentali che forniscono i dati per calcolar le altre parti ignote d'un triangolo, come si sarà già osservato negli esempj (48, 50, 215, &c.). Essendo molto più facile la misura degli angoli, che quella de' lati, si misura ordinariamente un lato solo; e questo si chiama *la base.*

Della maniera di misurare la base.

Sia proposto di misurare sopra il terreno la distanza AB.

Fig.21

Si comincierà dal piantare verticalmente, col mezzo del filo a piombo, due pali ben dritti AC, BD, ne' punti estremi A e B. Questi pali, che alcuni anche chiamano paline o biffe, sogliono avere la punta inferiore armata di ferro, per maggior facilità di piantarli, e la punta superiore guarnita di una cartuccia, per agevolare la direzione del raggio visuale figurato dalla linea punteggiata CD. Stando l'Osservatore con l'occhio in C o in D, farà piantare di tratto in tratto altri pali a piombo, e che siano nel tempo stesso sulla direzione, o sia nel piano verticale, del raggio visuale CD, (*piano verticale* è quello che prolungato mentalmente passa per il centro della Terra, che noi supporremo sferica in tutto questo Capitolo, giacchè la sua ellitticità è affatto insensibile nelle operazioni, di cui si tratta). Queste paline si moltiplicano quanto bisogna, perchè il perticatore, tenendo l'occhio ad esse, possa seguitar misurando la linea dritta AB senza appartarsi nè a destra, nè a sinistra. Volendo proceder con più sicurezza, si farà un piccolo solco da A fino in B, stando spesso con l'occhio nel piano

T

Fig.21 verticale delle paline per fare il solco ben dritto; o vero si tirerà una cordicella da una palina all'altra. La misura si prende poi con un compasso grande, o con una catenella di grosso filo di ferro, o con la pertica adottata nel paese. Tanto la lunghezza della catenella, quanto l'apertura del compasso, o sia la distanza delle due punte, giova che siano parti aliquote della pertica, o di qualche misura ben nota. Il compasso deve esser formato solidamente, e tale che non possa cangiar di apertura durante l'operazione. Si porranno successivamente le punte del compasso, o la catenella ben tesa, o la pertica, nel solco, o rasente la cordicella; e così si potrà misurare, con precisione, di quante pertiche sia la distanza AB. Se si hanno due pertiche, si opererà più speditamente, e con più sicurezza, mettendo successivamente in contatto le loro teste, sicchè la pertica prima diventi seconda, e così alternativamente.

290. Questa misura suppone che il terreno sia tutto piano da A fino in B; e la distanza misurata si chiama allora *distanza orizzontale*. In rigor matematico, due punti della superficie terrestre, per quanto siano vicini fra essi, non possono aver gli orizzonti loro in un medesimo piano, a cagione della sfericità della Terra. Ma la differenza dall' arco alla corda è insensibile affatto in questa sorte d'operazioni. Le basi più lunghe, che siano state misurate fin oggi, vanno a 36000 piedi di Parigi circa. Questa distanza corrisponde ad un arco un poco più grande di 6'; il che si trova con la proporzione seguente: *Il raggio della Terra espresso in piedi* (223), *è ad un arco terrestre espresso in piedi, come il raggio della tavola* (AA), *o sia* 1, *è ad un arco della tavola stessa.* Chiamando A quest' arco, si ha dunque $A = \frac{36000}{19630000}$. La differenza dall'arco alla corda è $\frac{1}{24} A^3$, negligendo i termini ulteriori dell'ultima serie (152), come insensibili. Questa differenza in parti di $R = 1$ è dunque $(\frac{36}{19630})^3 \times \frac{1}{24}$. Conviene moltiplicare questo valore per il raggio della Terra, o sia per $R = 19630000$, onde aver detta differenza espressa in piedi, o frazion di piede; e si trova che un arco della Terra lungo 36000 piedi è maggior della corda, che gli è sottoposta,

di $\frac{5}{1000}$ di piede solamente : donde si vede che un tale arco può prendersi senza il minimo scrupolo per una linea retta, in qualunque sorte di operazione più dilicata di geodesía. Quando l'arco si voglia in minuti e secondi, si porrà R'', (262), in vece di 1, nell'analogia data quì sopra.

291. Se il terreno della base fosse inclinato, ed ineguale, si procederà come segue. Stabilita la dirittura della base BC con le paline, &c., si prenderà la misura, tenendo sempre (292) le pertiche orizzontali, come *ac, be*, &c. Le perpendicolari punteggiate DC, E*c*, &c., rappresentano il filo a piombo, il qual deve radere le teste delle due pertiche, superiore, e inferiore, onde assicurarsi che dove una finisce, comincia l'altra; senza la qual condizione è evidente che la misura non sarebbe giusta. Con tale operazione la somma delle pertiche *ac, be, dm, h*B è uguale alla distanza orizzontale AC dei punti B, e C. Fig.22

Se poi si cerca *la distanza effettiva* BC dei punti medesimi, si potrebbero misurare a mano a mano le altezze *a*C, *bc*, *de*, *hm*, la somma delle quali è uguale ad AB: per il che conoscendo AC e AB, si ricaverebbe col calcolo (213, 18°) la lunghezza dell' ipotenusa BC. (Se il terreno monta e discende alternativamente, è chiaro che, per avere AB, convien sottrarre la somma delle differenze di altezza delle pertiche nel discendere, dalla somma delle differenze nell' ascendere). Ma la misura di AB si prende più facilmente con la livellazione ordinaria che si usa da ogni Ingegnere, ed Agrimensore. Più agevole ancora è l'uso del barometro (311). Finalmente la via più breve è di prender cogl'istromenti (296 e segg.) la misura dell' angolo ACB, col quale e col lato AC, si trova BC, (213, 8°).

292. Per tenere le pertiche orizzontali nella misura de' terreni inclinati si fa uso del livello. Ve ne ha di più specie e di più forme. La fig. 23 rappresenta un *livello d'aria*. Un tubo di vetro FE, chiuso ermeticamente, è ripieno di qualche liquore, il più delle volte di spirito di vino, nel quale galleggia una bolla d'aria.

Posando questo stromento sopra la pertica, si alzerà, o abbasserà la testa della pertica, che è in aria, (per esempio, la testa *a* della pertica *ac* nella fig. 22) finchè la bolla si fermi in G nella parte di mezzo del tubo, che suole esser segnata con due tratti. Allora la pertica sarà parallela all' orizzonte.

293. Le cose dette sono più che sufficienti per le misure ordinarie inservienti all' Agrimensura, alla Topografia ed alla Geografia. Nelle intraprese più delicate, come sarebbe quella di determinar la lunghezza di un grado della Terra, bisogna usare molte altre avvertenze più scrupolose, che noi omettiamo quì per non dilungarci inutilmente, giacchè in tali casi è indispensabile d'aver sotto gli occhi i Trattati particolari, come, per esempio, *la Figure de la Terre, par Bouguer*, e quello intitolato *de Expeditione litteraria, Romae*, 1755, dove l' insigne Matematico P. Boscovich ha dato un tesoro di metodi ingegnosi d'Astronomia pratica, e di soluzioni d'un gran numero di problemi astrusi, relativi alla figura della Terra, cavate dalla pura Geometria.

Della maniera di prendere gli angoli sul terreno.

Fig.24 294. Il più comodo, e forse il più antico degl' istromenti inventati per prendere gli angoli sul terreno, è la *Tavoletta*. Questa è in fatti una tavoletta ben piana, d' un piede e mezzo circa in quadro, sostenuta ordinariamente da tre piedi, e montata con diversi artifizj per inclinarla all' orizzonte, secondo il bisogno. Le migliori Tavolette sono quelle che possono moversi in ogni senso con facilità; che sono solide e forti a segno di conservare immutabilmente l' inclinazione, in cui vengono poste e fissate, e che sono meno soggette a corrompersi, ed incurvarsi, per le variazioni del caldo, del freddo e dell' umido. FG è un' alidada, o sia regola di rame, guarnita di due traguardi, che servono a dirigere il raggio visuale. Per prendere l' angolo formato da due oggetti, come B e C, veduti da un punto di stazione, al qual suppongo corrispondere a piombo un punto A della Tavoletta; fissata prima

Fig.25

Fig.24

su di essa una carta ben tesa, vi si applicherà l'alidada in maniera che, mirando per li traguardi l'oggetto B, possa tirarsi, radendo e tenendo ben ferma la regola, una linea indefinita A*b*. Nello stesso modo, mirato per li traguardi l' oggetto C, si tirerà una linea A*c*. L'angolo *c*A*b* sulla carta sarà l' angolo cercato CAB.

Sarà facile determinar sul terreno il punto corrispondente al punto A della carta, sospendendo successivamente agli orli *m*, *n* della Tavoletta un filo a piombo che discenda fino a pelo del suolo, e trasportando sull' intervallo fra un piombo e l'altro, sul terreno, una delle due distanze A*m*, o A*n*, misurata orizzontalmente.

295. Se vuol sapersi di quanti gradi sia l' angolo *b*A*c*, se ne prenderà la misura con un semicircolo di rame, o di corno, come s'insegna negli Elementi di Geometria. Volendosi avere questa misura con più precisione, si prenderà col compasso una porzione AD = AE sulle rette A*b*, A*c*, e DE sarà la corda dell' angolo A per il raggio AE. Si misureranno sopra una scala di parti eguali le linee AE, DE; e l'angolo A sarà conosciuto per mezzo delle tavole de' seni, giacchè AE : DE :: 1 : 2sen.$\frac{1}{2}$A, (247). Fig.26

Questo è pure il modo più esatto per formar sulla carta un angolo dato, tirando una linea AE di lunghezza arbitraria, e con essa per raggio, e il punto A per centro, descrivendo un arco, che poi si taglia in D con un intervallo ED, il qual si determina calcolando l'analogia data or ora. Quando nelle due operazioni precedenti non si esige un' estrema esattezza, si può evitare il calcolo, facendo uso della scala delle corde, che sempre si trova ne' compassi di proporzione.

296. Il secondo istromento più usitato per prendere gli angoli sul terreno è il *grafometro*. Questo è un semicircolo di metallo, diviso di grado in grado, o vero di mezzo in mezzo grado, il qual porta un' alidada mobile EC, guarnita di traguardi, e imperniata sul centro A dell' istromento, e due traguardi stabili, perpendicolari al piano del semicircolo, sulle estremità del diametro che passa Fig.27

per le divisioni segnate o, e 180. Le due estremità dell'alidada portano ordinariamente alcune divisioni formate con l'artifizio seguente.

Supponendo il grafometro diviso di 30′ in 30′, se si prende un intervallo, per esempio, di 14 divisioni, o sia di sette gradi, e che questo intervallo, preso sui lembi dell'alidada, venga diviso in 15 parti eguali, è cosa chiara che ognuno di questi spazj varrà $\frac{7^{\circ}}{15}$, o sia 28′. La prima divisione, segnata o sull'alidada, deve corrispondere al giusto mezzo de' traguardi, o sia esser nel medesimo piano de' fili verticali, che sogliono esser situati nel mezzo de' traguardi. Questa divisione, che anche si chiama *la linea di fede*, indica a qual delle divisioni del grafometro corrisponda la direzione del raggio visuale. Suppongo che la detta divisione si trovi battere sul grafometro fra quella di 40°, e quella di 40° 30′. Per sapere di quanti minuti sia distante dalla divisione di 40° il punto del grafometro, che corrisponde a zero dell' alidada, si tenga ferma l'alidada, e si cerchi fra le divisioni di essa, qual sia quella che meglio coincide con una di quelle del semicircolo. Suppongo che sia la settima divisione dell'alidada, la qual coincida con quella di 43° del grafometro. Poichè l'intervallo di sei spazj sull'alidada, fra la prima e la settima divisione, vale $6 \times 28' = 2^{\circ}\ 48'$, ne viene che la prima divisione dell'alidada corrisponde sul grafometro ad un punto situato a $43^{\circ} - 2^{\circ}\ 48' = 40^{\circ}\ 12'$. Se fosse la ottava divisione dell' alidada che coincidesse con quella di 43° 30′, si troverebbe nel modo stesso che il zero dell'alidada corrisponderebbe a 40° 14′. Si comprenderà facilmente che, nella costruzione da noi supposta, le divisioni dell' alidada suddividono gli spazj del semicircolo di 2′ in 2′. Il lembo che porta questa specie di divisioni si chiama il *nonio*.

Il grafometro deve esser montato sopra un piede ben solido, e con tali artifizj da poter situare il piano del semicircolo in tutte le posizioni, orizzontale, verticale, e inclinata all' orizzonte. I migliori grafometri son guarniti di certe viti che servono ai piccoli

movimenti, tanto per finire di mettere con ogni esattezza il piano dell' istromento nell'inclinazione desiderata, quanto per finire di mettere l'alidada nella giusta direzione verso l'oggetto, a cui tende il raggio visuale che passa per li traguardi. I buoni grafometri, in luogo de' traguardi, hanno due cannocchiali, uno fisso sul semicircolo parallelamente a quel diametro che passa realmente o mentalmente per le divisioni segnate o e 180. Questo cannocchiale è applicato alla superficie di sotto del semicircolo, a fine di non impedire il giro dell' alidada. Questa poi porta il secondo cannocchiale, il quale giova che possa inclinarsi un pochetto verticalmente sul piano della medesima. Ciascuno dei detti cannocchiali deve avere due fili ben tesi in croce nel foco comune delle lenti, o pure anche un solo filo teso verticalmente. Finalmente il grafometro porta una bussola, la qual serve per determinare l'angolo che fa il raggio visuale con la linea meridiana, come sarà spiegato quì appresso più chiaramente (340).

297. Si concepirà facilmente l'uso del grafometro. Volendo misurar la distanza angolare di due oggetti, F, G, veduti da un punto qualunque, si collocherà perpendicolarmente su questo punto il centro A del grafometro, e s'inclinerà, o disporrà l'istromento in maniera che, rimirando per li traguardi stabili, il filo verticale si scorga divider per mezzo uno degli oggetti F, e che nel medesimo tempo il piano dell' istromento, se fosse prolungato, vada ad incontrare l' altro oggetto G. Allora si farà girar l'alidada EC, finchè il filo de'suoi traguardi spartisca per mezzo l'oggetto G. Si osserverà a qual punto del semicircolo corrisponda *la linea di fede* dell' alidada. La distanza di questo punto dalla prima divisione del grafometro in B, è l'arco BC, il quale indicherà di quanti gradi e minuti sia l'angolo BAC, o vero FAG, che è l'angolo cercato.

Fig. 27

Quest' angolo misurato nel piano comune ai tre punti A, F, G, non è uguale all' angolo FAG misurato sul piano orizzontale del punto A, se non quando i punti F e G siano situati in quest' ultimo piano, come farò vedere (321). Si troverà poi (322) il modo di

valutare, e correggere questa differenza. Tal correzione si risparmia, se il grafometro è armato di cannocchiali, quando uno solo degli oggetti è situato fuori dell' orizzonte dell' osservatore. Allora si può collimare all' oggetto medesimo, mediante il piccolo moto verticale che abbiamo supposto (296) al cannocchiale dell' alidada, quantunque il piano del semicircolo sia collocato orizzontalmente.

298. Prima di far uso di un istromento, è cosa essenziale di assicurarsi della sua bontà : e si può esigere che l' artefice la giustifichi, o porga i mezzi di riconoscerla. Per le operazioni ordinarie, le piccole imperfezioni sono insensibili. Gli errori forti facilmente si scoprono. Dirò dunque poche parole su questo punto.

La prima cosa, che deve verificarsi in un grafometro, si è, che i raggi visuali, che passano per li traguardi stabili e per quelli dell' alidada, si taglino nel punto preciso che corrisponde al centro del semicircolo; e che l'arco di 180° sia giusto, cioè che le divisioni segnate o e 180 siano nel luogo preciso che ad esse conviene. Per tutto questo basta osservare, se i quattro fili si confondono insieme in un medesimo piano, quando i zeri de' nonj dell' alidada coincidono perfettamente colle suddette divisioni; se ciò succede in ambe le posizioni dell' alidada, cioè tanto quando il traguardo E è dalla parte del traguardo D, come quando il medesimo traguardo E è dalla parte del traguardo B; e finalmente se, girando l' alidada, l' orlo de' nonj copre, o sia taglia una parte eguale in ciascuna delle divisioni del semicircolo. Queste operazioni fanno conoscere, che il punto A, su cui gira l' alidada, è il vero centro dell' istromento, e che si trova posto, come deve essere, nella comune intersezione del piano de' fili stabili col piano de' fili dell' alidada. Verificata così anche la giustezza dell' arco di 180°, si potrà riconoscere, se vi siano errori sensibili nelle posizioni di tutte le altre divisioni, presentando successivamente il nonio, o misurando le corde con un compasso di punte finissime.

Fig. 27

299. Se il grafometro è armato di cannocchiali (nel qual caso basta

basta un sol nonio, cioè dalla parte dell' obbiettivo del cannocchiale mobile), si porrà la linea di fede del nonio in coincidenza colla prima divisione del semicircolo in B, e si osserverà se i fili verticali dei due cannocchiali feriscano ne' medesimi punti uno stesso oggetto, come C. (Questa operazione suppone che ambi i fili siano ben verticali: il che si verifica prima, osservando se si confondono con un filo a piombo pendente ad una certa distanza). Indi si girerà l'alidada, finchè la linea di fede del nonio sia in coincidenza con l'ultima divisione del semicircolo in D. Se il filo verticale, o l'intersezione dei due fili non s'incontra a cadere sopra punti rimarchevoli di un oggetto, converrà piantarne uno, come E. Riconosciuti con distinzione i punti precisi dell' oggetto E coperti dal filo del cannocchiale mobile, e quelli dell' oggetto C coperti dal filo del cannocchiale stabile, si volterà il grafometro, di maniera che il punto D si trovi nel sito dove era prima il punto B, e viceversa (ciò si ottiene facilmente, segnando sul terreno, col mezzo di un filo a piombo, i punti corrispondenti a B e D, prima di muovere il grafometro). Allora si osserverà, se posto il filo del cannocchiale stabile sui punti dell' oggetto E, sui quali batteva prima il filo del cannocchiale mobile, questo si trovi a vicenda battere sui punti ch'erano prima coperti dall' altro in C. Con questa operazione sarà verificato l'arco di 180°, e la giusta posizione del centro dell' istromento nella comune sezione de' piani verticali dell' asse ottico dei due cannocchiali. Fig.28

Le altre verificazioni si faranno come si è detto (298).

In tutte queste operazioni (che, per più sicurezza, sarà bene ripetere molte volte) quando si troverà qualche errore, converrà apprezziarne la quantità col mezzo del nonio, o della vite che lo conduce (296), se i moti di questa sono misurati da un indice. Quindi, nel fare uso dell' istromento, si terrà conto degli errori scoperti.

300. Un altro istromento di vasto uso è il *Quadrante.* Questo non è che la metà del grafometro, come ABL; e però non misura Fig.27

gli angoli ottusi, se non dividendoli in due acuti, col mezzo di qualche oggetto intermedio. Convien però comparare l'arco di 90° a quattro angoli, misurati successivamente con far girar l'istromento intorno al suo centro, come abbiamo prescritto (299) per comparare l'arco di 180° del grafometro a due angoli di 180° per uno. In quell' operazione, l'errore che si trovasse, è doppio dell'errore dell'arco di 180° nel grafometro. Operando col quadrante, l'errore che si trovasse nel misurare il quarto angolo, è quadruplo dell'errore dell' arco di 90°.

S'impiega il quadrante sopra tutto nelle operazioni più delicate; poichè, a volume e peso uguali, il quadrante può avere un raggio maggiore del grafometro, e quanto il raggio è maggiore, tanto si hanno gli angoli con più minuta precisione. La materia delle scrupolose verificazioni del quadrante, per conoscer fino gli errori di un minuto secondo, è stata esaurita con sommo valore dal Sig. Ab. Boscovich nell' Opera citata (293). Anche le verificazioni degl' istromenti della Specola di Milano sono state eseguite con grandissima accuratezza, e riferite con precisione nelle Efemeridi dell' anno 1782. Finalmente il Lib. XIV dell' Astronomia del Sig. de la Lande contiene una collezione preziosa d'insegnamenti per la verificazione d'ogni sorte d'istromenti astronomici.

301. Un istromento molto semplice, e comodo per prendere gli angoli, è stato suggerito dall' insigne Astronomo Tobia Mayer nel Tom. II degli Atti di Gottinga. Si può vederne eziandio la descrizione, il modo di servirsene, ed anche di perfezionarlo, al n°. 99 dell'Opera citata (161) del Sig. Ab. Toaldo. Sarebbe cosa troppo lunga l'annoverare e descrivere tutti gl' istromenti che sono stati immaginati per prendere gli angoli. Noi ci contenteremo d'aver detto qualche cosa relativamente ai più noti ed usitati generalmente, riserbandoci a parlar della Bussola (339). Termineremo con dire, che quelli che sono armati a cannocchiali sono preferibili a quelli che sono muniti di semplici traguardi; giacchè con

questi non possono ben distinguersi gli oggetti lontani, e facilmente si commette un errore di 2′, come insegna il valentissimo Professore che abbiamo citato or ora.

Della misura delle Altezze.

302. *Si dimandi l'altezza di un Campanile* rappresentata dalla linea punteggiata AB, B essendo il centro della base del campanile, o sia il punto corrispondente perpendicolarmente al punto A. Fig. 29

Eletta una distanza convenevole (254), si ponga ivi il grafometro montato verticalmente, o sia nel piano della linea verticale AB (lo stesso s'intenda del quadrante), in guisa però che il diametro CD sia parallelo all'orizzonte, il che si conoscerà con un filo a piombo, il quale, applicato rasente il piano dell' istromento, corrisponda, o batta leggiermente sopra la divisione segnata 90°, e nel medesimo tempo sopra il centro N. Si giri l'alidada EF, finchè il vertice A sia nel mezzo del filo de' suoi traguardi, o del cannocchiale. I gradi e minuti dell' arco FD sul grafometro saranno la misura dell' *angolo di elevazione* ANH. Dal punto G sul terreno, al qual corrisponda a piombo il centro N dell' istromento, si misuri (289, e seguenti) la distanza orizzontale GK = NH, seguendo sempre la direzione del cannocchiale CD. Si aggiunga a GK la distanza BK = MH. Conoscendo NM, e ANM, si troverà AM, come nell' esempio (215). Si aggiunga (il che dovrà sempre farsi in tal sorte d'operazioni) l'altezza da terra del cannocchiale stabile, o sia GN = KH = BM, e si avrà l'altezza cercata AB.

303. Si proponga di *determinare un'altezza, il cui piede sia inaccessibile.*

Sia CD l'altezza che vuole determinarsi. Poichè il fiume AD impedisce di misurare una distanza orizzontale dal punto D alla stazione dell' Osservatore, si misuri una linea orizzontale AB posta nel piano dell' altezza CD, e si prendano gli angoli di Fig. 11

elevazione B e CAD. Nel triangolo CAB si conosceranno i tre angoli, e il lato AB. Si cerchi il valore di uno degli altri due lati (224). Indi si avrà CD = AC sen.A, o vero CD = BC sen.B, (211).

304. *Determinare un'altezza, nel cui piano non può misurarsi una distanza orizzontale.*

Fig.30 Sia AB l'altezza cercata. Si scelgano due stazioni in C e in D, tali, che possa misurarsi la loro distanza effettiva CD, (291), e che una almeno di dette stazioni sia nello stesso piano orizzontale del punto A. Si misurino gli angoli BCD, e CDB, ponendo l'istromento nel piano obliquo dei tre punti B, C, D. Dalla stazione, che sarà nel piano orizzontale del punto A, si prenda pure, coll'istromento posto verticalmente, l'angolo d'elevazione BDA, o BCA. Nel triangolo BCD conoscendo gli angoli e il lato CD, si troverà uno degli altri due lati BC, BD; quindi si avrà AB = BD sen.BDA, o vero AB = BC sen.BCA.

Si vedrà (344) la maniera di determinare, stando in B, e data l'altezza AB, una distanza orizzontale CD.

305. Allorchè la distanza dall' Osservatore all' oggetto è notabile, le altezze determinate coi metodi precedenti abbisognano di alcune correzioni.

La prima dipende dal non esser lo stesso l'orizzonte dell' Osservatore, e l'orizzonte dell' oggetto osservato. Sia C il centro della Fig.31 Terra, R la cima di una montagna, A il punto, da cui fu osservato l'angolo di elevazione RAB; ORI perpendicolare a CR è l'orizzonte del punto R; similmente BAD perpendicolare a CA è l'orizzonte del punto A. Se si prende CE = CA, RE sarà la vera altezza del monte per rispetto al punto A. Se si tira la corda punteggiata AE, *il vero angolo di elevazione* del monte sarebbe RAE. Ma RAB è *l'angolo d'elevazione apparente*, cioè quello che fu osservato cogl' istromenti, il qual è sempre relativo all' orizzonte BAD dell' Osservatore. Dunque l'altezza del monte, determinata coi metodi precedenti, sarà BR, e non RE. (Nel trattar della misura

delle altezze abbiamo sempre supposto RBA $=90°$; a rigore RBA è eguale alla somma de' due angoli interni BAC e C, o sia RBA $=90°+C$; ma perchè C non è mai che di pochissimi minuti (290), si può risolvere il triangolo RBA, come rettangolo in B, senza che ne nasca error sensibile nel calcolare BR.) L'errore, di cui convien tener conto, è dunque BE. Opportuna per calcolarlo speditamente è la formola (286), che dà $BE=\frac{AB^2}{2BC}$. Eccone un esempio.

306. Gli Accademici Francesi (Bouguer, *Fig. de la Terre*) misurarono nel Perù una base inclinata (291), la cui lunghezza AR risultò di tese (o sia pertiche di sei piedi Parigini) 6274,057; ed osservarono l'angolo RAB di $1° 5' 43''$, detratta la refrazione (307). Facendo BR $=$ AR $\times$ sen.RAB, si trova BR $=119,93$ tese. Per calcolare BE, si può prendere senza scrupolo AR in vece di AB, e CE in vece di BC, gli errori essendo insensibili. Allora si ha il log. di AR dal calcolo di BR, e 2CE è il diametro della Terra, il cui logaritmo si può aver sempre pronto (il diametro medio dedotto dalle misure de' gradi fatte in Laponia, da Parigi ad Amiens, e nel Perù, è esattamente di tese 6543373). Con che nulla costa il seguente calcolo.

$$\begin{aligned} \text{log.AR} &= 3{,}797548 \\ \text{Idem} &= 3{,}797548 \\ \text{compl. log. } 2\,CE &= 3{,}184198 \\ \hline \text{log.BE} &= 0{,}779294 = \text{log.}6{,}02. \end{aligned}$$

Aggiungendo BE a BR, si ha l'altezza vera del monte, o RE $=125,95$ tese. In fatti se si fa il calcolo con tutto il rigore, risolvendo il triangolo RAE, si trova RE $=125,97$.

Dalla formola $BE=\frac{AB^2}{2BC}$ si vede facilmente quando il valore di BE sia tale che possa negligersi. Per esempio, allorchè AB $=$ 1000 tese, BE $=\frac{15}{100}$ di tesa solamente.

307. La seconda correzione dipende dall'errore che producono

Fig. 31 le refrazioni nel prendere gli angoli di elevazione, come RAB. I raggi di luce, che passano obliquamente per l'atmosfera, si piegano di continuo verso la Terra, per causa dell'attrazione progressivamente più grande che provano nel traversare gli strati di più in più densi dell'atmosfera. Questo piegamento si chiama *refrazione;* ne risulta, che i raggi descrivono una linea curva, che l'occhio vede l'oggetto sulla tangente di questa curva, e che però *la refrazione fa vedere gli oggetti più elevati di quello che siano realmente.* Non appartiene a questo Trattato lo sminuzzar le teorie di questo fenomeno: ma il fatto è costante, ed è facile il farne la prova.

Sia dunque C il centro della Terra. Per la natura de' triangoli rettilinei si ha $C = 180° - CRA - CAR$. Ma $CRA = 90° - IRA$, e $CAR = 90° + RAB$. Sostituendo questi due valori, la prima equazione diviene $C = IRA - RAB$. L'angolo C è sempre cognito quando si conosce AR che può impiegarsi, senza errore sensibile, in cambio dell'arco AE nella proporzione (290). Se dunque stando in R si misura cogl'istromenti l'angolo IRA, e stando in A l'angolo RAB, e se la differenza di questi due angoli non si trova eguale a C, il divario sarà la somma delle due refrazioni. In fatti se stando in R la refrazione fa vedere il punto A più elevato di quello che sia realmente, l'angolo osservato IRA sarà dunque più piccolo del vero. Per la stessa ragione, se stando in A si vede il punto R più alto di quello che sia, l'angolo osservato RAB sarà più grande del vero. La differenza di questi due angoli risulterà dunque più piccola del giusto, e quel che manca sarà la somma dei due errori causati dalla refrazione, la quale per tal mezzo sarà conosciuta e determinata.

308. ESEMPIO. Stando all'imboccatura dell'*Ausa*, e osservando la cima del monte *Carpegna*, il P. Boscovich e il P. Maire (*de Expeditione litteraria*) trovarono l'angolo d'elevazione apparente $RAB = 2° 7'$. Stando in R, osservarono l'*angolo di depressione apparente* $IRA = 2° 24' 10''$. (La depressione *vera* sarebbe l'angolo formato da RA, e da una corda parallela ad AE,

che partendo dal punto R terminerebbe al raggio CA prolungato). Si ha dunque IRA — RAB = 17′ 10″. Ma la distanza AR, ridotta per più esattezza ad AE, era stata già calcolata col metodo (50) di tese 18218 $\frac{1}{4}$, che danno C = 19′ 9″, (290). La somma delle due refrazioni è dunque 19′ 9″ — 17′ 10″ = 1′ 59″. Considerandola di 1′ per parte, si ha il vero angolo RAB = 2° 6′, e il vero angolo IRA = 2° 25′ 10″.

Quando si è calcolato l'angolo C, si conosce pur BAE = $\frac{1}{2}$C; giacchè l'angolo formato dalla tangente e dalla corda è uguale alla metà dell'arco intercetto. Allora si trova l'altezza RE tutta ad un tratto, risolvendo il triangolo REA. Considerandolo per brevità rettangolo in E, si ha RE = AE tang.RAE = 18218 $\frac{1}{4}$ × tang. 2° 15′ 34″, 5 = 718,85. Il P. Maire pone l'altezza del monte *Carpegna* di tese 718.

309. Allorchè la differenza di altezza da un oggetto all'altro è molto piccola, si può avere un angolo di depressione tanto da una parte quanto dall' altra. Allora i due orizzonti s'incontrano fra un oggetto e l'altro. Così il punto B, osservato dal punto E che ha per orizzonte EF, si vede depresso della quantità BEF, e il punto E, osservato dal punto B che ha per orizzonte BR, si vede depresso della quantità RBE. Procedendo come si fece (307), si troverà che in tal caso BCR = BEF + RBE. E perchè ognuno di questi angoli è veduto più piccolo del vero per causa della refrazione, la loro somma in questo caso sarà minore di BCR della quantità delle due refrazioni. Fig. 6.

310. Dal complesso di molte osservazioni di questa specie si può dunque ricavare all'incirca una regola generale per correggere l'effetto della rifrazione in un angolo osservato, quando non si può o non si vuole determinarla ogni volta con l'osservazione dei due angoli. Il P. Boscovich e il P. Maire stabiliscono che l'effetto della rifrazione sia la 18ª parte dell'arco della Terra intercetto. Ciò corrisponde appresso poco all' esempio (308), ove essendo C = 19′, la rifrazione si trovò, per osservazione, di 1′. Lambert, in

un' Opera intitolata *les Propriétés remarquables de la route de la Lumiere*, &c. argomenta che la refrazione è la 14ª parte dell' arco della Terra intercetto: questo valor fu adottato dal Sig. de la Lande, Cassini de Thuri, e molti altri. Si può prendere un mezzo fra queste diverse opinioni, tanto più che l' incostanza delle refrazioni non permette di aspirare ad una gran precisione nel determinarle di volta in volta. Insegnano il P. Boscovich e il P. Maire, che quanto più l' oggetto osservato è basso, tanto più la refrazione è soggetta a variare da un momento all' altro. Raccomandano di evitare, in queste osservazioni, le ore di gran mattino e quelle vicine alla sera, ed inoltre di non avere il Sole in faccia. In generale le refrazioni sono ancora molto irregolari, allorchè qualche causa meteorologica fa variare il barometro rapidamente.

311. Le altezze delle montagne difficilmente si possono determinare con precisione coi metodi precedenti, a cagione che l'angolo d' elevazione è sempre troppo piccolo, per il che un lieve errore nel prender questo angolo (254) ne produce uno sensibile nell' altezza cercata. Un errore di un minuto almeno è ben facile da commettere, e per l' incostanza delle rifrazioni, e per la piccolezza degl' istromenti, che possono trasportarsi ed usarsi in simili operazioni; e per la difficoltà di collimare, atteso il vacillamento degli oggetti terrestri nel cannocchiale per causa dei vapori dell' atmosfera; e finalmente perchè il vento rare volte permette di fare con esattezza l' osservazione essenzialissima del filo a piombo, (302).

Pongasi che le osservazioni del P. Maire abbiano patito solamente un errore di $34''\frac{1}{2}$ in più nell' angolo RAE, (308), si troverà che $18218\frac{1}{4} \times$ tang. $2° \; 15' = 715,8$. Sicchè un errore di soli $34''\frac{1}{2}$ ne produce uno di 3 tese sull' altezza cercata del monte. Ora il Sig. Ab. Boscovich avverte (lib. IV. art. 258) che in quelle osservazioni può esservi errore di più di un minuto per la sola causa del filo a piombo agitato dal vento.

Per misurare più esattamente e con più sicurezza l' altezza delle montagne

montagne, giova meglio servirsi del barometro, osservando i precetti del Sig. de Luc nell'Opera classica intitolata *Recherches sur les modifications de l'Atmosphere.* Il Sig. Megnié, abilissimo fabricatore d'istromenti astronomici in Parigi, fa de' barometri, a livello costante, divisi con tanta esattezza, che vi si osserva con facilità un cinquantesimo di linea.

Della misura delle distanze.

312. Sia BC la larghezza di un fiume, o una distanza qualunque, di cui uno almeno de' punti estremi, come C, sia accessibile; e si dimandi la misura di BC. Fig. 7.

Si misurerà (289, e segg.) una base, come AC, nella direzione e lunghezza più convenevoli (332, e segg.): si misureranno ancora (296, e segg.) gli angoli A e C; il terzo B sarà cognito; e si calcolerà la distanza BC, come nell' esempio (50).

313. Se si opera con la Tavoletta, si procederà come segue. Formato sulla carta, nel modo indicato (294), un angolo *a* eguale all' angolo A sul terreno, si pianterà un segnale o palina nel punto A; si trasporterà la Tavoletta in C, ed ivi posta col mezzo de' traguardi la linea *ca* nel piano verticale di CA, di maniera che il punto *c* corrisponda a piombo sul punto C, si girerà dipoi l'alidada, facendo centro in *c*, finchè l'oggetto posto in B si trovi similmente nel mezzo de' traguardi. Allora si tirerà, seguendo la regola, la linea *cb* fino all'incontro della *ab*; e si avrà sulla carta un triangolo *cba* simile al triangolo CBA sul terreno. Supponiamo che la base misurata AC sia di 1000 pertiche; se si chiama x la quantità delle pertiche della distanza cercata BC, avremo allora $ac : bc :: 1000 : x = 1000 \times \frac{bc}{ac}$. Per conoscere x, basta dunque conoscere la ragione che passa fra le linee *bc, ac* sulla carta. Or questa ragione si ha facilmente da una scala qualunque di parti uguali, osservando quante delle medesime parti corrispondano all' intervallo *bc*, e quante all' intervallo *ac*, presi detti intervalli

X

col compasso con diligenza. È poi evidente, che la lunghezza di *ac*, che rappresenta la base sulla carta, è arbitraria, e che da essa dipende la grandezza del triangolo *abc*.

Fig. 32 314. Si dimandi la distanza CD, i cui punti estremi C e D siano ambi inaccessibili.

Misurata una base AB, dove si potrà e stimerà meglio (332, e segg.), si prenderanno, stando in B, gli angoli CBD, CBA, e stando in A, gli angoli CAD, DAB. Nei triangoli CAB, DAB si conosceranno per conseguenza i tre angoli, e un lato AB; si calcoleranno (IV. 1°) i lati AC, AD, o vero i lati BC, BD. Allora nel triangolo CAD, o vero nel triangolo CBD, si conosceranno due lati coll'angolo compreso; si troverà (IV. 3°) il terzo lato, che è la distanza cercata CD.

315. Se gli angoli sono stati presi con la tavoletta, le linee tirate sulla carta saranno, 1°. la base *ab* lunga a piacimento; 2°. le linee *ac*, *ad*, indefinite, nel prendere gli angoli dalla stazione A; 3°. le linee *bc*, *bd* fino all' incontro delle due precedenti rispettivamente, nel prendere gli angoli dalla stazione B. Ciò fatto, i punti d'intersezione, *c*, e *d*, si congiungano con la linea *cd*; si avrà sulla carta una figura *abcd* simile al quadrilatero ABCD sul terreno; e per conseguenza, conoscendo AB in pertiche, si avrà da una scala di parti uguali la ragione $\frac{cd}{ab}$, e si dedurrà la distanza cercata CD in pertiche.

Si vede quanto sia comodo l'uso della tavoletta, poichè dà le distanze, senza bisogno di conoscer la grandezza degli angoli, nè di risolvere alcun triangolo. È però vero che le dà con minor precisione, non essendo possibile che le operazioni grafiche agguaglino mai l'esattezza del calcolo.

316. Se i punti A, B, C, D non sono tutti in un medesimo piano, la somma degli angoli CAD, e DAB, misurati nel piano del triangolo respettivo, non sarà eguale all'angolo CAB, come vedremo ben presto (329); e similmente non sarà CBD + ABC = ABD.

Questo errore è piccolo, ed insensibile ordinariamente nell' uso della tavoletta, dove è irremediabile. Nelle operazioni delicate, ove si opera col grafometro, o col quadrante, conviene tenerne conto nel modo che si additerà (320, e seguenti): ovvero si può evitare ogni errore nella distanza cercata CD, se si misurino anche gli angoli CAB, ABD; e se nella risoluzione d'ogni triangolo (314) s' impieghino gli angoli dati dall' osservazione in quel triangolo solo.

317. Se non si potesse misurare comodamente la base AB, che somministra due punti, come A, e B, dai quali si discoprono gli oggetti in C e D, allora si faranno per determinare la distanza AB le operazioni indicate (312, 313), o vero le altre(314, 315), secondo si troverà situata la base che potrà misurarsi. Così conosciuta AB, se ne dedurrà poi CD nei modi già detti. Quindi sarà facile ad intendere che, misurata colla pertica una sola base, si può, misurando soltanto gli angoli, passar poi di triangolo in triangolo, e determinar le distanze respettive di tutti i paesi di una Provincia, di un Regno, &c.

Della riduzione degli angoli al centro della stazione.

318. Rare volte succede che si possa prendere un angolo, stando coll' istromento nel centro del segnale che fu osservato dalle altre stazioni, come sarebbe la croce di un campanile, la cima di un albero, lo spigolo di una casa, &c. Allora l'angolo preso non è quello stesso, che sarebbe stato osservato dal centro del segnale, e conviene ridurlo a questo punto. La correzione ordinariamente è di pochi secondi, ed allora può trascurarsi, eccetto che nelle operazioni più scrupolose. Ecco il modo di calcolarla.

Sia *mnro* la base di un campanile, la punta del quale, corrispondente verticalmente al centro C, è quella che fu osservata dalla stazione A, o B, nel prendere l'angolo CAB, o ABC: e vogliasi misurare l'angolo ACB. Se l' istromento non si è potuto

Fig.33

Fig.33 collocare comodamente se non che in E, l'angolo osservato sarà AEB. Convien ridurlo ad ACB. Si faccia ACB — AEB = — δE, e considerando che i due triangoli ACB, AEB hanno un lato comune AB, si avrà (284)

$$-\delta E = \left(\frac{\delta AE \text{ cot.} A}{AE} + \frac{\delta BE \text{ cot.} B}{BE}\right) R''.$$

Se il punto E fosse più distante che il punto C dal punto A, allora δAE sarà negativo. Se la distanza fosse uguale, allora $\delta AE = 0$, e il secondo membro della formola si riduce ad un solo termine. Tutto questo s'intenda pure rispetto a δBE. Si rammenti inoltre che, se alcuno degli angoli è ottuso, la sua cotangente sarà negativa. Impiegando i segni che convengono, la formola servirà per qualsivoglia posizione del punto E relativamente al punto C. Quando il secondo membro dell' equazione risulterà negativo, la correzione δE sarà positiva, o vero sarà $E < ACB$.

Per calcolare la formola, convien conoscere δAE, e δBE. Se si prende AD = AG = AE, e AF = AC, sarà $\delta AE = GC = DF$. Quando però non si potesse misurare la distanza GC, sarà sempre facile il misurar DF col prendere ad occhio i due punti D, F, sul terreno, egualmente distanti appresso poco dal punto A, che i punti E, e C. I piccoli errori in questa misura sono insensibili nel calcolo. Lo stesso s' intenda operato dall' altra parte per conoscere $\delta BE = CH$. Le altre quantità della formola basta che siano note all' ingrosso.

319. Un metodo più spedito, che è quello che fu insegnato fin ora, ma con applicazioni ai diversi casi molto prolisse, consiste nel misurare GE, EH. Allora si ha $GAE = \frac{GE}{AE} \times R''$, prendendo l'angolo GAE in vece del seno; e similmente $EBH = \frac{EH}{BE} \times R''$. Ora GAE + EBH = AEB — ACB; e per conseguenza

$$GAE + EBH = \delta E.$$

Per applicare questa equazione a tutti i casi, basta impiegare col

segno negativo l'angoletto GAE, quando è dentro del triangolo ABC, come nella figura. Lo stesso s'intenda dell'angoletto EBH. In questo modo si avrà sempre la correzione δE con quel segno, con cui conviene applicarla all'angolo osservato AEB.

Si conchiuda che due sono le posizioni da preferire, se è possibile. La più avvantaggiosa si è di situare il centro dell'istromento in un punto, come G, o H, sulla direzione di una delle linee, AC, o BC. Allora uno degli angoletti è nullo, e il calcolo solo dell' altro dà la riduzione al centro, per mezzo dell'ultima equazione. Se questa posizione è impedita, si procurerà di collocar l'istromento in modo che si abbia $\delta AE = 0$, o pure $\delta BE = 0$. Allora il calcolo della formola (318) sarà ridotto ad un solo termine.

Della riduzione de' triangoli da un piano all' altro.

320. Fatta la riduzione d' ogni angolo osservato, al centro della respettiva stazione, occorre ordinariamente ridurre le parti di un triangolo, o di più triangoli, ad un medesimo livello.

Fig.34

Siano state determinate coi metodi precedenti le parti del triangolo APR, nel qual si suppone che i punti A e P siano egualmente distanti dal centro della terra, ma che il punto R sia più elevato della quantità RE. Si avrà un' idea chiara del triangolo ARE osservandolo nella fig. 31. Della stessa natura è il triangolo PRE. Noi supporremo RE perpendicolare alle corde AE, PE, quantunque ognuno degli angoli REA, REP, sia eguale a 90°, più la metà dell' arco respettivamente sotteso dalle accennate corde; come è facile vedere nella fig. 31, per l'angolo REA formato da una corda e da una secante. È insensibile in pratica l'errore di tale supposizione, che è poi vantaggiosa per simplificare le correzioni, e dar regole generali per la riduzione de' triangoli da un piano all' altro.

321. Prima di procedere più avanti, sarà bene di mettere in

Fig.34 evidenza che le parti del triangolo APR non sono eguali alle parti corrispondenti del triangolo APE, eccettuando soltanto il lato comune AP. In fatti AR > AE, come è facile da comprendere sulla fig. 31. Per la stessa ragione PR > PE. Ora paragonando i triangoli APR, APE ai triangoli ACB, AEB della fig. 33, che sono nelle medesime circostanze, ma coricati sopra un piano comune, si vedrà a colpo d'occhio, che il triangolo che ha due lati più lunghi, non ha gli angoli eguali a quelli del triangolo che ha due lati più corti.

322. Ciò posto, si dimandi che il triangolo APR sia ridotto al triangolo APE, del quale i tre vertici, A, P, E, s'intendono posti a distanze uguali dal centro della Terra. Chiamerò *orizzonte comune* di questi tre punti la sezione, o sia il piano, che è loro comune. Or si cerchi in prima l'angolo PAE, essendo dati l'angolo PAR e l'angolo vero d'elevazione RAE, (305).

Nei due triangoli rettangoli AER, PER, che hanno un lato comune RE, si ha $RE^2 = AR^2 - AE^2 = PR^2 - PE^2$; dunque $AR^2 - PR^2 = AE^2 - PE^2$. Aggiungendo da una parte e dall' altra AP^2, e dividendo l'equazione per 2 AP, si avrà $\frac{AP^2 + AR^2 - PR^2}{2\,AP} = \frac{AP^2 + AE^2 - PE^2}{2\,AP}$. Dunque (232), cos.PAR $\times$ AR = cos.PAE $\times$ AE; e per conseguenza (211)

$$\text{cos.PAE} = \frac{\text{cos.PAR}}{\text{cos.RAE}}.$$

Similmente si troverà cos.APE $= \frac{\text{cos.APR}}{\text{cos.RPE}}$. Quindi risulta la seguente regola generale per ridurre gli angoli che hanno il vertice sul piano di riduzione. *Il coseno dell' angolo ridotto è uguale al coseno dell' angolo osservato, diviso per il coseno dell' angolo d' elevazione.*

323. Fatta la riduzione degli angoli in A e in P, sarà cognito il terzo E. Noi per altro daremo una formola per ridurre, quando si voglia, anche l'angolo R indipendentemente dagli altri due.

Questa sarà poi utile a darci la soluzione di un altro problema interessante (344).

Nei due triangoli APR, APE, che hanno un lato comune AP, si ha (III. 7ª), $AP^2 = AR^2 + PR^2 - 2AR \times PR \times \cos.ARP = AE^2 + PE^2 - 2AE \times PE \times \cos.AEP$. Dall'ultima equazione si cava $\cos.AEP = \frac{AR \times PR \times \cos.ARP - RE^2}{AE \times PE}$; donde risulta, (211, 210)

$$\cos.AEP = \frac{\cos.ARP - \text{sen}.RAE\ \text{sen}.RPE}{\cos.RAE\ \cos.RPE},$$

o vero, per maggior facilità del calcolo numerico,

$$\cos.AEP = \text{tang}.RAE\ \text{tang}.RPE\ \left(\frac{\cos.ARP}{\text{sen}.RAE\ \text{sen}.RPE} - 1\right).$$

La penultima formola è più facile ad enunziarsi; e però la regola per ridurre l'angolo unico avente il vertice fuori del piano di riduzione sarà: *Il coseno dell'angolo ridotto è uguale al coseno dell'angolo osservato, da cui sia sottratto il rettangolo de' seni degli angoli d'elevazione, ed il resto diviso per il rettangolo de' coseni degli angoli stessi.*

324. La riduzione de' lati è troppo facile; $AE = AR \cos.RAE$, $PE = PR \cos.RPE$.

Quando si volesse proceder con estrema esattezza, in cambio di tutte le riduzioni precedenti, si potrebbero risolvere i triangoli RAE, RPE, come obliquangoli (320), e dopo avere determinati i lati del triangolo APE, calcolare gli angoli col mezzo delle formole (IV. 5ª, o 6ª, &c).

Sebbene oltre gli angoli d'elevazione sia sempre utile osservare anche quelli corrispondenti di depressione, poichè si servono di verificazione reciproca, e danno insieme il valore attuale della refrazione (307, 308); ad ogni modo nelle formole precedenti non si fa menzione degli angoli di depressione, perchè si riduce ordinariamente il triangolo al piano dei punti più bassi. Del resto le formole sono le stesse in ambi i casi.

Fig.35 325. Sia ora il triangolo ARr, di cui si dimanda la riduzione al piano AEe, dove i punti E, e, delle linee verticali RE, re, s'intendono posti ad egual distanza del punto A dal centro della terra. Si prolunghi il piano AEe fino in P, cioè fino che incontri la linea RP tirata pei punti R, r. Le verticali RE, re si suppongono sempre perpendicolari al piano AEeP, e per conseguenza alle linee giacenti nel medesimo piano, colle quali s'incontrano.

Vediamo in primo luogo come si riduca l'angolo noto RAr all'angolo EAe.

Sen.rPA, o sen.RPA $= \frac{Ar \text{ sen.PA}r}{Pr} = \frac{\text{AR sen.PAR}}{\text{PR}}$. Ma P$r$: PR :: re : RE :: Ar sen.rAe : AR sen.RAE. Sostituendo questa ragione alla prima nell'ultima equazione, si ha $\frac{\text{sen.PA}r}{\text{sen.}r\text{A}e} = \frac{\text{sen.PAR}}{\text{sen.RAE}}$; o sia sen.PAR : sen.PA$r$ :: sen.RAE : sen.rAe, donde si ricava (10), (II. 12ª), tang.$\frac{1}{2}$(PAR + PAr) : tang.$\frac{1}{2}$(PAR — PAr) :: tang.$\frac{1}{2}$(RAE + rAe) : tang.$\frac{1}{2}$(RAE — rAe). Ma PAR — PAr è l'angolo noto RAr, e i due ultimi termini della proporzione contengono gli angoli d'elevazione che si suppongono pur conosciuti per osservazione. Dunque il primo termine dell'analogia sarà il solo ignoto, e si avrà

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(\text{PAR} + \text{PA}r) = \text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{RA}r \times \frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(\text{RAE} + r\text{A}e)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(\text{RAE} - r\text{A}e)}.$$

Fu creduto finora che questa formola non potesse aversi che dalla Trigonometria sferica.

Conoscendo la mezza somma e la mezza differenza di PAR e PAr, si ha (230) il valore assoluto di ciascuno di questi angoli. Quindi si trova PAE, e PAe, col mezzo della formola (322). La differenza di questi due angoli è l'angolo cercato EAe.

Sebbene le riduzioni si facciano d'ordinario a livello del punto più basso, come dicemmo; pur se uno dei due oggetti R, r, fosse elevato, e l'altro depresso, è facile conoscere che il punto P cadrà allora fra i due punti E, e, e che l'angolo cognito RAr sarà eguale a PAR + PAr; quindi il termine ignoto nell'ultima analogia sarà il secondo.

326.

326. *Se gli angoli d' elevazione dei due oggetti*, RAE, rAe, *fossero eguali*, l'equazione $\frac{\text{sen.PA}r}{\text{sen.}rAe} = \frac{\text{sen.PAR}}{\text{sen.RAE}}$ fa vedere che allora sen.PAr = sen.PAR, o sia che (19), PAR = 180° — PAr. Poste le precedenti egualità, la formola (322) fa veder similmente che cos.PAE = cos.PAe, o sia che PAE = 180° — PAe. Dunque EAe = PAE — PAe = 180° — 2 PAe, donde si cava PAe = 90° — $\frac{1}{2}$ EAe; e però cos.PAe = sen.$\frac{1}{2}$EAe. Nel modo stesso si prova che cos.PAr = sen.$\frac{1}{2}$RAr. Quindi basta in tal caso la formola (322) che diviene

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}\text{EA}e = \frac{\text{sen.}\frac{1}{2}\text{RA}r}{\text{cos.}rAe}\text{; o pure}$$

il seno della metà dell' angolo ridotto è uguale al seno della metà dell' angolo osservato, diviso per il coseno dell' elevazione.

Se uno degli oggetti fosse elevato, e l'altro depresso, e l'angolo d' elevazione uguale all' angolo di depressione, si avrà PAR = PAr = $\frac{1}{2}$ RAr, e PAE = PAe = $\frac{1}{2}$ EAe. Allora la formola sarà

$$\text{cos.}\tfrac{1}{2}\text{EA}e = \frac{\text{cos.}\frac{1}{2}\text{RA}r}{\text{cos.}rAe}.$$

327. Per ridurre l'angolo ARP ad AEP, od AEe, col mezzo della formola (323), bisogna conoscere l'angolo RPE. Per ciò si consideri che, essendo PR : Pr :: RE : re, si ha PR : PR — Pr :: RE : RE — re. Ma PR : RE :: 1 : sen.RPE; dunque Rr : RE — re :: 1 : sen.RPE = $\frac{\text{RE} - re}{\text{R}r} = \frac{\text{AR sen.RAE} - \text{A}r\,\text{sen.}rAe}{\text{R}r}$.
Ponendo i seni degli angoli, in vece de' lati opposti, si ha

$$\text{sen.RPE} = \frac{\text{sen.R}r\text{A sen.RAE} - \text{sen.AR}r\text{ sen.}rAe}{\text{sen.RA}r}.$$

Per ridurre l' angolo ArR ad AeE, bisogna prima, col mezzo della formola (323), ridur l'angolo ArP ad AeP; il supplemento di questo sarà l'angolo cercato AeE.

La riduzione de' lati adjacenti agli angoli d'elevazione si è già veduta (324). Per quel che sia al lato Rr, è facile di trovare che Ee = Rr cos.RPE.

328. Si risparmiano le precedenti riduzioni (che non sono applicabili alla tavoletta) quando il piano del quadrante, o del grafometro, è posto orizzontalmente, e i cannocchiali possono muoversi verticalmente per collimare agli oggetti quantunque elevati, o depressi. Il moto verticale del cannocchiale non altera la situazione dell'alidada, e però l'angolo è misurato sul piano dell'orizzonte che è quello dell' istromento. Si avverta però che in questo modo si ha ogni angolo misurato sull' orizzonte della respettiva stazione, e non sopra un piano esattamente comune; sicchè, quando le distanze fossero grandi, l'inclinazione, per esempio, dell' orizzonte BA del punto A all' orizzonte OI del punto R potrebbe meritare talvolta attenzione. Questa inclinazione è visibilmente uguale all' angolo C, o sia all' arco della Terra compreso fra le diverse stazioni.

Fig.31

Fig.35

329. Se si suppone che dal punto A siano state osservate le distanze angolari di tre oggetti E, r, P, l'uno de' quali r sia più elevato degli altri, sarà chiaro adesso per la formola (322) che la somma dei due angoli EAr, rAP, deve esser maggiore dell'angolo EAP, come abbiamo promesso (316) di dimostrare.

Fig.36

330. Sia C il centro della Terra, e sia rappresentato dalla corda AB il piano, veduto in costa, di un triangolo, le cui parti siano state ridotte ad un orizzonte comune, coi metodi precedenti. Se si vuole abbassar questo triangolo al piano della corda DE, ciò non altera punto gli angoli, poichè i due piani sono paralleli: convien solo diminuire i lati. Questa correzione si ha facilmente, poichè (278), $\delta AB : \delta BC :: AB : BC ::$ (247) $2 \cos. BAC : 1 :: 2 \text{ sen.} \frac{1}{2} C : 1$. Conoscendo $\delta BC = BE$, che è la quantità di cui vuole abbassarsi il piano del triangolo, si troverà con qualsivoglia delle tre precedenti ragioni il valore di δAB, o vero la diminuzione che deve farsi ad ogni lato del triangolo stesso.

Quando si ha una catena di molti triangoli, in ciascuno de' quali si sono fatte le altre riduzioni, quest' ultima serve per ridurli tutti ad un medesimo livello. Ordinariamente si fa la riduzione generale a livello del mare.

Che se, in vece delle corde, si volessero gli archi corrispondenti, è facile di dedurli da quelle. La terza equazione (152), prendendo solamente il primo termine della serie, giacchè gli altri sono insensibili, dà $A - 2\,\text{sen.}\frac{1}{2}A = \frac{\text{sen.}^3\frac{1}{2}A}{3} = \frac{(2\,\text{sen.}\frac{1}{2}A)^3}{24}$. Si avverta che, per avere il valore dell' arco A in parti della sua corda $2\,\text{sen.}\frac{1}{2}A$, espressa, per esempio, in piedi, tese, &c. convien dividere l' espressione $\frac{(2\,\text{sen.}\frac{1}{2}A)^3}{24}$, per il quadrato del raggio della Terra espresso nelle stesse parti della corda, il che conviene colle regole date (290).

Della miglior condizione de' Triangoli; e della costruzion dei Segnali.

331. È sano consiglio non contentarsi di misurare due angoli in un triangolo, ma di trasportarsi a misurare anche il terzo, sempre quando si possa. Se la somma dei tre angoli, ridotti al centro delle rispettive stazioni, è di 180°, poco più, poco meno, si avrà una certezza di averli bene osservati, e si dividerà l'errore ugualmente su tutti tre, quando non si avesse motivo particolare di dubitare d' una osservazione più che dell'altra. Supponendo, per esempio, che la somma sia di 180° 0′ 30″, si leveranno 10″ ad ogni angolo, prima di calcolare i lati, e prima di fare la riduzione ad un orizzonte comune. Questo è il massimo errore che può commettersi, in più o in meno, con un quadrante di tre piedi di raggio, poste le più scrupolose verificazioni ed attenzioni, come si vede nelle Opere citate (293). Se il raggio dell' istromento non è che di mezzo piede, l'error può montare fino a 3′, quando però il nonio mostri il minuto; a 6′, se il nonio dà i due minuti; e così discorrendo. Poichè dunque è impossibile evitare assolutamente ogni errore nel prendere gli angoli, diviene essenziale il procurare che questo errore influisca meno che sia possibile sulla determinazione de' lati, la quale è lo scopo di simili operazioni. L' esame si riduce a vedere

di qual grandezza debbano essere gli angoli, perchè i loro errori sian meno sensibili sopra i lati. È vero che le circostanze locali permetteranno rare volte di condizionare i triangoli con esatta conformità alle regole che troveremo. Non per questo sarà di poca utilità la discussione presente, poichè servirà di norma per procurare di avvicinarsi alle regole quanto sia possibile; e quando verrà la necessità di allontanarsene molto, si saprà almeno quanta possa essere appresso poco l'incertezza de' risultati.

332. Poichè la misura degli angoli non basta (236) per determinare i lati, è dunque necessario avere in ogni triangolo un lato, o misurato colla pertica, o determinato trigonometricamente per mezzo d'altri triangoli, nel primo de' quali bisognerà sempre che siavi una base misurata colla pertica. La scelta della base è pertanto l'operazione fondamentale. Si cerchi in primo luogo, quale debba esser la sua lunghezza, e la sua direzione, ponendo il caso che niun impedimento limiti nè l'una nè l'altra.

Fig. 7 In un triangolo qualunque ABC si ha (III. 1°), $AB \text{ sen.}A = BC \text{ sen.}C$. Sia AB la base; la qual si considera senza errore, giacchè in questa sorte di misure, quando sono prese con diligenza, l'errore non può esser sensibile; e poi quì non ci proponiamo di esaminare altro che l'errore degli angoli. Facendo dunque AB costante, e differenziando l'equazione, si ha $AB \cos.A\ \delta A = \text{sen.}C\ \delta BC + BC \cos.C\ \delta C$. Non sapendosi quanto sia grande ciascun degli errori δA e δC degli angoli A e C, (l'angolo B non entra nel calcolo di BC) conviene supporre detti errori uguali, tanto più, che si opera collo stesso istromento. Si chiami e, per brevità, ciascuno di questi errori; l'equazione darà $\delta BC = e \times \frac{AB \cos.A - BC \cos.C}{\text{sen.}C}$. Ponendo $\frac{BC}{\text{sen.}A}$ in luogo di $\frac{AB}{\text{sen.}C}$, si avrà

$$\delta BC = e \times BC\ (\cot.A - \cot.C).$$

Questa equazione (volendo calcolarla, si avverta che e, preso in secondi, deve esser diviso per R'') dà l'errore δBC che sarebbe prodotto nel calcolare BC dagli errori degli angoli A, e C. Perchè

questi errori (supposti eguali) non influiscano punto sul lato BC, basta dunque che sia $A = C$, essendo evidente che allora l'equazione è ridotta a zero. Ma perchè gli errori δA, e δC, che la differenziazione suppone entrambi in un senso, potrebbero esser commessi l'uno in più, l'altro in meno, nel qual caso si avrebbe $\delta BC = \pm e \times BC\ (\cot.A + \cot.C)$, conviene indagare di qual grandezza debbano essere allora gli angoli A e C, perchè la somma delle loro cotangenti abbia il minimo valore possibile; essendo chiaro, per l'equazione, che quello sarà pure il caso del valor minimo di δBC. Ora (II. 21ª), $\cot.A + \cot.C = \frac{\text{sen.}(A + C)}{\text{sen.}A\ \text{sen.}C} = \frac{\text{sen.}(A + C)}{\frac{1}{2}\cos.(A \backsim C) - \frac{1}{2}\cos.(A + C)}$, (II. 16ª); o vero $\cot.A + \cot.C = \frac{2\ \text{sen.}B}{\cos.(A \backsim C) + \cos.B}$, (III. 57ª, 66ª). Dalla quale equazione si vede che, qualunque sia la grandezza dell' angolo B, il valore del secondo membro sarà sempre il minimo possibile, quando $\cos.(A \backsim C)$ sarà il più grande possibile, cioè quando $A = C$. Si può dunque conchiudere per regola generale; che *la condizione più vantaggiosa di un triangolo, quando si voglia determinare un lato solo, è che la base sia uguale al lato cercato.* Questa è la condizione essenziale. Per quel che sia l' angolo compreso B, è vero che, nel caso di $\cot.A + \cot.C$, giova che sia il più piccolo possibile, ma la grandezza di quest' angolo è indifferente nel caso di $\cot.A - \cot.C$, (posta l'egualità degli errori); e però importa non aggravarsi di restrizioni generali senza una generale necessità. Si può dunque dare alla base la direzione che sarà più comoda, osservando solo che gli angoli A e C non siano poi troppo piccoli.

333. Poichè, per la regola antecedente, la base deve essere uguale al lato cercato, ne segue evidentemente che *la condizione più vantaggiosa di un triangolo, quando si vogliano determinare due lati, è che il triangolo sia equilatero.*

334. Rare volte succede che possa misurarsi comodamente una

base, che sia tanto lunga quanto i lati cercati. Posto dunque che la lunghezza della base sia limitata, supponiamo che almeno la sua direzione sia libera, e cerchiamo quale esser debba nel caso, in cui si voglia determinare un solo degli altri due lati del triangolo.

Sia sempre AB la base, BC il lato cercato. Convien trovare il valor minimo di $\cot.A \mp \cot.C$, (332), allora quando non può essere $A = C$.

E prima, nel caso del segno negativo, si ha (III. 51°, 104°), $\cot.A - \cot.C = \frac{AB - BC\ \cos.B}{BC\ \mathrm{sen}.B} - \frac{BC - AB\ \cos.B}{AB\ \mathrm{sen}.B} = \frac{AB^2 - BC^2}{AB \times BC\ \mathrm{sen}.B}$. La grandezza di BC e di AB si suppone limitata dalle circostanze locali, altrimenti si accorcierebbe BC, o si allungherebbe AB, finchè fossero eguali (332). Dunque, posti AB e BC costanti nell'ultima espressione, si vede chiaro che il minimo valore di $\cot.A - \cot.C$ ha luogo quando $B = 90°$.

Esaminando ora il caso del segno positivo, si ha (III. 101°), $\cot.A + \cot.C = \cot.A + \frac{\sqrt{(BC^2 - AB^2\ \mathrm{sen.}^2A)}}{AB\ \mathrm{sen}.A} = \cot.A + \sqrt{\frac{BC^2}{AB^2\mathrm{sen.}^2A} - 1}$. Ragionando, come nel caso precedente, il valor minimo della frazione sotto il vincolo radicale si vede aver luogo quando $A = 90°$. Ma allora anche cot.A sparisce, (34). Dunque il valor minimo di $\cot.A + \cot.C$ ha luogo quando $A = 90°$. Questa è la regola generale che dà Bouguer (*Fig. de la Terre*, pag. 88). Ma abbiamo trovato che, nel caso di $\cot.A - \cot.C$, conviene che sia $B = 90°$. Dunque, poichè gli angoli A e B non possono essere tutti due retti, noi giudichiamo di meglio abbracciar tutti i casi, prendendo la via di mezzo, e facendo $A = B$.

Applicando al lato AC tutto ciò che si è detto del lato BC, ne risulterebbe la medesima conclusione. Dunque in generale *quando la base non può essere uguale al lato, od ai lati cercati, la condizione più vantaggiosa del triangolo si è, che la base sia la più lunga possibile, e gli angoli sulla base uguali.*

Ho aggiunto la condizione, *che la base sia la più lunga possibile*, perchè dall' aver trovato che, per il meglio, ciascuno degli angoli sulla base dovrebbe essere di 90°, non conchiuda talvolta alcuno, che gioverebbe di far la base cortissima. La regola fondamentale è che la base sia uguale ai lati cercati (332, 333). Questa regola deve infrangersi meno che si può: e solo per diminuire i danni d' un' infrazione forzata, abbiamo trovato doversi fare il triangolo isoscele.

335. L' equazione $\delta BC = e \times BC\,(\text{cot.}A \mp \text{cot.}C)$ fa vedere, che la quantità $e\,(\text{cot.}A \mp \text{cot.}C)$, che abbiamo esaminato fin ora, è proporzionale alla grandezza di BC. Posta dunque la possibilità di determinare una distanza BC per mezzo di un solo triangolo equilatero ABC, o vero, dividendola in più parti, per mezzo di molti triangoli equilateri minori BDE, EDG, &c., importa discutere a qual partito convenga dare la preferenza. Fig. 37

Sia dunque BC divisa in tre parti eguali BD, DF, FC, e sia BE la base in vece di AB. Risolvendo il triangolo BDE, si trovano BD e DE. Quindi, presa DE per base, si risolve il triangolo DGE per trovar DG. Conoscendo DG, si risolve il triangolo DGF per trovar DF, FG; e così seguitando si determinano tutte le parti di BC. Ora in questa operazione convien riflettere che due sono le cause di errore nella risoluzione del secondo triangolo DGE: l' una è l' errore commesso nell' osservare i suoi angoli, della quale abbiamo trattato fin quì; l' altra è l' errore della base DE prodotto da quello degli angoli, nella risoluzione del primo triangolo BDE. Per saper qual errore produca nel lato cercato l'errore della base, si fanno costanti gli angoli opposti (285), e tosto si vede (278) che gli errori sono proporzionali alla grandezza de' lati. Or si supponga che sia di un piede l'errore prodotto dagli angoli in ciascuno de' lati del primo triangolo, BD, DE. Ne segue che l' errore di DG sarà di due piedi, uno comunicato dal lato DE, e l'altro dagli angoli del triangolo DGE. Quindi l'errore di DF, e di FG, sarà di 3 piedi, cioè due per causa di DG, e uno prodotto

Fig.37 dagli angoli del triangolo DFG. Così procedendo, si trova di 5 piedi l'errore di CF. Se BC fosse stato diviso in 4 parti, la quarta parte avrebbe un errore di 7 piedi; e così gli errori crescerebbero sempre in progressione aritmetica, se il numero delle parti di BC fosse maggiore. Ora sommando i tre errori, 1, 3, 5, di BD, DF, FC, risulta di 9 piedi l'errore sul lato BC determinato per mezzo di 5 triangoli. All'incontro, impiegando un solo triangolo ABC, l'error non sarebbe che di 3 piedi, cioè triplo dell'error di BD, giacchè BC = 3BD, e l'errore proveniente dagli angoli è proporzionale al lato cercato, come vedemmo in principio del presente articolo. Dunque parrebbe evidente la conclusione, che i triangoli debbano moltiplicarsi meno che si può. Ma conviene riflettere che l'errore di 9 piedi sopra BC si è trovato per l'accumulazione di tutti gli errori di 5 triangoli, il che suppone che detti errori sian tutti stati commessi nel medesimo senso. Or questa accumulazione non solo è remota da ogni probabilità, ma anche smentita, e ridotta a zero, per così dire, dall'esperienza. Nelle determinazioni importanti e delicate si misurano due basi, l'una al principio, e l'altra alla fine de' triangoli, come, per esempio, BE, CH. Questo è il modo più sicuro di dare la prova alle operazioni trigonometriche intermedie. Ora gli Accademici Francesi nel Perù non trovarono che un divario di due piedi, fra la misura ed il calcolo, sull'ultima base, alla quale pervennero per una serie di 28 triangoli che servirono a determinare una distanza BC di 180 miglia geografiche. Similmente non arriva a 5 piedi l'errore della seconda base, dopo una catena di 11 triangoli che servirono al Sig. Ab. Boscovich per determinare una distanza di 130 miglia. Ma se gli errori si fossero accumulati, supponendoli di 15″ in ogni angolo, l'errore della seconda base nel Perù doveva essere di 28 tese circa, e quello della seconda base in Italia di 19 tese; facendo il calcolo secondo la mia ipotesi de' triangoli equilateri. Dunque non si saprebbero desiderare prove più luminose di ciò che stabiliscono anche le regole della probabilità, cioè che gli errori si ricompensano con la moltiplicazione de'

de' triangoli. Egli è poi chiaro, che questa compensazione diviene molto più sicura, quando si osservano tutti tre gli angoli d'ogni triangolo, e si riduce la loro somma a 180°, (331).

336. Scarsa parrà forse l'utilità delle regole precedenti, poichè non si trovano facilmente, dove si vuole, i campanili ed altri oggetti distinti, sui quali dirigere i raggi visuali, per comporre i triangoli con le condizioni più vantaggiose. Ma potendo supplirsi molte volte con segnali piantati a posta nelle situazioni, ove mancano, dirò due parole della loro costruzione. Il Sig. Ab. Boscovich formava una specie di baracche quadrate, o circolari, di 14 piedi di diametro, ed anche più d'altezza, col mezzo di lunghi rami, ben profondati nel suolo, reciprocamente inclinati alla cima, e connessi con altri rami trasversali assicurati con corde e con chiodi. Queste baracche rivestite di fogliami si scorgevano fino in distanza di 50 miglia anche con piccoli cannocchiali, quando per altro erano collocate sul vertice delle più alte montagne, in guisa che la projezione dell'immagine si formasse nel Cielo. Senza quest'ultima condizione egli avverte, che per vederli fa d'uopo accorciar le distanze, e coprire i segnali con lenzuoli, o altre cose tiranti al bianco piuttosto che al nero: egli fece uso in un caso simile d'una tela di canape intonicata di calce, e potè ben discernere il segnale in distanza di 24 miglia. Picard si è servito utilmente di fuochi. Un fuoco largo tre piedi può esser veduto in distanza di 36 miglia.

Della maniera di levare i Piani, e di formare le Carte topografiche, e le geografiche di non molta estensione.

337. *Piano*, o *pianta* di un terreno, di una città, &c. si chiama un disegno, in cui sono descritte le linee de' contorni del terreno, e delle sue parti principali, in guisa che il complesso di dette linee forma una figura perfettamente conforme a quella del terreno o città, considerati sopra un piano orizzontale, facendo astrazion dalle altezze. Se si suppone che un campanile venga tagliato raso

terra, la figura che formeranno gli orli esteriori e interiori de' muri del campanile, veduti sulla superficie piana del terreno, si chiamerebbe la pianta del campanile. Quando si fa il piano di una fabbrica sola, si può segnare la grossezza de' muri con linea doppia; ma quando il piano contiene uno spazio più esteso, non si può notare ordinariamente il perimetro degli edifizj altro che con linee semplici.

Il piano si chiama *topografico*, quando contiene e mostra tutte le particolarità del terreno disegnato, cioè chiese, case, o isole di case, mulini, parchi, giardini, le due sponde de' fiumi, canali, e torrenti, gli acquedotti, le strade, sì grandi, che piccole, &c. Carte *geografiche* poi sono quelle che denotano semplicemente il sito delle città, e de' villaggi, de' boschi, e delle montagne, ed il corso de' fiumi. Per ora non intendiamo parlar che di quelle d' una Provincia, giacchè la costruzione della carta di un Regno, o di più Regni, richiede, come vedremo in appresso, la cognizione della Trigonometria sferica.

In quel modo, in cui si è formato con la tavoletta (315) il quadrilatero *abdc*, esattamente conforme al quadrilatero ABDC sul terreno, val a dire, in quel modo, nel qual si è determinata la posizione dei due oggetti C e D, relativamente alle due stazioni A, e B, nel medesimo modo si determinerebbe la posizione di qualsivoglia numero di oggetti, che potessero esser veduti stando in A e in B, col mezzo di linee tirate dai punti *a* e *b* in direzione a ciascuno degli oggetti, come si fece di *ac*, *ad*, *bc*, *bd*. Queste sono ordinariamente linee occulte, cioè fatte col lapis, le quali si cancellano poi con gomma elastica, o con mollica di pane, quando si sono notati con inchiostro i punti C, D, &c. La base medesima si cancella parimente, allorchè siano determinate sul piano le posizioni di tutti gli oggetti da essa dipendenti. Se poi si vuole veder nel disegno il contorno di un campo, di un giardino, &c. allora si segneranno con l' inchiostro le linee intiere del perimetro, tirate da un angolo all' altro successivamente, come, per esempio,

Fig. 32

AB, BD, CD, AC, supponendo che ABDC sia il contorno del campo, giardino, &c. Sarà cosa buona trascurar tutti quegli oggetti che fossero veduti dalle stazioni A, e B sotto angoli troppo ineguali (333, 334); e per determinare le loro posizioni trasportarsi in vece ad osservarli sulle estremità di un de' lati, come AC, CD, BD, &c., i quali si sono determinati prima dalle accennate stazioni, scegliendo quello che darà gli angoli meno disuguali. Su questo lato prescelto, che può chiamarsi una seconda base, si opererà nello stesso modo, come sulla prima base AB. E così si passerà di base in base, finchè si abbia sopra la carta la posizione di tutti gli oggetti che si vogliono metter nel piano.

La prima cosa che deve farsi è di formare a piedi della carta una scala corrispondente alla grandezza che si vuol dare al disegno. Su questa scala si prenderà la lunghezza che deve avere la base che si è misurata colla pertica. Suppongo, per esempio, che la base sia lunga mille pertiche, e che la scala sia divisa in pollici e linee; se si prende su questa un intervallo di 8 pol. 4 lin., o sia di 100 linee, per descriver la base sulla carta, in tal caso ogni spazio di una linea sul disegno corrisponderà a 10 pertiche sul terreno. Si procurerà che la base si trovi, per quanto è possibile, nel mezzo del terreno di cui vuol levarsi la pianta, e che i punti estremi della medesima siano situati in modo, che da quelli si possa scoprire gran numero degli oggetti che si vogliono mettere nel disegno. Secondo la situazione in cui si trova la base sul terreno relativamente al perimetro del medesimo, si descriverà la linea che rappresenta la base, nel mezzo della carta, nell' alto, nel basso, verso la destra, o verso la sinistra; prendendo la lunghezza di questa linea, come si è detto, sopra la scala. Ciò fatto, le intersezioni delle linee tirate verso ogni oggetto da due diverse stazioni, daranno le posizioni relative d' ogni oggetto sopra la carta, ed il piano sarà levato.

Per non equivocare, sarà cosa ben fatta di scrivere in capo ad ogni linea il nome dell' oggetto, in direzione del quale fu tirata.

Delle strade si noteranno pochi punti, per non far confusione di molte linee nel disegno. Si presceglieranno i punti estremi, e qualcuno degl' intermedj, dove la strada fa più angolo. Se quivi non esistessero oggetti distinti, sui quali appuntare, si faranno piantare paline, o altri segnali. Lo stesso si dica de' fiumi. Vedremo (339) il modo di figurar nel disegno tutta la direzione delle strade e de' fiumi, secondo le loro tortuosità, e con le loro larghezze; e similmente il modo di figurare il perimetro delle chiese, case, o isole di case, per le quali basta determinar nel disegno, coi metodi precedenti, i due punti estremi della lunghezza d'una facciata qualunque, preferendo sempre quella che può osservarsi meglio di fronte da due stazioni.

338. Se il piano che vuol levarsi è quello di una città, convien far le stazioni sui crocicchj delle strade, e misurar con la pertica esattamente la lunghezza di queste da una stazione all' altra, quando queste lunghezze non siano determinate nel disegno con l' intersezion delle linee tirate da due diverse stazioni. Sarà bene cominciar dalla piazza più grande, levandone la pianta con far la stazione nel mezzo, e tirando una linea sopra la carta dal centro dell' alidada verso ciascuno degli angoli delle strade che mettono sulla piazza. Si misurano colla pertica diligentemente tutte le distanze dal punto del terreno corrispondente a piombo al centro dell' alidada, fino a ciascuno degli angoli sopraddetti, indi col mezzo della scala si danno le stesse lunghezze alle linee corrispondenti sopra il disegno. Gli spazj, fra le estremità di queste linee, si chiudono ed uniscono insieme con altre linee ne' siti corripondenti alle case, lasciando aperti quelli corrispondenti alle strade; con che è levata la pianta della piazza. Si ha così un buon numero di punti fissi che servono d'origine per connettervi tutte le strade che partono dalla piazza. Ma sarebbe troppo lungo il condurre per mano in tutte le più minute manovre di quest' Arte, delle quali si apprende più con l' esercizio, in un giorno, di quello che per lettura di molti precetti.

Facendo molto uso della tavoletta, specialmente in campagna, un Ingegnere può divenir capace di stimare gli angoli e le distanze a colpo d'occhio. Al più ogni semicircolo o sia rapportatore, armato di un'alidada qualunque per dirigere il raggio visuale, gli servirà a prendere i primi ad un grado più o meno; ed esercitandosi a misurar le seconde col passo, potrà disegnare un piano con grande approssimazione al vero. In ciò consiste principalmente l'abilità degl' Ingegneri militari, che rare volte hanno il tempo e la libertà d'impiegare la tavoletta ed altri stromenti per levare le piante. I Geografi stessi non hanno bisogno sovente di maggior precisione per distribuire sulla carta i paesi di minor conto, allor quando hanno determinato con esattezza le posizioni delle città e de'luoghi più notabili. Rare sono le carte geografiche di tanto larghe dimensioni, che un mezzo miglio vi occupi uno spazio sensibile.

339. La larghezza delle strade si misura con la pertica. Per avere quella de' fiumi, si può collimare, da ciascuna di due stazioni al solito, a due oggetti, o segnali, posti l'uno in faccia all'altro sulle due rive. Ma le tortuosità delle strade e de' fiumi, ed anche le loro larghezze, si levano speditamente col mezzo della *bussola*. Giova impiegarla più grande che sia possibile, molto sensitiva, e ben montata in una scatola quadra, i cui lati siano paralleli alle linee AB, CD, destinate ad indicare la tramontana, il mezzogiorno, il levante, e il ponente. La scatola interna circolare deve esser divisa in 360 parti, o meglio in 720 per avere il mezzo grado; e la punta dell'ago magnetico deve radere l'orlo delle divisioni senza toccarle, affinchè si veda con più certezza a qual di esse precisamente corrisponda la punta medesima. Alla scatola esterna sta applicato un pezzo EF, di forma prismatica, parallelo al diametro AB, o sia alla linea nord e sud, il qual pezzo porta sulle sue estremità due traguardi, non disegnati nella figura per minor confusione. La vite V serve per fissare il pezzo EF, che deve per altro poter girare forzato sulla parte liscia della vite, affinchè i traguardi si possano dirigere ad oggetti elevati, o depressi, mentre la scatola della

Fig. 38

bussola deve sempre restare parallela all'orizzonte per la libertà, ed esattezza de' movimenti dell'ago calamitato.

Fig. 1. Ciò posto, siano K, H, due oggetti, de' quali vuol prendersi la distanza angolare veduta dal punto C. Ivi stando, si osserverà per li traguardi uno degli oggetti, per esempio K. Suppongo che in tal posizion della bussola l'ago magnetico si trovi nella direzione CF. La direzione CK del traguardo essendo parallela al diametro AB (fig. 38) della bussola, ne segue che l'angolo che fa l'ago magnetico col diametro stesso è uguale all'angolo FCK. Notata la grandezza di quest' angolo indicata dalle divisioni, si volterà la bussola ed il traguardo ad osservare l'oggetto H. L'ago calamitato prenderà ancora la direzione CF, e indicherà in questo caso l'angolo FCH. La differenza dei due angoli osservati è l'angolo cercato KCH.

È cosa chiara che se i due oggetti fossero stati N, K, cioè l'uno situato da una parte e l'altro dall'altra, respettivamente alla direzione CF dell'ago magnetico, l'angolo cercato NCK sarebbe stato la somma dei due angoli osservati NCF, FCK.

Diviene ora facile il disegnare il corso tortuoso di un fiume, e Fig. 39 la sua larghezza. Piantate paline in D, E, F, G, H, cioè ne' siti ove la curvità della riva è maggiore, si misureranno colla pertica le distanze DE, EF, FG, GH, e con la bussola gli angoli che le medesime fanno tra loro. Suppongo che la direzione dell' ago calamitato sia successivamente DN, EN, FN, GN, HN. È cosa chiara che stando, per esempio, in G, con osservar l'oggetto H si avrà l'angolo NGH, e con osservar l'oggetto F si avrà l'angolo NGF. La somma di questi due angoli, sottratta da 360° nel caso della figura, darà l'angolo cercato FGH.

Per non moltiplicar le stazioni soverchiamente, nell'atto stesso di misurar le basi DE, EF, &c. si misurano pur le distanze perpendicolari da dette basi alla riva, quando queste distanze variano fra loro notabilmente: sono espresse nella figura dalle linee punteggiate cadenti sopra GH. Lo stesso si farà delle distanze delle stazioni

G, H, &c. alla riva. Queste perpendicolari sarebbero sufficienti senza l'osservazione degli angoli, se le basi GH, FG, &c. fossero tirate sopra la carta nel sito e grandezza che lor conviene, nell' atto di osservare gli oggetti pei traguardi della tavoletta, o della bussola. Gli stessi metodi servono per prendere il contorno irregolare di un terreno, di un bosco, &c. e le tortuosità delle strade.

Se si vuol la larghezza del fiume per mezzo della bussola, si osserverà da due stazioni, come F, e G, un oggetto, o segnale S posto sull' altra sponda. Sottraendo dagli angoli NGS, NFS gli angoli NGF, NFG, si conosceranno gli angoli SGF, SFG. Questi formati nel piano sopra la base FG daranno il punto S. Convien far questa operazione in tutti i siti, ove il fiume cangerà sensibilmente di larghezza.

Quando si ha nel piano una delle faccie (337) di un edificio, di un recinto, di un groppo di case, &c. si misurano colla pertica le lunghezze delle altre faccie, e si prendono colla bussola gli angoli che fanno fra loro. Si ha così quanto fa di bisogno per delinear sul disegno tutti i contorni.

Serve pure la bussola a prendere gli angoli nelle mine, ed in ogni sotterraneo: misurando inoltre le lunghezze degli anditi colla pertica, si determinano sopra terra le direzioni, e tortuosità delle mine, e si può trovare, a un di presso, in qual sito convenga aprire una nuova bocca, con cui si voglia incontrarle. Si badi solo che la direzione dell' ago magnetico può esser turbata, se vi ha del ferro nelle vicinanze.

Con la bussola e il *loch*, si può anche levare il disegno approssimante d'una spiaggia, di un porto, &c., stando in un bastimento. Con la prima si prendono le distanze angolari fra i Capi, ed altri oggetti distinti lungo la spiaggia. Il secondo misura il viaggio che fa il bastimento dopo questa prima osservazione infino ad un altro momento convenientemente distante (332, e segg.), in cui siansi prese di nuovo le distanze angolari fra gli stessi oggetti. Il viaggio, fatto nell' intervallo, serve di base, e la sua direzione è pur data

dalla bussola. Formando sopra la carta alle due estremità di questa base tutti gli angoli osservati, le intersezioni delle linee, tirate da dette estremità, daranno le posizioni di tutti i punti che furono presi di mira.

340. Finalmente il servizio essenziale, che rende la bussola, è quello di orientare i piani: e a tal effetto i grafometri sogliono andar muniti di una bussola (296). Sopra ogni piano si pone una croce indicante le quattro plaghe del mondo, distinguendo la tramontana con una freccia. Questa croce fa conoscere la vera posizione di tutti gli oggetti esistenti nel piano, relativamente ai punti cardinali del mondo. Convien mettere tutto lo scrupolo in questa operazione; ed è però necessario di sapere, che l'ago calamitato non mostra precisamente il vero punto del nord, e che la declinazione è diversa in diversi tempi e diversi luoghi. La declinazione presente in Parigi è di gradi 20 circa verso ponente. Si vede però che la quantità è tale che non può esser negletta. L'imperfezione delle piccole bussole, di cui fa uso la maggior parte degli Agrimensori, il non tenersi conto da molti della declinazione, e il prendere gli angoli piccoli con egual sicurezza come i grandi, sono motivi di grossi falli ne' loro piani. Racconta il compagno del P. Boscovich nell'Opera citata (293) d'aver osservato fin 10 miglia di errore nelle carte particolari d'alcune provincie Pontificie, e tre paesi, situati realmente su una medesima linea, formar più d'una volta sulla carta un triangolo equilatero. Ogni linea del piano può servire a segnar convenientemente le plaghe del mondo; la più sicura è la base. Osservando l'angolo che fa l'ago magnetico con la base sul terreno, come si fece quì sopra (339) per le basi DE, EF, &c., si terrà conto di più, nell' operazione presente, della declinazione che farà la calamita in quell'anno e in quel paese. Quest'angolo così corretto si formerà sulla base con linea occulta, la qual servirà di norma per formare la croce dove sarà più comodo sopra il piano. Si usa sempre disporlo in modo, che la parte settentrionale si trovi nell'alto della carta.

341.

341. Abbiamo parlato dell' uso della tavoletta e della bussola nel levare i piani. Non conviene impiegar la seconda dovunque si voglia gran precisione. Così la prima deve posporsi al grafometro ed al quadrante, massime quando si tratta della carta geografica di una provincia, e di triangoli alquanto grandi. Allor quando con questi istromenti si sono misurati almeno due angoli in ogni triangolo, ed allorchè sono calcolate tutte le riduzioni fino ad avere la grandezza definitiva degli angoli sopra un orizzonte comune, fa d'uopo formarli tutti sulla carta, cominciando da quelli sopra la base. Quand' anche in questa operazione s' impieghi il metodo più sicuro (295), ad ogni modo le linee tirate con la mano non possono mai avere l'esattezza matematica; e gli errori potrebbero moltiplicarsi in modo da rendere inconciliabili le posizioni remote dalla base. Per evitar questo ed altri inconvenienti, si è immaginato di riportare ogni punto principale della carta ad una linea sola, che chiamasi *meridiana* (416), e che è in fatti nella giusta direzione da tramontana a mezzogiorno. Ciò si fa nel modo seguente.

Siano A, B, C, D, F, &c. i punti che si vogliono collocar convenevolmente sulla carta. Fatte le riduzioni di tutti gli angoli BAC, ACB, &c. convien risolvere i triangoli del poligono per calcolare tutte le distanze, o sia i lati AB, AC, CD, &c. Si eleggerà un meridiano, che passi presso poco pel mezzo del poligono; tale è, per esempio, nella figura la linea AN, che rappresenta il meridiano del punto A. Convien conoscere in primo luogo uno degli angoli BAN, CAN. Sia ⊙ il Sole che tramonta. Si osserverà la distanza angolare del Sole dal punto B, cioè l' angolo BA⊙. L'Astronomia dà le regole per conoscere facilmente ed esattamente qual sia nel momento del tramontare del Sole l'angolo NA⊙. La differenza di questi due angoli nel caso della fig. è l' angolo cercato BAN. Sottraendolo da BAC si ha pure CAN. Siano B*e*, C*m* perpendicolari sopra la meridiana. Conoscendo AB, e BAN, si risolverà il triangolo rettangolo A*e*B per trovare A*e*, B*e*: la prima è *la distanza* del punto A *dalla perpendicolare* che parte dal punto B, la seconda

Fig.40

è *la distanza* del punto B *dalla meridiana*. Similmente conoscendo AC, e CAN, si troveranno A*m*, C*m*, che sono le distanze anzi dette per rispetto al punto C. Dall' angolo ABC sottraendo AB*e*, si ha CB*e*, che aggiunto a FBC dà FB*u*, col quale e con FB si troveranno F*u* = *sc*, e B*u*. Aggiungendo *sc* ad A*e* si ha A*s*; sottraendo B*u* da B*e* si ha *cu* = F*s*. In questo modo si calcoleranno le distanze del punto A dalla perpendicolare, che parte da ognuno de' punti che vogliono mettersi sulla carta, e la lunghezza della medesima perpendicolare, vale a dire la distanza di ciascuno de' punti stessi dal meridiano. Fissando sopra la carta con questi due soli dati la posizion d' ogni punto, è cosa evidente, che gli errori non potranno più comunicarsi e moltiplicarsi; perchè se si commette un errore nel segnare il punto C che fu trovato col mezzo delle distanze A*m*, C*m*, questo errore non influirà in verun modo sulla posizione del punto D, la qual non si trova sulla carta col mezzo del punto C, ma con altre distanze A*n*, D*n*. Quindi si vede che, fissato sopra la carta il punto A e il meridiano AN, tutte le posizioni si segneranno indipendentemente l'una dall' altra. È poi cosa chiara, che in quel modo con cui dall' osservazione del Sole che tramonta si è dedotto l' angolo BAN, si dedurrebbe in vece l' angolo CAN osservando il Sole nascente.

Con questo sì esatto e bel metodo è fatto il gran Piano geometrico del Regno di Francia, diviso in 180 carte, e fondato sulla misura di 19 basi, che confermano l' esattezza delle operazioni, e de' calcoli trigonometrici sopra una gran quantità di triangoli.

Problemi diversi.

342. *Determinare la posizione di un luogo, dal quale si vedono tre luoghi, la cui posizione è nota, ed il quale pur da essi luoghi non si può scorgere;* come avvien, per esempio, allorchè si vede solamente la cima di un campanile, fino alla quale non si potesse montare per discoprire quel luogo, da cui fu osservata.

Fig. 41 Siano A, B, C i tre luoghi noti di posizione, onde ogni parte

del triangolo ABC si suppone cognita; e sia D il luogo ignoto, dal quale essendo stati osservati gli angoli m, n, si dimandano le distanze BD, AD, CD.

Ne' triangoli ABD, BCD, che hanno un lato comune BD, si ha $BD = \frac{AB \text{ sen.} x}{\text{sen.} m} = \frac{BC \text{ sen.} z}{\text{sen.}(m + n)}$. Ma $z = 180° - n - y = 180° - n - (180° - B - x) = x + B - n$. Dunque (54), $\text{sen.} z = \text{sen.} x \cos.(B - n) + \cos.x \text{ sen.}(B - n) = \frac{AB \text{ sen.}(m + n)}{BC \text{ sen.} m} \times \text{sen.} x$. Dividendo l'ultima equazione per $\text{sen.} x$, se ne cava, $\cot.x = \frac{AB \text{ sen.}(m + n)}{BC \text{ sen.} m \text{ sen.}(B - n)} - \cot.(B - n)$, o vero, per più comodo del calcolo,

$$\cot.x = \cot.\overline{B - n} \left(\frac{\text{sen.} C \text{ sen.}(m + n)}{\text{sen.} BAC \text{ sen.} m \cos(B - n)} - 1 \right).$$

Trovato col mezzo di questa equazione il segmento x dell' angolo BAC, si conoscerà per conseguenza l'altro segmento CAD, e la risoluzione de' triangoli ABD, ACD darà le distanze cercate.

Questa nostra soluzione ha il vantaggio, che soddisfa sola a tutti i casi.

In fatti, se $B < n$, si avvertirà solamente che $\cot.(B - n)$ divien negativa, (154).

Che se il punto D fosse dentro del triangolo ABC, si avrebbe $(m + n) > 180°$, ed allora anche $\text{sen.}(m + n)$ sarebbe negativo. Se poi alcuno degli angoli A, B, C fosse ottuso, si cercherà sempre il segmento di uno degli angoli acuti, affine di evitare ogni studio o incertezza sulla specie di x.

Se $B = 0$, il che succede quando i tre luoghi B, A, C sono posti in linea retta (si consideri il luogo A nel punto y, e $x = ByD$), sarà allora $\cot.x = \cot.n \left(1 - \frac{AB \text{ sen.}(m + n)}{BC \text{ sen.} m \cos.n} \right) = \frac{AC \cot.n - AB \cot.m}{BC}$.

Finalmente nel caso, che fosse $B = n$, il problema sarà indeterminato, $\cot.(B - n)$ essendo allora infinita, e infinite le posizioni del punto D, che soddisfano ai dati, come si conoscerà praticando la costruzione che segue.

Aa ij

Fig.41 343. Se non preme il conoscere le distanze AD, BD, CD, ma solamente la situazione convenevole al punto D sopra una carta, ciò divien più espedito col mezzo della costruzione seguente. Se ci figuriamo un circolo, il qual passi pei punti A, B, D, avrem $\frac{1}{2}$AB = sen.m. Questo seno è proporzionale al raggio del circolo supposto : sarà dunque facile (25) conoscere la grandezza di questo raggio, dividendo $\frac{1}{2}$AB per sen.m preso nelle tavole. Similmente $\frac{AC}{2\,\text{sen.}n}$ sarà il raggio del circolo il qual passerebbe pei punti A, C, D. Dunque, se si descrivono i due circoli sulla carta col respettivo raggio calcolato, questi dovranno incontrarsi e tagliarsi in due punti, uno de' quali sarà il punto A, e l' altro darà sulla carta la posizione cercata del luogo D.

344. *Dal vertice di un' altezza data, misurar la distanza orizzontale di due oggetti depressi.*

Fig.34 Sia R un punto elevato, della quantità nota RE, sull' orizzonte comune agli oggetti A, P, e si voglia determinare, stando in R, la distanza AP. Si prenderà l' angolo di distanza ARP, e quelli di depressione, o sia i complementi di PRE, ARE. Il primo ARP si ridurrà ad AEP col mezzo della nostra formola (323); e gli altri col lato RE serviranno per calcolare AE, PE; con che si avrà quanto bisogna per trovare il lato AP, (IV. 3°).

Per dare un saggio solo delle utili applicazioni di questo problema, basti dire che essendo facile il misurare un' altezza con gran precisione per mezzo del barometro (311), si può da una punta sagliente di qualche ripida montagna determinare le posizioni de' paesi sepolti nelle valli, senza bisogno di misurare una base.

Fig.32 345. *Determinar la distanza di un oggetto* A *perpendicolarmente alla distanza* CD *di due oggetti inaccessibili*, C *e* D; *e la grandezza de' segmenti di* CD *formati dalla perpendicolare.*

Immaginiamoci una perpendicolare che cali dal punto A sulla linea CD. Misurando una base AB, ed operando come si è detto (314), si verrà in cognizione del valore de' lati AC, AD, e dell' an-

golo compreso CAD. Quindi si troveranno i segmenti di quest'angolo col mezzo della formola (245); con che si avranno due dati in ciascuno dei due triangoli rettangoli formati dalla perpendicolare, e il valore della medesima e de' segmenti sarà dato dalle formole ordinarie (213).

346. *Per un punto accessibile* A *sul terreno tirare una parallela ad una retta inaccessibile* CD.

Fatto quanto si disse (314), per conoscere AC, AD, e CAD, si risolverà il triangolo CAD per rilevare il valore di CDA. Allora non resta più che formare al punto A, con la linea AD, un angolo eguale a CDA per aver la parallela richiesta. Formato quest'angolo cogl'istromenti, si pianteranno paline nella direzione indicata dal cannocchiale, o traguardo; e la posizione della parallela sarà determinata sul terreno.

347. *Continuare una linea sul terreno al di là di un ostacolo che impedisce di vedere la direzione della linea medesima.*

Sia CD la linea che vuol continuarsi in EF. Si scelga un punto A, da cui si vedano gli oggetti C, e D, e dal qual pur si discopra il terreno, dove si cerca di determinare la dirittura di EF. Misurata CD colla pertica, e presi gli angoli del triangolo CDA, si calcolerà AC. Si misurerà cogl'istromenti l'angolo CAE, prendendo per AE la direzione più comoda ad arbitrio. Immaginando CD prolungata fino in E, si ha un triangolo CAE, nel qual conoscendo gli angoli, e il lato AC, si troverà AE. Nella direzione di AE data dall'istromento si misuri colla pertica una distanza AE eguale a quella data dal calcolo. Sarà trovato il punto E per cui passerebbe la linea CD prolungata. Allora si formerà in E un angolo AEF eguale al supplemento dell'angolo noto AEC, con che si avrà la direzione cercata EF. Fig.42

Se la distanza CD fosse inaccessibile, converrebbe misurare un'altra base AB, sulla quale operando, come si è detto (314), si determinerebbe AC e AD, o vero BC e BD, quindi l'angolo DCA,

o pur l'angolo DCB. Il resto è chiaro, a tenor del metodo or ora dato per giungere ad EF.

Chi volesse vedere un gran numero di problemi di Geometria, e di Trigonometria pratica, troverà uniti all' abbondanza il metodo e la chiarezza nel bel Trattato del Sig. Giannini di Pisa, primo Professore nel Collegio Militare di Segovia, intitolato: *Practicas de Geometria y Trigonometria, Segovia*, 1784.

CAPITOLO XII.

Risoluzione numerica di tutte le Equazioni di secondo e di terzo grado, per mezzo della Trigonometria.

348. OGNI equazione di *secondo grado* è rappresentata dalla seguente formola generale:

(A)...... $x^2 + px = q$.

Se ne cava

(B)...... $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$.

Se p e q sono quantità grandi, o frazionarie, il calcolo di questa equazione divien laborioso. La Trigonometria porge i mezzi di renderlo facile e breve. Già s'intende che, se la quantità sotto il vincolo radicale non è un quadrato perfetto, in nessuna maniera può aversi altro che un valor prossimo di x.

Esaminando il caso del radicale positivo, l'equazione (B) si può esprimere, come segue: $x = -\frac{1}{2}p\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}\right)$, (14).

Facendo, (206),

(C)...... $\text{tang.}A = \frac{2\sqrt{q}}{p}$,

e per conseguenza $\frac{1}{2}p = \frac{\cos.A\sqrt{q}}{\text{sen.}A}$, si avrà $x = -\frac{\cos.A\sqrt{q}}{\text{sen.}A} \times$

$\left(1 - \frac{1}{\cos.A}\right) = \frac{\cos.A\ \sqrt{q}}{\text{sen}.A} \times \frac{1 - \cos.A}{\cos.A} = \frac{1 - \cos.A}{\text{sen}.A} \times \sqrt{q}$.

E però (I. 40°)

(D)...... $x = \text{tang}.\frac{1}{2}A\ \sqrt{q}$.

Dunque trovato che siasi il valore di A per mezzo dell' equazione (C), tosto si avrà dalla (D) quello di x.

349. Considerando al presente nell'equazione (B) il radicale negativo, il che non altera la (C), si ha $x = -\frac{1}{2}p\left(1 + \frac{1}{\cos.A}\right) = -\frac{\cos.A\ \sqrt{q}}{\text{sen}.A.} \times \frac{1 + \cos.A}{\cos.A} = -\frac{1 + \cos.A}{\text{sen}.A} \times \sqrt{q}$. Dunque il secondo valore di x sarà, (II. 41°),

(E)...... $x = -\cot.\frac{1}{2}A\ \sqrt{q}$.

350. Col metodo stesso si troverà, che le formole precedenti servono pure nel caso, in cui l'equazione da risolvere (A) fosse di questa forma, $x^2 - px = q$. La sola differenza è che il valor negativo di x è dato dall' equazione (D), e il valor positivo dalla (E).

351. Sia ora l'equazione da risolvere (A) di questa forma; $x^2 + px = -q$; sarà $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$. Già si sa che quando q è negativo bisogna che non sia maggiore di $\frac{1}{4}p^2$, altrimenti la quantità sotto il vincolo radicale è immaginaria, nè si dà alcun valor reale di x, che sodisfi all'equazione. Ciò posto, considerando in prima il radicale positivo, si ha $x = -\frac{1}{2}p \times \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right)$. Laonde facendo, (208)

(F)...... $\text{sen}.A = \frac{2\sqrt{q}}{p}$,

il che dà $\frac{1}{2}p = \frac{\sqrt{q}}{\text{sen}.A}$, si avrà $x = -\frac{\sqrt{q}}{\text{sen}.A}(1 - \cos.A)$, o vero (II. 40°), $x = -\text{tang}.\frac{1}{2}A\ \sqrt{q}$, che è l'equazione (D) col segno negativo al secondo membro.

Considerando ora il radicale negativo, il che non altera l'equazione (F), si ha $x = -\frac{1}{2}p(1 + \cos.A) = -\frac{\sqrt{q}}{\text{sen}.A}(1 + \cos.A)$, o vero (II. 41°), $x = -\cot.\frac{1}{2}A\ \sqrt{q}$, che è l'equazione (E).

352. Finalmente se l'equazione da risolvere (A) fosse di questa forma, $x^2 - px = -q$, il che non altera l'equazione (F), col metodo stesso si troverà, che nel caso del radicale negativo il valore di x è quello dell'equazione (D), e nel caso del radicale positivo quello della (E) col secondo membro positivo.

353. Conchiudiamo, che le equazioni (D), (E) danno i due valori di x in tutti i casi. Quando q è positivo, si ha l'arco A dalla formola (C), e i due valori di x sono sempre di segno contrario. Quando q è negativo, convien cercar l'arco A con la formola (F), e i valori di x sono tutti due negativi se p è positivo, o tutti due positivi se p è negativo.

354. ESEMPIO. Sia proposta da risolvere l'equazione $x^2 + \frac{7}{44}x = \frac{1695}{12716}$. Si avrà dunque, (C), (D),

$$\text{tang.A} = \frac{88}{7}\sqrt{\frac{1695}{12716}},$$

$$x = \text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{A}\sqrt{\frac{1695}{12716}},$$

delle quali equazioni ecco il calcolo.

$$\begin{array}{rl}
\text{log.}1695 = & 3,2291697 \\
\text{compl.log.}12716 = & 5,8956495 \\
\hline
\text{somma} & 9,1248192 \\
\hline
\text{mezza somma} & 9,5624096 \\
\text{log.}88 = & 1,94448267 \\
\text{compl.log.}7 = & 9,15490196 \\
\hline
\text{somma o log. tang.A} = & 0,6617942 = \text{log.tang.}\ 77^\circ\ 42'\ 31'', 72 \\
\text{log.tang.}\tfrac{1}{2}\text{A} = & 9,9061115 \\
\text{mezza somma trovata} & 9,5624096 \\
\hline
\text{Somma o log.}x = & 9,4685211 = \text{log.}0,2941176.
\end{array}$$

Per sapere se questo valor prossimo positivo di x possa essere espresso da una frazione esatta, della quale i due termini siano numeri intieri di poche note, prendo il complemento di log. x, e considerandolo

considerandolo come un log. negativo (164), trovo — 0,5314789 $= \log. \frac{1}{3,4}$ esattamente. Con che tosto si vede che, moltiplicando questa frazione per 5, si ha $x = \frac{5}{17}$.

Chi vorrà calcolare il medesimo valore di x per mezzo della formola ordinaria (B), potrà avere un saggio della facilità e speditezza della soluzione trigonometrica.

355. Nel calcolo precedente se, nel luogo di log. tang.$\frac{1}{2}$A, si pone il suo complemento, si avrà log. $-x = 9,6562981 =$ log. — 0,4532085. Questo è il valor prossimo negativo di x, secondo la formola (E). Se si prende il complemento di log. $-x$, si trova $x = -\frac{1}{2,20649}$, che è pure un valor prossimo, il qual però non si può convertire in una frazione esatta e composta di numeri intieri. Ma, per ottenerla, basta aver trovato il valore esatto di $+x$. Si sa che q è il prodotto di tutte le radici, e che nel caso presente i due valori di x devono avere il segno contrario (353). Dunque, dividendo $\frac{1695}{12716}$ per $\frac{5}{17}$, si trova $x = -\frac{339}{748}$. Si può dar la prova a tutto il calcolo col mezzo dell' altra regola, che la somma delle due radici deve essere uguale a p.

356. Passando ora alla soluzione delle equazioni di *terzo grado*, si sa che, fatto sparire il secondo termine, sono tutte rappresentate dalla seguente formola generale:

(G)...... $x^3 + px + q = 0$.

La soluzione analitica di questa equazione è

(H)... $x = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}\right)}$.

La pongo sotto la forma seguente, (14): $x = \ldots\ldots$

$\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}q\sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}q\sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}}\right)}$;

e facendo, (206), $\frac{4p^3}{27q^2} = \text{tang.}^2\text{B}$, o vero,

(K)...... $\text{tang.B} = \frac{p}{3q} \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$,

ne risulta $x = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q \times \overline{1-\frac{1}{\cos.B}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q \times \overline{1+\frac{1}{\cos.B}}\right)}$. Sia, per maggior semplicità, $2\sqrt{\frac{1}{3}p} = R$, il che dà $p = \frac{3}{4}R^2$; l'equazione (K) diverrà $\text{tang.}B = \frac{R^3}{4q}$, donde si cava $q = \frac{R^3}{4\,\text{tang.}B}$. Sostituendo questo valore di q, si ha $x = \sqrt[3]{-\frac{R^3}{8\,\text{tang.}B} \times \frac{\cos.B - 1}{\cos.B}}$ $+ \sqrt[3]{-\frac{R^3}{8\,\text{tang.}B} \times \frac{\cos.B + 1}{\cos.B}} = \frac{1}{2}R\left(\sqrt[3]{\frac{1-\cos B}{\text{sen.}B}} - \sqrt[3]{\frac{1+\cos.B}{\text{sen.}B}}\right) =$ $\frac{1}{2}R\left(\sqrt[3]{\text{tang.}\frac{1}{2}B} - \sqrt[3]{\cot.\frac{1}{2}B}\right)$, (I. 40ª, 41ª), o sia $x = -R \times$ $\frac{\sqrt[3]{\cot.\frac{1}{2}B} - \sqrt[3]{\text{tang.}\frac{1}{2}B}}{2}$. Ma (I. 38ª), $\cot.2A = \frac{\cot.A - \text{tang.}A}{2}$. Comparando insieme le due ultime equazioni, se si fa

(L)...... $\text{tang.}A = \sqrt[3]{\text{tang.}\frac{1}{2}B}$,

e per conseguenza $\cot.A = \sqrt[3]{\cot.\frac{1}{2}B}$, sarà $x = -R\cot.2A$. Dunque, rimettendo il valore di R, si ha finalmente

(M)...... $x = -\cot.2A \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$.

Si perviene pertanto a trovare il valore di x per via di tre equazioni molto semplici: 1°. per mezzo della (K) si trova un arco B; 2°. colla (L) si trova un arco A; 3°. dalla (M) si ricava il valore cercato di x.

Se l'equazione da risolvere (G) fosse di questa forma, $x^3 + px - q = 0$, allora, nella soluzione analitica (H), $-\frac{1}{2}q$ divien positivo. Procedendo come sopra, si giungerà similmente alle stesse equazioni (K), (L), (M), colla sola differenza, che il secondo membro dell'ultima avrà il segno positivo.

357. Sia ora l'equazion da risolvere (G) di questa forma:

$$x^3 - px + q = 0;$$

il che rende $\frac{1}{27}p^3$ negativo nella soluzione analitica (H); sarà $x =$ $\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}q\sqrt{1-\frac{4p^3}{27q^2}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}q\sqrt{1-\frac{4p^3}{27q^2}}\right)}$.

Se si fa, (208), $\frac{4p^3}{27q^2} = \text{sen.}^2 B$, o vero

(N)...... $\text{sen.}B = \frac{p}{3q} \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$,

ne risulta $x = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q \times \overline{1 - \cos.B}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q \times \overline{1 + \cos.B}\right)}$.
Ma l'equazione (N) dà $q = \frac{R^3}{4 \,\mathrm{sen.B}}$, facendo al solito $R = 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, e per conseguenza $p = \frac{3}{4}R^2$. Dunque $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}R^3 \times \frac{1 - \cos.B}{\mathrm{sen.B}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{8}R^3 \times \frac{1 + \cos.B}{\mathrm{sen.B}}} = -R \times \frac{\sqrt[3]{\mathrm{tang.}\frac{1}{2}B} + \sqrt[3]{\cot.\frac{1}{2}B}}{2}$.
Ma (I. 9ª), $\frac{\mathrm{tang.A} + \cot.A}{2} = \frac{1}{\mathrm{sen.2A}}$. Dunque, adottando l'equazione (L), sarà $x = -\frac{R}{\mathrm{sen.2A}}$, o vero

(O)...... $x = -\frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{\mathrm{sen.2A}}$.

Si perviene pertanto a trovare il valore di x per mezzo delle tre equazioni (N), (L), (O).

Si troverà che le medesime servono ancora quando l'equazione da risolvere (G) fosse di questa forma

$$x^3 - px - q = 0;$$

e solo il secondo membro della (O) divien positivo.

Questa soluzione richiede che non sia $\frac{4p^3}{27q^2} > 1$; altrimenti non potrebbe farsi $\frac{4p^3}{27q^2} = \mathrm{sen.}^2B$, giacchè un seno non può mai esser maggiore del raggio.

358. Se però avvenga che, p essendo negativo, sia $4p^3 > 27q^2$, o vero $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}q^2$, la quantità $\sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^2}}$ si presenta sotto aspetto immaginario, e costituisce il *caso irreduttibile*, che fu così detto, per non essersi mai potuta trovare una soluzione analitica esatta che sia libera dall'immaginarietà: anzi di fresco dall'insigne Geometra Sig. Cavalier Lorgna è stata trattata con sottil discussione l'impossibilità di trovarla (*Memorie della Società Italiana*, Tom. I. Verona, 1782). E pure egli è certo che in questo caso l'equazione ha tre radici reali, non già una solamente come in tutti gli altri casi che abbiamo fin quì esaminati e risolti.

359. Per trovare con somma facilità le tre radici suddette,

per mezzo della Trigonometria, conviene abbandonare la soluzione analitica, implicata di quantità immaginarie, ed investigar tra le formole trigonometriche una che sia comparabile a quella che è proposta da risolvere,

$$x^3 - px \pm q = 0.$$

Se si prende l'equazione (125), sen. 3 A = 3 sen. A — 4 sen.³A, che, resa omogenea (55), diviene R² sen. 3 A = 3R² sen. A — 4 sen.³A; dividendo per 4, e trasportando, si avrà

(P)...... $\text{sen.}^3 A - \frac{3}{4} R^2 \,\text{sen.} A + \frac{1}{4} R^2 \,\text{sen.} 3A = 0.$

Comparando questa equazione, termine a termine, con la proposta, in cui piglio per ora q positivo; se si fa $x = \text{sen.}A$, si avrà 1°. $p = \frac{3}{4} R^2$, il che dà $R^2 = \frac{4}{3} p$, e $R = 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$; 2°. $q = \frac{1}{4} R^2$ sen. 3 A $= \frac{1}{3} p$ sen. 3 A, donde si cava sen. 3 A $= \frac{3q}{p}$. Questo seno è proporzionale al raggio dell' equazione, che è $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$. Per poterlo trovar nelle tavole, bisogna dunque (25) dividerlo pel detto raggio, onde si ha

(Q)...... $\text{sen.} 3A = \frac{3q}{p} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}.$

Trovato il valore di 3 A, col mezzo di questa equazione, sarà noto anche quello di A, e per conseguenza quello di $x = \text{sen.}A$. Ma perchè sen. A si prende nelle tavole, dove R = 1, fa d' uopo moltiplicarlo per il raggio dell' equazione; e però

(S)...... $x = \text{sen.}A \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$

360. Se nell' equazione (P) si pone 120° + A in vece di A, bisognerà mettere 360° + 3A in vece di 3 A. Ma sen. (360° + 3A) = sen. 360° cos. 3A + cos. 360° sen. 3A = sen. 3A, (42). Dunque l' equazione (Q) può esser la stessa, quantunque in vece di $x = \text{sen.}A$, si abbia $x = \text{sen.}(120° + A)$. Questo è dunque un secondo valore di x, il qual sodisfa all' equazione (P). Ma sen. (120° + A) = sen. (60° — A). Si avrà perciò

(T)...... $x = \text{sen.}(60° - A) \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$

Similmente, se nell'equazione (P) si pone $240° + A$ in vece di A, il che dà $720° + 3A$ in vece di 3A, sarà sen.$(720° + 3A)$ $=$ sen.$(360° + \overline{360° + 3A})$ $=$ sen.3A; e mentre l'equazione (Q) sussiste, si avrà un terzo valore di x, che sarà $x =$ sen.$(240° + A)$. Ma sen.$(240° + A) =$ sen.$(180° + \overline{60° + A}) =$ $-$ sen.$(60° + A)$. Dunque

$$(Z) \ldots\ldots x = - \text{sen.}(60° + A) \times 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}.$$

L'equazione (Q) suppone evidentemente che non sia $4p^3 <$ $27q^2$. Donde si vede che queste soluzioni non sono applicabili ai casi risolti (357), se non quando fosse $4p^3 = 27q^2$. Allora le formole (S), (T) danno due valori eguali di x, e la (Z) un terzo valore; laddove la soluzione (357) non dà che un valore di x, cioè quello stesso della formola (Z).

Or si noti il grande avvantaggio delle soluzioni trigonometriche nel caso irreduttibile. Col mezzo di quattro sole equazioni, (Q), (S), (T), (Z), brevissime da calcolare, poichè hanno tutte una quantità comune, cioè $2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$, si ottengono, o esatti, o prossimi, i tre valori di x, che le più volte non possono aversi dall'analisi, se non per vie molto laboriose.

361. Le medesime quattro equazioni, sol che si cangi il segno al secondo membro, servono pure allor quando q è negativo; sicchè l'equazion da risolvere fosse $x^3 - px - q = 0$. Di fatti essendo allora $-q = \tfrac{1}{4}R^2$sen.$3A = \tfrac{1}{3}p$ sen.3A, risulta sen.$3A =$ $- \frac{3q}{p}$; e ciò mostra che, in vece di 3A, si deve prendere $180° +$ 3A, (38), e per conseguenza $60° + A$ in vece di A. Quindi per primo valore si ha $x =$ sen.$(60° + A)$, che è l'equazione (Z) col segno positivo al secondo membro. Aggiungendo 360° a $180° + 3A$, e prendendo il terzo, si ha per secondo valore $x =$ sen.$(180° + A) = -$ sen.A, che è l'equazione (S) col segno cangiato. Similmente aggiungendo 720° a $180° + 3A$, e prendendo il terzo, si ha per ultimo valore $x =$ sen.$(300° + A)$;

$= \text{sen.}(360° - \overline{60° - A}) = - \text{sen.}(60° - A)$, che è l'equazione (T) col segno cangiato.

Si riconoscerà facilmente che, se la circonferenza del circolo si aggiungesse più di due volte, non si avrebbero mai altri valori di x, se non i tre già trovati; e che, se si aggiungesse un arco maggiore, o minore della circonferenza, non si avrebbe più un seno eguale a sen.3A : il che serve di confermazione alla dottrina delle equazioni, secondo la quale la (P) non può aver se non se tre radici.

Tre sono dunque i seni, che sodisfano all' equazione (P), cioè sen.A, sen.(60° — A), e — sen.(60° + A); ed in que' modi, co' quali abbiamo trovate queste tre radici, si rinverranno facilmente tutte quelle d'ogni equazione delle tavole (125); e queste radici saranno tante, quante sono le unità nel fattore di A.

362. Se si fa $A = \frac{1}{3}a$, e se si chiama z la corda dell'arco $\frac{2}{3}a$, si ha $\frac{1}{2}z = \text{sen.}\frac{1}{3}a = \text{sen.A}$. Quindi l'equazione (P) darà, fatto $R = 1$,

$$(P') \ldots\ldots \tfrac{1}{8}z^3 - \tfrac{3}{8}z + \tfrac{1}{8}\text{cord.}2a = 0.$$

D'Alembert nell' articolo 12°. di una Memoria sulle quantità negative (*Opusc. Math.* T. VIII, pag. 275, 276), il qual devo credere non riletto dal celebre Autore, poichè contiene diversi errori in poche linee, dà le seguenti radici di una equazione, colla quale egli intende rappresentare l'equazione (P'):

$$\text{cord.}\tfrac{2}{3}a,\ \text{cord.}(60° + \tfrac{2}{3}a),\ \text{cord.}(120° + \tfrac{2}{3}a);\ \text{o vero}$$

$$2\text{sen.}\tfrac{1}{3}a,\ 2\text{sen.}(30° + \tfrac{1}{3}a),\ 2\text{sen.}(60° + \tfrac{1}{3}a).$$

È facile dimostrare la falsità delle due ultime radici, imponendo un valore determinato all' arco $\frac{1}{3}a$. Per esempio, sia per maggior facilità $\frac{1}{3}a = 30°$, il che dà 1°. $z = 2\text{sen.}30° = 1$; 2°. $z = 2\text{sen.}60° = \sqrt{3}$, (43); 3°. $z = 2\text{sen.}90° = 2$. Sostituendo separatamente questi tre valori di z nell' equazione (P'), che moltiplicata per 8 diviene $z^3 - 3z + \text{cord.}2a = 0$, si ha 1°. $1 -$

$3 + 2 = 0$, il che è vero; 2°. $3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 2 = 0$, il che è falso; 3°. $8 - 6 + 2 = 0$, il che è falso.

Le tre giuste radici dell'equazione $z^3 - 3z + \text{cord.}\,2a = 0$, ovvero dell'equazione $\text{cord.}^3\,\tfrac{2}{3}a - 3\,\text{cord.}\,\tfrac{2}{3}a + 2\,\text{sen.}\,a = 0$, si hanno facilmente, col metodo che ho tenuto (360). La prima radice è senza dubbio cord.$\tfrac{2}{3}a$. Se in vece di a si pone $360° + a$, il che non altera il valore nè il segno di sen.a, la seconda radice sarà cord.$(240° + \tfrac{2}{3}a)$, o vero 2sen.$(120° + \tfrac{1}{3}a)$. Si ponga per ultimo $720° + a$ in vece di a; si avrà, per terza radice, cord.$(480° + \tfrac{2}{3}a)$, ovvero 2sen.$(240° + \tfrac{1}{3}a)$, che è la radice negativa, (42).

Il ritrovamento di quest'ultima radice è stato il mio scopo principale in questa disamina, affinchè talvolta qualcuno non pensi, che le corde non siano suscettibili del segno negativo, a cagione che in un medesimo circolo non si danno corde poste assolutamente l'una in senso contrario dell'altra. Il ripetere la contrarietà de' segni dalla posizione diametralmente opposta delle linee della stessa specie, è un principio fallace, come ne dà qualche buona ragione l'Autore succitato nella detta Memoria. In generale, posto $360° = c$, e $a < c$, i seni positivi sono, per le regole e per la formola elementari (42, 51), sen.$\tfrac{1}{2}a$, sen.$\tfrac{1}{2}(2c + a)$, sen.$\tfrac{1}{2}(4c + a)$, &c.; i negativi sen.$\tfrac{1}{2}(c + a)$, sen.$\tfrac{1}{2}(3c + a)$, sen.$\tfrac{1}{2}(5c + a)$, &c. Per conseguenza le corde positive sono cord.a, cord.$(2c + a)$, cord.$(4c + a)$, &c.; le negative cord.$(c + a)$, cord.$(3c + a)$, cord.$(5c + a)$, &c. Questa alternativa de' segni è perfettamente conforme alla regola de l'Hôpital, (*Analyse des Infiniment-petits*, art. 46), che è quella che ho data (16). La corda dell'arco a cresce insieme con esso, e col segno positivo, da 0° fino a 180°, ove detta corda perviene al suo massimo. L'arco seguitando a crescere, la corda diminuisce progressivamente, senza che vi sia alcun motivo il quale alteri il suo segno positivo, e finalmente si riduce a zero allor quando l'arco giunge a 360°. Continuando l'arco a procedere e a crescere ancora nel medesimo senso (giacchè il circolo si può

considerare, come una curva rientrante in se stessa con infinite rivoluzioni), cord. $(c + a)$ deve essere negativa, poichè è passata per zero. E così discorrendo si scorgerà, che la corda deve mutar di segno ogni volta che l'arco ritorna a compiere una o più circonferenze.

363. *Esempj della risoluzione delle equazioni del terzo grado, per mezzo della Trigonometria.*

Sia da risolvere l'equazione seguente, $x^3 + 2x + 33 = 0$. Questo è il caso della formola (G), (356); e però

$$\text{tang.}B = \frac{2}{3 \times 33} \times 2\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \frac{2}{99} \times \sqrt{\tfrac{8}{3}}$$

$$\text{tang.}A = \sqrt[3]{\text{tang.}\tfrac{1}{2}B}$$

$$x = -\text{cot.}2A \times \sqrt{\tfrac{8}{3}}$$

Segue il calcolo di queste equazioni.

$$\begin{array}{rcl}
\text{log.}8 & = & 0,90308999 \\
\text{compl.log.}3 & = & 9,52287875 \\ \hline
\text{somma} & & 0,42596874 \\ \hline
\text{mezza somma} & & 0,21298437 = \text{log.}\sqrt{\tfrac{8}{3}} \\
\text{log.}2 & = & 0,30103 \\
\text{compl.log.}99 & = & 8,00436481 \\ \hline
\text{log. tang.}B & = & 8,5183792 \\
B & = & 1^\circ\, 53'\, 22'', 16 \\
\text{log. tang.}\tfrac{1}{2}B & = & 8,2172311 \\
\text{il terzo di log. tang.}\tfrac{1}{2}B, \text{o log. tang.}A & = & 9,4057437 \\
A & = & 14^\circ\, 16'\, 49'', 49 \\ \hline
\text{log. cot.}2A & = & 0,2641368 \\
\text{log.}\sqrt{\tfrac{8}{3}} & = & 0,2129844 \\ \hline
\text{somma, o log.} -x & = & 0,4771212 = \text{log.} -3.
\end{array}$$

Or si proponga da risolvere l'equazione seguente $x^3 - \frac{403}{441}x + \frac{46}{1323} = 0$, nella quale p essendo negativo, convien riconoscere in

in primo luogo quante radici reali essa debba avere. Ora $4p^3 = 4 \times (\frac{403}{441})^3$, e $27q^2 = 27 \times (\frac{46}{147})^2$: si trova $\log.4p^3 = 0,485$, $\log.27q^2 = 0,422$; dunque $4p^3 > 27q^2$. Questo è il *caso irreduttibile* per l'analisi. E però (359), (360),

$$\text{sen}.3A = \frac{3 \times 46}{147} \times \frac{441}{403} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{403}{3 \times 441}}} = \frac{414}{403} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1612}{1323}}}$$

Quindi i tre valori di x saranno

1°. $x = \text{sen}.A \sqrt{\frac{1612}{1323}}$

2°. $x = \text{sen}.(60° - A) \sqrt{\frac{1612}{1323}}$

3°. $x = -\text{sen}.(60° + A) \sqrt{\frac{1612}{1323}}$

Segue il calcolo di queste quattro equazioni.

log.1612 =	3,2073650	
compl.log.1323 =	6,8784402	
somma	0,0858052	
mezza somma	0,0429026	log.costante
compl. del log.costante	9,9570974	
log.414 =	2,61700034	
compl. log.403 =	7,39469495	
Dunque log.sen.3A =	9,9687927	= log.sen.68° 32′ 18″, 55
log.sen.A =	9,5891206	
log.costante	0,0429026	
1°......... log.x =	9,6320232	= log. 0,4285714
log.sen.(60° — A) =	9,7810061	
log.costante	0,0429026	
2°......... log.x =	9,8239087	= log. 0,6666666
log.sen.(60° + A) =	9,9966060	
log.costante	0,0429026	
3°..... log. — x =	0,0395086	= log.—1,095238

Si osserverà in primo luogo che il valor negativo è uguale alla somma dei due positivi, come deve essere; con che si ha la prova della esattezza del calcolo. Indi è facile scorgere che il secondo valore di x è $\frac{2}{3}$. Per sapere se gli altri due valori possano essere similmente espressi da frazioni esatte, si ricorra all'espediente che ho suggerito (354), e si avrà per il primo valore, compl. log.$x =$ $- 0,3679768 = \log. \frac{1}{2,333333}$, dove è facile avvedersi che, moltiplicando per 3 l'ultima frazione, si ha $x = \frac{3}{7}$. Di fatti log.$\frac{3}{7} =$ $9,6320232$, che è appunto il log. del primo valore di x. Ma il valor negativo deve essere uguale alla somma dei due positivi, presi con segno contrario. Si avrà dunque $- \frac{2}{3} - \frac{3}{7} = - \frac{23}{21}$. I tre valori di x nell'equazione data sono però $+ \frac{2}{3}, + \frac{3}{7}, - \frac{23}{21}$. Sostituendo separatamente ciascuno di essi nell'equazione, si può veder se sodisfino.

Ho raccolto, per maggior comodo, nella tavola V posta in fine, le soluzioni di tutte le equazioni di secondo e di terzo grado.

CAPITOLO XIII.

Della Risoluzione numerica d'ogni sorte di Equazioni.

364. Prima di esporre la soluzione diretta di certe equazioni trigonometriche, finite, ed infinite, che possono presentarsi più frequentemente, additerò un metodo generale indiretto, che mi sembra molto comodo in pratica per la risoluzione numerica di ogni sorte di equazioni. L'idea me ne fu suggerita dall'equazione seguente, che mi ero proposto da risolvere,

(A)... a sen.x + b tang.$x = n$;

nella quale si dimanda l'arco x. Questo essendo rappresentato da due linee trigonometriche differenti, farebbe d'uopo eliminarne

una, se vuol risolversi l'equazione direttamente. Ponendo, per esempio, il valore di tang.x, (I. 34°), si avrebbe $a\,\text{sen.}x + \frac{b\,\text{sen.}x}{\sqrt{(1-\text{sen.}^2x)}} = n$, dalla quale equazione bisognando togliere il segno radicale, si ricaverebbe la seguente, $a^2\,\text{sen.}^4x - 2an \times \text{sen.}^3x + (b^2 + n^2 - a^2)\,\text{sen.}^2x + 2an\,\text{sen.}x = n^2$. Si avrebbe dunque da risolver nel caso proposto un' equazione di quarto grado, il che quanto sia faticoso sanno i periti. All' incontro, con una o due false posizioni, si ottiene l'intento con grandissima facilità nel modo seguente.

Differenziando l'equazione (A), si ha (II. 37°, 39°), $a\cos.x \times \delta x + \frac{b\,\delta x}{\cos.^2x} = \delta n$; donde si cava

$$\text{(B)}\ldots\ \delta x = \frac{\delta n}{a\cos.x + \frac{b}{\cos.^2x}}.$$

Se si calcola l'equazione (A) con un valore ipotetico di x, si avrà un valor falso di n. Chiamando δn l'errore di questo valore, si troverà, calcolando l'equazione (B), la correzione δx che deve farsi al valore supposto di x per avere il suo valor giusto, o molto più prossimo al giusto del primo. Ricalcolando l'equazione (A), con questo nuovo valore di x, se si trova un errore δn, sarà molto più piccolo del primo: quindi si ricaverà, col mezzo dell' equazione (B), un' altra correzione molto più esatta del valore di x: e così procedendo, si giungerà ben presto ad avere questo valore con ogni precisione. Siccome sono rari i casi, in cui non si abbia una qualche idea anticipata del valor prossimo dell' incognita, così per lo più si otterrà l' intento con un solo calcolo delle due equazioni. Del resto la ripetizione di questi calcoli non è mai faticosa, a cagione delle quantità costanti, e dell' operazione uniforme. Questo metodo ha l'avvantaggio d'essere applicabile, con eguale facilità, ad ogni sorte di equazioni le più complicate, tanto algebraiche, quanto trigonometriche, ed anche trascendenti: ed è tanto ovvio, che rimango sorpreso, come non siasi pensato di

farne uso in molti problemi, e specialmente in quello di Keplero (769), il quale non può risolversi con più semplicità e più prestezza per altra via. L'unica condizione, per adoperar questo metodo in tutti i casi, è che δn sia notabilmente più piccolo di n; il che si otterrà calcolando l'equazione proposta con una seconda ipotesi del valore di x, se la prima avesse dato δn troppo grande. Evidente è la ragione, poichè nel differenziare si trascurano le potenze di δx, (133), il che dà risultati tanto più disparati dal vero, quanto più sono lontani i differenziali dall' essere infinitamente piccoli. Si mostri ora l'utilità del proposto metodo, con alcuni esempj.

365. Sia da risolvere l'equazione

$$8\,\text{sen.}x + \text{tang.}x\,\sqrt{7803} = 55 = n.$$

Suppongo $x = 35°$, ed ho $8\,\text{sen.}35° = 4,58861$

$$\text{tang.}35°\,\sqrt{7803} = 61,85254$$

somma, o valor falso di n $\quad 66,44115$

Si ha dunque $\delta n = 66,44115 - 55 = 11,44115$.

Questo valore di δn è troppo grande per potersi sperare un valor di δx molto prossimo al vero, per mezzo dell' equazione (B). Per averlo meno fallace, osservo che δn è presso poco il sesto del valor falso di n; e facendo parimente $\delta x = 6°$, cioè presso poco al sesto del valore supposto di x, impiego nel calcolo dell' equazione (B), cos.32° in vece di cos.35°. Ciò mi viene indicato dalle differenze finite del seno e della tangente (II. 30ª, 32ª), dove si vede che in vece di cos.x si deve rigorosamente impiegare, quando si tratta del seno, $\cos.(x - \frac{1}{2}\delta x)$, (diremo qui sotto la ragione del differenziale negativo) e quando si tratta della tangente, $\cos.x\,\cos.(x - \delta x)$, che vale prossimamente $\cos.^2(x - \frac{1}{2}\delta x)$. Quindi ho

$$8\cos.32° = 6,784$$

$$\frac{\sqrt{7803}}{\cos.^2 32°} = 122,826$$

somma $\quad 129,61$

per la quale dividendo δn, e moltiplicando per R″, (263), trovo $\delta x = 5^\circ\, 3'\, 28''$.

Se nel calcolo precedente non avessi impiegato cos. 32° in vece di cos. 35°, avrei trovato $\delta x = 4^\circ\, 44'\, 36''$, il qual valore quanto sia più lontano dal giusto si vedrà in breve. Or si osservi che nell'equazione (B), δx e δn hanno il medesimo segno, e che, avendo trovato quì sopra un valor troppo grande di n, risulta in questo caso δn negativo, il che rende pur negativo δx. Sottraendo dunque 5° 3′ (questo valore è troppo grande, e non può essere abbastanza esatto per tener conto dei secondi) da 35° primo valore ipotetico di x, ho, per valore più prossimo al vero, $x = 29^\circ\, 57'$. Ricalcolando con questo secondo valore ipotetico l'equazione proposta, ho $8 \text{ sen.} 29^\circ\, 57' + \text{tang.} 29^\circ\, 57' \sqrt{7803} = 54{,}89122$, che è un secondo valore di n presso che esatto. Quindi $\delta n = 0{,}10878 = \frac{n}{550}$ circa. E supponendo $\delta x = \frac{x}{550}$, o vero, in numero rotondo, $\delta x = \frac{30^\circ}{550} = 3'$ appresso poco, trovo $\delta x = \dfrac{0{,}10878}{8 \cos. 29^\circ\, 58' \tfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{7803}}{\cos.^2 29^\circ\, 58' \tfrac{1}{2}}}$, o sia, riducendo il secondo membro, e moltiplicando per R″, $\delta x = 3'$ esattamente. Quì δx è positivo, per il che deve aggiungersi al secondo valore ipotetico di x, 29° 57′; e però nell'equazione proposta $x = 30^\circ$.

Veduti gli artifizj che giovano ad abbreviar la fatica in questo metodo, applichiamolo adesso alla risoluzione di un problema utile.

366. *Si dimanda il limite comune della convergenza delle due serie* (U), (153), e (Z), (156). Mi sono proposto questo problema per riconoscer quale delle due serie sia più convergente per calcolar la tangente di un arco dato.

Se si vuol calcolare una tangente per mezzo della serie (Z) delle cotangenti, basta impiegare 90° — A in vece di A. Fatta questa sostituzione, se si comparano due termini egualmente distanti dal primo nelle due serie, la convergenza sarà la stessa, quando questi

due termini avranno valore uguale. È cosa chiara che questa comparazione non deve farsi fra i primi termini; giacchè quella serie è più convergente, i termini della quale diminuiscono più di valore, a misura che più si allontanano dal primo. Prendo dunque l'ottavo termine della serie (U), che è (155), $\frac{929569\ A^{15}}{3^3.\,5^2.\,7^2.\,9\,.\,11\,.\,13\,.\,15}$, e similmente l'ottavo termine della serie (Z), che è $\frac{4\,(90^\circ - A)^{13}}{3^4.\,5^2.\,7\,.\,9\,.\,11\,.\,13}$. Mettendoli in equazione, e moltiplicandola per $3^4.\ 5^2.\ 7\ .\ 9\ .\ 11\ .\ 13$, la riduco come segue $\frac{929569}{7 \times 5} \times A^{15} = 4(90^\circ - A)^{13}$; il che dà $\frac{929569}{140} \times A^{15} = (90^\circ - A)^{13}$, equazione dalla quale si tratta di ricavare il valore di A. Sia, per maggior semplicità, $\frac{929569}{140} = a$. Tirando la radice decimaterza, si avrà $\sqrt[13]{a\,A^{15}} = 90^\circ - A$, e per conseguenza $\sqrt[13]{a\,A^{15}} + A = 90^\circ = n$. Nominando B un valore di A supposto arbitrariamente, faccio $B = 40^\circ$, ed eseguisco il calcolo come segue.

$$
\begin{array}{rl}
\log.40 = & 1,60205999 \\
(262),\ \text{compl.}\log.R^\circ = & 8,24187737 \\
\log.B = & 9,84393736 \\
\log.B^{15} \text{ ou } 15 \log.B = & 7,6590604 \\
\log.a = \begin{cases} \log.929569 = \\ \text{compl.}\log.140 = \end{cases} & \begin{array}{l} 5,9682816 \\ 7,8538720 \end{array} \\
\log.aB^{15} = & 1,4812140 \\
\frac{1}{13}\log.aB^{15} = & 0,1139395 \\
\text{Per avere } \sqrt[13]{aB^{15}} \text{ in gradi, aggiungo } \log.R^\circ = & 1,7581226 \\
\text{somma} & 1,8720621 \\
\text{Dunque } \sqrt[13]{aB^{15}} = & 74^\circ,\ 48385 \\
B = & 40^\circ \\
\text{Somma (che nomino } n'\text{)} & 114^\circ,\ 48385 \\
\text{Il vero valore di } n \text{ è} & 90^\circ \\
\text{Errore, o sia } \delta n',\ (364) & 24^\circ,\ 48385
\end{array}
$$

Questo errore è molto grande, e meriterebbe una seconda ipotesi, prima di fare uso del calcolo differenziale. Ciò non ostante la risparmieremo, ed otterremo una correzione affatto prossima al giusto, impiegando nel calcolo numerico dell'equazione differenziale, che formeremo immantinente, il valore all'incirca di $B - \frac{1}{2}\delta B$ in luogo di quello di B, ad imitazione di quel che facemmo (365). Differenziando l'equazione calcolata, che esprimo come segue, $a^{\frac{1}{13}} B^{\frac{15}{13}} + B = n'$, si ha $\delta n' = \frac{15}{13} a^{\frac{1}{13}} B^{\frac{15}{13}-1} \delta B + \delta B = \delta B \times \left(1 + \frac{15}{13} a^{\frac{1}{13}} B^{\frac{2}{13}}\right)$, donde si cava $\delta B = \frac{\delta n'}{1 + \frac{15}{13}\sqrt[13]{aB^2}}$. E poichè $\delta n' = \frac{1}{5} n'$ presso poco, supponendo $\delta B = \frac{1}{5} B = 8°$, sarà $B - \frac{1}{2}\delta B = 36°$ il valor da impiegarsi, in vece di B, nell'equazione differenziale, di cui segue il calcolo, nel qual nomino D la quantità $B - \frac{1}{2}\delta B$.

log.36 =	1,5563025o
compl. log.R° =	8,24187737
log.D =	9,79817987
Idem =	9,79817987
Ricavo dal calcolo precedente log.a =	3,8221536
log.aD² =	3,41851334
$\frac{1}{13}$log.aD² =	0,26296256
log.15 =	1,17609126
compl. log.13 =	8,88605665
somma	0,3251105
Dunque $\frac{15}{13}\sqrt[13]{aD^2}$ =	2,11403
compl.log.3,11403 =	9,5066776
log.$\delta n'$ = log. — 24,48385 =	1,3888797
somma, o log. — δB =	0,895557

Dunque $\delta B = - 7,862 = - 7° 52'$, e per conseguenza il valor cercato di A, 32° 8', il qual non differisce che di pochi secondi dal giusto, come può riconoscersi con un'altra operazione.

Ma, nella soluzione del presente problema essendo inutile tanto scrupolo, basta conchiudere che, fra le due proposte, *la serie più convergente per calcolare una tangente*, è la (U) quando l'arco è minore di 32°, e la (Z) quando l'arco è maggiore di 32°.

Se nei due problemi precedenti si volessero impiegare le regole ordinarie, colle quali si correggono le false posizioni, si vedrebbe per esperienza, che il metodo, che propongo, può meritare la preferenza sopra le regole stesse in molti casi. Non saprei farlo meglio conoscere, che applicando il mio metodo a diversi problemi, relativi alla quadratura del circolo, che trovo risolti da Eulero con gran numero di false posizioni (*Analys. infinit.* Lib. II. cap. XXII).

367. Nel primo problema di Eulero si tratta di trovar l'arco che è uguale al suo coseno. L'equazione da risolvere è dunque $A = \cos. A$.

Chiamo P un valore arbitrario di A, e Q quel valore di A che nasce nel secondo membro, sostituendo P nel primo: ed ho

(C)...... $P = \cos. Q$;

e differenziando, $\delta P = -\delta Q \operatorname{sen}. Q$. Se si fa $\delta P = A \backsim P$, sarà $\delta Q = A \backsim Q$; e per conseguenza $A = P + \delta P = Q + \delta Q$, donde si ha

(D)...... $\delta P = Q - P + \delta Q$.

Laonde $Q - P + \delta Q = -\delta Q \operatorname{sen}. Q$, ovvero $Q - P = -\delta Q (1 + \operatorname{sen}. Q) = -\delta Q \times 2 \operatorname{sen}.^2 (45° + \frac{1}{2} Q)$, (I. 11°). Donde si cava

(E)...... $\delta Q = \frac{-\frac{1}{2}(Q - P)}{\operatorname{sen}.^2 (45° + \frac{1}{2} Q)}$.

Dico che le equazioni (C), (E) mi condurranno con breve calcolo al valore cercato di A.

In fatti sia con Eulero, per prima ipotesi, $P = 30°$. Si ha

$$\begin{aligned} \log. 30 &= 1,477121 \\ (262), \text{ compl. } \log. R° &= 8,241877 \\ \hline \log. P = \log. \cos. Q &= 9,718998; \end{aligned}$$

il

il che dà $Q = 58^\circ\, 26'$: quindi $\frac{1}{2}(Q - P) = 14^\circ\, 13' = 14^\circ, 2$ prossimamente; e $45^\circ + \frac{1}{2}Q = 74^\circ\, 13'$. Calcolando l'equazione (E), si ha dunque

$$\begin{aligned} \log.\ 14,2 &= 1,15229 \\ \text{compl.log.sen.}\,74^\circ\, 13' &= 0,01669 \\ &\ \underline{0,01669} \\ \log. - \delta Q &= 1,18567\,; \end{aligned}$$

il che dà $\delta Q = -\ 15^\circ, 33 = -\ 15^\circ\, 20'$. Per avere questo valore più prossimo al giusto, correggo l'error più grave (260) della formola (E), impiegando $Q + \frac{1}{2}\delta Q$, in vece di Q, nell' espressione sen.$(45^\circ + \frac{1}{2}Q)$, come si apprende dai differenziali finiti delle linee trigonometriche; ed ho $Q + \frac{1}{2}\delta Q = 58^\circ 26' - 7^\circ\, 40' = 50^\circ\, 46'$, e $45^\circ + \frac{1}{2}(Q + \frac{1}{2}\delta Q) = 70^\circ\, 23'$. Allora l'equazione (E) dà $\delta Q = -\frac{14^\circ,\,2}{\text{sen.}^2\, 70^\circ 23'} = -\ 16^\circ$. Quindi $A = Q + \delta Q = 58^\circ\, 26' - 16^\circ = 42^\circ\, 26'$.

Questo valore di A non può essere esatto, perchè l'errore δQ è troppo grande; sarà per altro a bastanza prossimo, per ottenere l'intento con un'altra ipotesi solamente. Sia dunque, per seconda ipotesi, e per avere esatta la riduzione de' minuti in decime di grado, $P = 42^\circ\, 24' = 42^\circ, 4$. Facendo il calcolo dell'equazione (C), si ha

$$\begin{aligned} \log.42,4 &= 1,62736586 \\ \text{compl.}\log.R^\circ &= \underline{8,24187737} \\ \log.\cos.Q &= 9,8692432 \end{aligned}$$

Laonde $Q = 42^\circ\ 16'\ 0'', 89$; e $\frac{1}{2}(Q - P) = -\ 3'.59'', 555$. Allora l'equazione (E) dà $\delta Q = \frac{239'',\,555}{\text{sen.}^2\, 66^\circ 8'} = 286'', 5$; e impiegando $Q + \frac{1}{2}\delta Q$, in vece di Q, nel denominatore (di che non avvertiremo più ne' problemi seguenti), si ha, con tutta la precisione che possono dare i logaritmi con sette decimali, $\delta Q = \frac{239'',\,555}{\text{sen.}^2\, 66^\circ\, 9'\, 12''} = 286'',36$. Però $A = Q + \delta Q = 42^\circ\, 16'\, 0'',89 +$

$4'46'', 36 = 42^\circ 20' 47'', 25$. Eulero fa sette ipotesi, e tre regole del tre, per giungere a questo valore. Egli dà $14'''$, in vece di $15''' = 0'', 25$, per un errore nell'ultima sua proporzione: del resto inutil briga si è dato cercando i minuti terzi, i quali non possono aversi esattamente dai logaritmi con sette decimali; e se io tengo conto delle centesime di secondo, non ho altro oggetto che di ottener per tal modo le decime esattamente.

Questo problema è utile per trovare il seno che divide in due parti eguali l'area del quadrante, e per trovare la corda che divide in due parti eguali l'area del semicircolo; come si può vedere nel terzo e nel quarto problema di Eulero.

Nel secondo di lui problema si tratta di trovare il settore, il qual sia diviso in due parti eguali dalla corda; e si ha da risolvere l'equazione $A = \text{sen}.2A$. Faccio $P = \text{sen}.2Q$, ed ho $\delta P = 2\delta Q \cos.2Q = Q - P + \delta Q$, secondo la formola (D). Quindi $Q - P = 2\delta Q(\cos.2Q - \frac{1}{2}) = 2\delta Q(\cos.2Q - \cos.60^\circ) = 4\delta Q\ \text{sen}.(30^\circ - Q)\ \text{sen}.(30^\circ + Q)$, (II. 23ª). E però

$$\delta Q = \frac{\frac{1}{4}(Q - P)}{\text{sen}.(30^\circ - Q)\ \text{sen}.(30^\circ + Q)}.$$

Or sia, con Eulero, $P = 50^\circ$, sarà $\frac{50}{R^\circ} = \text{sen}.2Q = \text{sen}.60^\circ 46' = \text{sen}.119^\circ 14'$, (19). Questo ultimo valore è quello che deve adottarsi, poichè ne dà uno di Q men rimoto da quello di P. Si ha dunque $Q = 59^\circ 37'$. Quindi $\frac{1}{4}(Q - P) = 2^\circ 24'$ appresso poco, e (154), $\delta Q = \frac{2^\circ, 4}{-\text{sen}.29^\circ 37'\ \text{sen}.89^\circ 57'} = -4^\circ, 8$; indi più prossimamente $\delta Q = \frac{2^\circ, 4}{-\text{sen}.27^\circ 13'\ \text{sen}.87^\circ 13'} = -5^\circ, 25$. Laonde $A = Q + \delta Q = 59^\circ 37' - 5^\circ 15' = 54^\circ 22'$.

Sia dunque, per seconda ipotesi, $P = 54^\circ 21' = \frac{54,35}{R^\circ} = \text{sen}.2Q$, il che dà $Q = 54^\circ 13' 34'', 5$; e per conseguenza $\frac{1}{4}(Q - P) = -1' 51'', 375$. Però $\delta Q = \frac{-111'', 375}{-\text{sen}.24^\circ 14'\ \text{sen}.84^\circ 14'} = 273''$; e finalmente, con ogni precisione, $\delta Q = \frac{-111'', 375}{-\text{sen}.24^\circ 15' 50''\ \text{sen}.84^\circ 15' 50''} =$

$272''$, 39. Onde $A = Q + \delta Q = 54^\circ\, 13'\, 34''{,}5 + 4'\, 32''{,}4 = 54^\circ\, 18'\, 6''{,}9$. A questo risultato perviene Eulero col mezzo di sei ipotesi, e due regole del tre.

Nel quinto problema propone Eulero di tirare da un punto della circonferenza due corde che taglino l'area del circolo in tre parti eguali. Si ha da risolvere l'equazione $A = \text{sen.}(60^\circ - A)$. Faccio $P = \text{sen.}(60^\circ - Q)$, ed ho $\delta P = -\delta Q \cos.(60^\circ - Q) = Q - P + \delta Q$, donde si cava $Q - P = -\delta Q\left(1 + \cos.\overline{60^\circ - Q}\right) = -2\delta Q \cos.^2(30^\circ - \frac{1}{2}Q)$, (I. 24ª); e per conseguenza

$$\delta Q = \frac{-\frac{1}{2}(Q - P)}{\cos.^2(30^\circ - \frac{1}{2}Q)}.$$

Or sia, con Eulero, $P = 20^\circ$; si ha $\frac{20}{R^\circ} = \text{sen.}(60^\circ - Q) = \text{sen.}\, 20^\circ\, 26'$; il che dà $Q = 39^\circ\, 34'$, e $\frac{1}{2}(Q - P) = 9^\circ\, 47' = 9^\circ{,}8$ appresso poco. Quindi $\delta Q = \frac{-9^\circ{,}8}{\cos.^2 10^\circ\, 13'} = -10^\circ{,}1$; e più prossimamente $\delta Q = \frac{-9^\circ{,}8}{\cos.^2 12^\circ\, 45'} = -10^\circ{,}3$. Laonde $A = Q + \delta Q = 39^\circ\, 34' - 10^\circ\, 18' = 29^\circ\, 16'$.

Sia dunque, per seconda ipotesi, $P = 29^\circ\, 15' = \frac{29{,}25}{R^\circ} = \text{sen.}(60^\circ - Q)$, il che dà $Q = 29^\circ\, 18'\, 8''{,}17$. Allora $\frac{1}{2}(Q - P) = 1'\, 34''{,}085$; e $\delta Q = \frac{-94''{,}085}{\cos.^2 15^\circ\, 21'} = -101''$; o, con più scrupolo, $\delta Q = \frac{-94''{,}085}{\cos.^2 15^\circ\, 21'\, 20''} = -101''{,}18$. Quindi $A = Q + \delta Q = 29^\circ\, 16'\, 27''$, come ha trovato Eulero con sei ipotesi, e due regole del tre.

Nel sesto problema propone Eulero di trovare un arco il qual sia uguale alla somma del raggio, del coseno e del seno. Si ha da risolvere l'equazione $180^\circ - A = 1 + \cos.A + \text{sen.}A$. Pongo, in vece di 1, il valore del raggio in gradi, che è $57^\circ{,}29578$, come si può dedurre da $\log.R^\circ$, (262); ed ho $122^\circ{,}70422 - A = \cos.A + \text{sen.}A = \text{sen.}(45^\circ + A)\sqrt{2}$, (II. 7ª). Or sia, per brevità, $122^\circ{,}70422 = C$; avremo nel modo solito $C - P = \text{sen.}(45^\circ + Q)\sqrt{2}$, e $-\delta P = \delta Q \cos.(45^\circ + Q)\sqrt{2} =$

$P - Q - \delta Q$, donde si cava $P - Q = \delta Q \left(\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \cos.\overline{45^\circ + Q}\right) \sqrt{2} = \delta Q \left(\cos. 45^\circ + \cos.\overline{45^\circ + Q}\right) \sqrt{2} = 2\, \delta Q \cos.(45^\circ + \tfrac{1}{2} Q) \cos.\tfrac{1}{2} Q \sqrt{2}$, (II. 19ª). E per conseguenza

$$\delta Q = \frac{\tfrac{1}{2}(P - Q)}{\cos.\tfrac{1}{2} Q \cos.(45^\circ + \tfrac{1}{2} Q) \sqrt{2}}.$$

Or sia, con Eulero, $P = 40^\circ$, sarà $C - P = 82^\circ, 70422$. Ma $\frac{82,70422}{R^\circ \sqrt{2}} > 1$, quando deve essere uguale a $\text{sen.}(45^\circ + Q)$; dunque il valore supposto di P è troppo piccolo.

Passando alla seconda ipotesi di Eulero, sia $P = 42^\circ$: si ha $\frac{80,70422}{R^\circ \sqrt{2}} = \text{sen.}(45^\circ + Q) = \text{sen.} 84^\circ\, 52'$, il che dà $Q = 39^\circ 52'$; $\tfrac{1}{2}(P - Q) = 1^\circ 4' = 1^\circ, 07$; $\delta Q = \frac{1^\circ, 07}{\cos. 19^\circ 56' \cos. 64^\circ 56' \sqrt{2}} = 1^\circ, 9 = 1^\circ 54'$; e più prossimamente $\delta Q = \frac{1^\circ, 07}{\cos. 20^\circ 24' \cos. 65^\circ 24' \sqrt{2}} = 1^\circ, 94 = 1^\circ 56'$. Quindi $A = Q + \delta Q = 39^\circ 52' + 1^\circ 56' = 41^\circ 48'$.

Sia dunque, per ultima ipotesi, $P = 41^\circ 48' = 41^\circ, 8$. Si ha $C - P = 80^\circ, 90422$; e $\frac{80,90422}{R^\circ \sqrt{2}} = \text{sen.} 86^\circ 49' 36'', 4$; il che dà $Q = 41^\circ 49' 36'', 4$; e $\tfrac{1}{2}(P - Q) = - 48'', 2$. Allora $\delta Q = \frac{-48'', 2}{\cos. 20^\circ 55' \cos. 65^\circ 55' \sqrt{2}} = - 89'', 4$. Questa quantità è sì piccola, che la consueta correzione nel denominatore diventa inutile. E però $A = Q + \delta Q = 41^\circ 48' 7'', 0$; che è quel che trova Eulero con quattro ipotesi, e due regole del tre.

Egli dimanda nel settimo problema che si trovi un settore, il qual sia uguale a mezzo il triangolo formato dal raggio, dalla tangente e dalla secante. Si ha da risolvere l' equazione seguente, $2A = \text{tang.} A$. Faccio $2P = \text{tang.} Q$, ed ho $2 \delta P = \frac{\delta Q}{\cos.^2 Q} = 2(Q - P + \delta Q)$. Quindi $Q - P = \delta Q \left(\frac{1}{2 \cos.^2 Q} - 1\right) = \delta Q \times \frac{1 - 2 \cos.^2 Q}{2 \cos.^2 Q} = - \delta Q \times \frac{\cos. 2Q}{2 \cos.^2 Q}$, (I. 23ª). E però

$$\delta Q = \frac{2(P - Q) \cos.^2 Q}{\cos. 2Q}$$

Or sia, con Eulero, $P = 60^\circ$; si ha $\frac{120}{R^\circ} = \text{tang.}Q$, e per conseguenza $Q = 64^\circ\, 29'$, e $2(P - Q) = -\, 8^\circ\, 58' = -\, 8^\circ, 95$ appresso poco. Laonde $\partial Q = -\, \frac{8^\circ, 95\ \cos.^2 64^\circ\, 29'}{\cos. 128^\circ\, 58'} = 2^\circ, 64 = 2^\circ, 38'$; e più esattamente $\partial Q = -\, \frac{8^\circ, 95\ \cos.^2 65^\circ\, 48'}{\cos. 131^\circ\, 36'} = 2^\circ, 265$. E però $A = Q + \partial Q = 66^\circ\, 45'$.

Sia dunque, per seconda ipotesi, $P = 66^\circ, 75$; e però $\frac{133,5}{R^\circ} = \text{tang.}Q$; il che dà $Q = 66^\circ\, 46'\ 18'', 72$; $2(P - Q) = -\, 157'', 44$; $\partial Q = -\, \frac{157'', 44\ \cos.^2 66^\circ\, 46'}{\cos. 133^\circ\, 33'} = 35''\frac{1}{2}$; e con tutto lo scrupolo, $\partial Q = -\, \frac{157'', 44\ \cos.^2 66^\circ\, 46'\, 54''}{\cos. 133^\circ\, 33'\ 48''} = 35'', 51$. Quindi $A = Q + \partial Q = 66^\circ\, 46'\, 54'', 23$.

Eulero perviene a questo risultato con sei ipotesi, delle quali ha fatto uso ultimamente anche il celebre P. Fontana in una bella Memoria contenuta nel Tomo II degli Atti della Società Italiana: il che mi conferma nella credenza, che non siasi pensato ancora ad abbreviare il metodo di falsa posizione, col mezzo del calcolo differenziale.

Finalmente nell'ottavo problema propone Eulero di determinare un arco, il qual sia uguale alla sua corda prodotta fino all'incontro del raggio prolungato, il qual passa a 90° di distanza dall' origine dell'arco. Si ha da risolvere l'equazione $A\ \text{sen.}\frac{1}{2}A = 1$. La pongo sotto questa forma, $A = \text{cosec.}\frac{1}{2}A$, per giunger più prontamente all' equazione differenziale che segue. Faccio poi, al solito, $P = \text{cosec.}\frac{1}{2}Q$, e riducendo alla forma infinitesimale il differenziale finito della cosecante (712), ho $\partial P = -\frac{1}{2}\partial Q \times \frac{\cos.\frac{1}{2}Q}{\text{sen.}^2\frac{1}{2}Q} = Q - P + \partial Q$, donde si cava $Q - P = -\, \partial Q \left(1 + \frac{\cot.\frac{1}{2}Q}{2\,\text{sen.}\frac{1}{2}Q}\right)$.

Or sia, con Eulero, $P = 70^\circ$. Si ha $\frac{70}{R^\circ} = \text{cosec.}\frac{1}{2}Q$, ovvero $\frac{R^\circ}{70} = \text{sen.}\frac{1}{2}Q = \text{sen.}54^\circ\, 56'$: onde $Q = 109^\circ\, 52'$, e $Q - P = 39^\circ\, 52' = 39^\circ, 87$ appresso poco. Ma $\frac{\cot. 54^\circ\, 56'}{2\,\text{sen.} 54^\circ\, 56'} = 0,4288$: dun-

que $\delta Q = -\frac{39^\circ,87}{1,4288} = -27^\circ,9$: e, più prossimamente, $\frac{\cot.47^\circ\, 57'}{2\,\text{sen}.47^\circ 57'} = 0,60735$; indi $\delta Q = -\frac{39^\circ,87}{1,60735} = -24^\circ,8$. Laonde $A = Q + \delta Q = 85^\circ\, 4'$.

Sia dunque, per seconda ipotesi, $P = 85^\circ\, 3' = 85^\circ,05$. Si ha $\frac{R^\circ}{85,05} = \text{sen}.\frac{1}{2}Q = \text{sen}.42^\circ\, 21'\, 3'',9$: e per conseguenza $Q = 84^\circ\, 42'\, 7'',8$; e $Q - P = -20'\, 52'',2 = -1252'',2$. Ora $\frac{\cot.42^\circ\, 21'}{2\,\text{sen}.42^\circ 21'} = 0,81426$. Dunque $\delta Q = \frac{1252'',2}{1,81426} = 690'',2 = 11'\, 30'',2$. Con ogni esattezza, $\frac{\cot.42^\circ\, 23'\, 56'',4}{2\,\text{sen}.42^\circ\, 23'\, 56'',4} = 0,812098$; indi $\delta Q = \frac{1252'',2}{1,812098} = 691'',02 = 11'\, 31'',02$. Laonde $A = Q + \delta Q = 84^\circ\, 53'\, 38'',82$; che è quel che trova Eulero con sei ipotesi.

Le equazioni risolte in questo articolo sono del genere delle *trascendenti*, perchè contengono l'arco A sotto due forme eterogenee (129), vale a dire, perchè l'arco è posto in equazione con linee rette, quali sono le linee trigonometriche dell' arco stesso, o de' suoi moltiplici.

368. Col nostro metodo divien facile il risolvere l' equazione di questa forma, $\text{sen}.nA = m\ \text{sen}.A$, proposta da d'Alembert (*Opusc. Math.* Tom. V, p. 222), e dalla quale si tratta di ricavare il valore dell' arco A. Faccio $\text{sen}.nP = m\ \text{sen}.Q$, ed ho $n\delta P \times \cos.nP = m\delta Q \cos.Q$. Sostituendo il valore di δP, (367), (D), si ricava $\delta Q = \frac{(Q - P)\ \cos.nP}{\frac{m}{n}\cos.Q - \cos.nP}$. Con due ipotesi, si troverà il valore di A, purchè tanto nell' una quanto nell'altra si facciano due calcoli per avere il valore di δQ, adoperando nel secondo calcolo $\cos.n(P + \frac{1}{2}\delta P)$ e $\cos.(Q + \frac{1}{2}\delta Q)$, in vece di $\cos.nP$ e di $\cos.Q$, ad imitazione di ciò che ho fatto (367).

Del resto il presente problema, e quelli dell'articolo precedente, possono risolversi direttamente col mezzo delle serie infinite. Per esempio, l'equazione Alembertiana si trasforma in questa,

(149), (W), $nA - \frac{1}{6} n^3 A^3 + \frac{1}{120} n^5 A^5 -$ &c. $= m \times (A - \frac{1}{6} A^3 + \frac{1}{120} A^5 -$ &c.). Onde $(n - m) A - \frac{1}{6}(n^3 - m) A^3 + \frac{1}{120}(n^5 - m) A^5 -$ &c. $=$ o. Dividendo per A, e trasponendo, si ha

$$n - m = \tfrac{1}{6}(n^3 - m)\ A^2 - \tfrac{1}{120}(n^5 - m)\ A^4 + \&c.$$

Si faccia $A^2 = y$; e da questa equazione comparata con la (P), (148), osservando che quì $n - m$ tiene il luogo di m nell'equazione (P), se ne ricaverà un'altra della forma (Q), la quale darà il valore di y, e per conseguenza quello di A.

369. Passo ora ad indicare le facilità che porge la Trigonometria per la soluzione di certe equazioni, che sarebbe laboriosa per la via dell'analisi. Sia proposta l'equazione generale della forma seguente, nella quale si cerca il valore dell' arco A.

(F)...... a cos.A $+$ b sen.A $= n$.

Faccio $n = m$ cos.(A $\backsim$ B), o vero a cos.A $+$ b sen.A $=$ m cos.A cos.B $+$ m sen.A sen.B. Da questa equazione, se si considera che m è una quantità indeterminata, per il che nulla osta a supporre $a = m$ cos.B, risulta $b = m$ sen.B. Queste due equazioni danno $m = \frac{a}{\text{cos.B}} = \frac{b}{\text{sen.B}}$, e per conseguenza si ha

(G)...... tang.B $= \frac{b}{a}$.

E poichè, per l'ipotesi, cos.(A $\backsim$ B) $= \frac{n}{m}$; sostituendo il primo valore di m, si ha

(H)...... cos.(A $\backsim$ B) $= \frac{n\ \text{cos.B}}{a}$.

Somma pertanto è la facilità, con cui si risolvono le equazioni della forma (F), cercando con la (G) un arco B, e con la (H) un arco (A $\backsim$ B): la differenza di questi due archi è l'arco cercato A.

Se alcuno de' termini del primo membro dell'equazione (F)

fosse negativo, s'impiegherà negativo nelle equazioni (G), (H) il coefficiente a o b che sarà preceduto dal segno negativo nell' equazione (F), e si osserveranno le regole de' segni (42).

Questo metodo dà sempre minor di 90° il valore di A. Quando si dubiti che debba esser maggiore, si calcolerà col valore trovato l'equazione (F), e se non si ha quello di n, sarà segno che A è ottuso. Allora si cangerà il segno di a cos.A nella formola (F), o pure il segno di a nelle formole (G), (H); e col mezzo di queste si avrà il supplemento del vero valore di a.

370. Sia ora proposta da risolvere l'equazione seguente

$$a \text{ tang.}x + b \text{ cot.}x = n.$$

Moltiplicando questa equazione per $\frac{\text{tang.}x}{a}$, e trasportando, si ha $\text{tang.}^2 x - \frac{n}{a}.\text{tang.}x = -\frac{b}{a}$; la quale equazione si risolve poi facilmente col metodo (352).

Che se nella proposta i segni fossero diversi, si giungerebbe sempre in simil maniera ad un' equazione di secondo grado, di cui si avrebbe la soluzione nella tavola V.

371. Sia perfine proposta la seguente equazione finita, o infinita

$$(K)\ldots z = u + a \text{ sen.}u + b \text{ sen.}2u + c \text{ sen.}3u + \&c.,$$

nella quale si dimanda il valore di u. Questa equazione è del genere delle *trascendenti* (367). La soluzione più facile, ne' casi particolari, è quella che ho suggerito (364). Ma se vuolsi una formola generale infinita, dove la serie sia convertita analiticamente, come segue,

$$(L)\ldots u = z + A \text{ sen.}z + B \text{ sen.}2z + C \text{ sen.}3z + \&c.,$$

i metodi trigonometrici, che ho veduti finora, sono estremamente laboriosi; il che mi ha dato occasione di cercare il seguente, che è molto semplice.

Se si sostituiscono nella serie (K) i valori di sen.u, sen.$2u$, sen.$3u$

sen.$3u$, &c.; dati dalla serie (W), (149), si avrà, raccogliendo i coefficienti d'ogni potenza di u,

$$(M)\ldots\ z = (1 + a + 2b + 3c + \&c.)\, u - \tfrac{1}{6}(a + 2^3 b + 3^3 c + \&c.)\, u^3 + \tfrac{1}{120}\,(a + 2^5 b + 3^5 c + \&c.)\, u^5 - \&c.$$

Ad imitazione di questa la serie (L) diverrà

$$(N)\ldots\ u = (1 + A + 2B + 3C + \&c.)\, z - \tfrac{1}{2.3}\,(A + 2^3 B + 3^3 C + \&c.)\, z^3 + \tfrac{1}{2.3.4.5}\,(A + 2^5 B + 3^5 C + \&c.)\, z^5 - \&c.$$

Esprimiamo queste due serie, per maggior semplicità, come segue

$$z = mu - nu^3 + pu^5 - qu^7 + ru^9 - \&c.$$
$$u = Mz - Nz^3 + Pz^5 - Qz^7 + Rz^9 - \&c.$$

Quindi si sostituiscano nell'ultima i valori di z, z^3, z^5, &c., presi dall' antecedente, e ordinando i termini relativamente alle potenze di u, (148), si avrà

$$u = \left\{ \begin{array}{llllll}
Mz = & Mmu & - Mnu^3 & + Mpu^5 & - Mqu^7 & + Mru^9 - \&c. \\
- Nz^3 = & & - Nm^3 & + 3Nm^2 n & - 3Nm^2 p & + 3Nm^2 q - \&c. \\
 & & & & - 3Nmn^2 & + 6Nmnp - \&c. \\
 & & & & & + Nn^3 - \&c. \\
+ Pz^5 = & & & Pm^5 & - 5Pm^4 n & + 5Pm^4 p - \&c. \\
 & & & & & + 10Pm^3 n^2 - \&c. \\
- Qz^7 = & & & & - Qm^7 & + 7Qm^6 n - \&c. \\
+ Rz^9 = & & & & & + Rm^9 - \&c. \\
- \&c. & & & & &
\end{array} \right.$$

Donde si cava, col metodo (148),

$$M = \frac{1}{m}$$
$$N = -\frac{n}{m^4}$$
$$P = \frac{3n^2 - pm}{m^7}$$
$$Q = -\frac{12n^3 - 8mnp + qm^2}{m^{10}}$$
$$R = \frac{55n^4 - 55mn^2 p + 10m^2 nq + 5m^2 p^2 - rm^3}{m^{13}}$$

Queste sono le equazioni finali del problema, poichè, sostituendo in esse i valori di M, N, P, &c., m, n, p, &c., presi nelle serie (N), (M), non resta più se non se risolverle coi metodi ordinarj, per ricavarne i valori delle indeterminate A, B, C, &c. Eccone un saggio nel problema di Keplero, limitandoci alla quarta indeterminata D.

372. In luogo di $M = \frac{1}{m}$, si ha, per le serie (N), (M), $1 + A + 2B + 3C + 4D = \frac{1}{1 + a + 2b + 3c + 4d}$, o sia

$$(O)\ldots\ A + 2B + 3C + 4D = -\frac{a + 2b + 3c + 4d}{1 + a + 2b + 3c + 4d}.$$

In vece di $N = -\frac{n}{m^4}$, si ha $\frac{1}{6}(A + 8B + 27C + 64D)$ $= -\frac{a + 8b + 27c + 64d}{6(1 + a + 2b + 3c + 4d)^4}$, ovvero

$$(P)\ldots\ A + 8B + 27C + 64D = -\frac{a + 8b + 27c + 64d}{(1 + a + 2b + 3c + 4d)^4}.$$

Ora, nel problema di Keplero, $a = 2e$, $b = \frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{8}e^4$, $c = \frac{1}{3}e^3$, $d = \frac{5}{32}e^4$, (denotando per e l'eccentricità dell' orbita d'un pianeta). Sostituendo questi valori nell' equazione (O), e riducendo, si ha

$$A + 2B + 3C + 4D = -\frac{2e + \frac{3}{2}e^2 + e^3 + \frac{7}{8}e^4}{1 + 2e + \frac{3}{2}e^2 + e^3 + \frac{7}{8}e^4}.$$

Si effettui la divisione, trascurando le potenze di e, superiori alla quarta che è il limite assunto, e si avrà

$$(Q)\ldots\ A + 2B + 3C + 4D = -2e + \frac{5}{2}e^2 - 3e^3 + \frac{27}{8}e^4.$$

Per simplificare nel modo stesso l'equazione (P), bisogna primieramente elevare alla quarta potenza il valore di $1 + a + 2b + 3c + 4d$, il qual è $1 + 2e + \frac{3}{2}e^2 + e^3 + \frac{7}{8}e^4$. In questa operazione si può trascurare anche la quarta potenza di e, giacchè poi nella divisione non influisce che sulla quinta. Quindi si ha facilmente $(1 + 2e + \frac{3}{2}e^2 + e^3)^4 = 1 + 8e + 30e^2 + 72e^3$. Col secondo membro di questa equazione si divida il valore di

$a + 8b + 27c + 64d$, che è $2e + 6e^2 + 9e^3 + 11e^4$, e l'equazione (P) diverrà

$$(R) \ldots A + 8B + 27C + 64D = - 2e + 10e^2 - 29e^3 + 65e^4.$$

Nel problema di Keplero, la serie (K) ha questa proprietà, che i coefficienti a, c, &c., corrispondenti ai moltiplici dispari di u, contengono solamente le potenze dispari di e, o sia dell' eccentricità, e che i coefficienti b, d, &c., corrispondenti ai moltiplici pari di u, contengono solamente le potenze pari di e. Vuol ragione che la stessa legge abbia luogo nella serie (L) che è fabbricata sul modello della (K), e se ne ha la prova ne' termini della formola (L) già calcolati da molti, con altri metodi. Se dunque si pone per principio, che il valor delle indeterminate A, C, deve esser espresso dalle potenze dispari di e, e quello di B, D dalle pari, si potrà ricavare il valore di queste quattro incognite dalle due sole equazioni (Q), (R), spezzandole in quattro, come segue:

$$A + 3C = - 2e - 3e^3; \qquad 2B + 4D = \tfrac{5}{2}e^2 + \tfrac{27}{8}e^4;$$
$$A + 27C = - 2e - 29e^3; \qquad 8B + 64D = 10e^2 + 65e^4.$$

Questo è l'artificio col quale, dalle sole cinque equazioni finali (371), ho ricavato il valore di nove indeterminate, spingendo l'approssimazione della serie (L) fino a sen.$9z$, ed alla nona potenza dell' eccentricità, come si vedrà (771).

373. Nell' analisi trigonometrica occorre talvolta di sviluppare i valori prossimi di sen.(n sen.a), sen.(n cos.a), cos.(n sen.a), cos.(n cos.a). Considerando n sen.a come un arco, si ha dalla serie (W), (149),

$$\text{sen.}(n\,\text{sen.}a) = n\,\text{sen.}a - \frac{n^3\,\text{sen.}^3a}{2.3} + \frac{n^5\,\text{sen.}^5a}{2.3.4.5} - \&c.$$

Che se questo valore si vuole espresso, non colle potenze di sen.a,

ma coi seni de' moltiplici di a, si sostituiranno i valori di sen.$^3 a$, sen.$^5 a$, &c., presi nella tavola (127), e si avrà

$$\text{sen.}(n\,\text{sen.}\,a) = \left(n - \tfrac{n^3}{8} + \tfrac{n^5}{192} - \&c.\right)\text{sen.}\,a + \left(\tfrac{n^3}{24} - \tfrac{n^5}{384} + \&c.\right)\text{sen.}\,3a$$
$$+ \left(\tfrac{n^5}{1920} - \&c.\right)\text{sen.}\,5a + \&c.$$

Nello stesso modo si sviluppano gli altri seni e coseni proposti, valendosi, pei coseni, della serie (Y), (154).

È facile vedere che l'utilità di queste operazioni dipende dalla convergenza delle serie formate come quì sopra, e che questa sarà vie maggiore quanto più piccola sia la quantità n.

CAPITOLO XIV.

Definizioni, Nozioni e Teoremi preliminari, spettanti particolarmente alla Trigonometria sferica.

374. La Trigonometria *sferica* insegna a risolvere i triangoli formati da tre archi di circoli massimi sopra la superficie di una sfera. I lati, essendo archi, si valutano in gradi, minuti, &c. come gli angoli. Date tre parti di un triangolo sferico, la Trigonometria somministra i mezzi di scoprir tutte le altre nella maggior parte de' casi.

375. Preso per centro un punto ad arbitrio nell'Universo, tutti i punti giacenti per ogni verso, a distanza eguale dal primo, apparterrebbero alla superficie d'una sfera avente per raggio la distanza prescelta. Egli è dunque indifferente che il globo, sul quale la Trigonometria sferica si esercita, sia reale, o immaginato; piccolo, o grande; ripieno, o vuoto interiormente, sia in tutto, sia in parte. Le proposizioni trigonometriche sono generali per una sfera qualunque; basta che in una stessa dimostrazione, in una stessa for-

mola, non s'impieghino nell'atto medesimo globi di diversa grandezza, o sia archi di raggio diverso.

376. *Circoli massimi* sono quelli che hanno per centro, e per raggio, il centro ed il raggio della sfera. Sono dunque tutti uguali fra loro. Se si concepisce che il semicircolo AEDB faccia una rivoluzione intiera intorno al diametro AB, il punto D, che suppongo ad egual distanza dai punti A e B, descriverà in questo giro la circonferenza di un circolo massimo, il cui raggio è quello CD della sfera, e il centro quello C della sfera. Ma ogni altro punto, come E, della semicirconferenza AEDB, descriverà un *cerchio minore*, avente per raggio un'ordinata EF, e per centro un punto F, differente dal centro C della sfera. È cosa evidente, 1°. che quei cerchj minori sono eguali, i quali hanno il centro a distanze uguali da quello della sfera; 2°. che i cerchj minori sono più piccoli, quanto più il loro centro è distante da quello della sfera. Fig.43

377. Se si taglia un globo per mezzo, il piano secante passerà per il centro, e per conseguenza la sezione della superficie sarà un circolo massimo. Ma da ogni punto della superficie può farsi un taglio, che passi pel centro della sfera, e la divida per mezzo. Dunque i circoli massimi della sfera sono infiniti di numero.

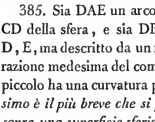
378. È noto, per la Geometria elementare, che tre punti, posti non in linea retta, determinano la posizion di un piano. Se dunque il piano secante si fa passar per il centro della sfera, e per due punti dati sopra la sua superficie, la direzione del piano secante, e per conseguenza la sezione della superficie, saranno determinate. Dunque da un punto all'altro sulla superficie della sfera sempre si può concepire, o condurre un arco di circolo massimo, e questo non può esser che un solo.

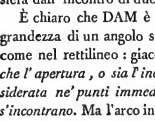
379. Poichè il centro della sfera è comune a tutti i circoli massimi, ogni linea d'intersezione de' loro piani passerà per il centro comune, e sarà per conseguenza diametro comune alla sfera, ed a' circoli intersecati. Così AB è diametro della sfera, del circolo ADBL, e del circolo AGB (che vedesi obliquamente nella figura,

Fig.43 e sol per metà). Ma ogni diametro divide la circonferenza in due parti uguali. Dunque 1°. *i circoli massimi si tagliano scambievolmente in due parti uguali*; 2°. *i punti d'intersezione delle circonferenze*, come A e B, *sono sempre distanti di* 180° *l'uno dall' altro.*

380. Si può dunque chiudere con due soli archi una porzione di superficie della sfera, purchè siano di 180° ciascuno. Allora la superficie compresa, come AEDBKGA, si chiama *fuso.*

381. Quel diametro della sfera, il quale è perpendicolare al piano, o sia ad un diametro qualunque di un circolo massimo, si chiama l' *asse* di quel circolo. Se si concepisce il raggio CD della sfera rilevato perpendicolarmente sopra la carta, sul piano della quale sta descritto il circolo massimo AEDBL, sarà CD il semiasse del detto circolo. Così AB è l'asse del circolo massimo, che sarebbe descritto dal punto D con la rivoluzione supposta (376).

382. I punti estremi dell' asse, come A e B, si chiamano i *poli* del circolo massimo, di cui AB è l'asse. L'arco AD = 90° = BD misura sopra la superficie della sfera la distanza dai poli alla circonferenza; e però *ogni punto della circonferenza è distante* 90° *da ognuno de' poli.* Due circoli massimi non possono dunque avere i medesimi poli.

383. Ad ogni circolo massimo si possono concepir paralleli infiniti cerchj minori. Posta EF parallela a CD, il cerchio minore, che ha per raggio EF, si chiama ed è *parallelo* al circolo massimo formato dalla rivoluzione (376) del raggio CD. Ora fra i poli A e B di questo circolo possono concepirsi cadenti sull' asse AB infinite ordinate, come EF, parallele a CD. Dunque, &c.

Ne segue che ogni sezione della sfera, quantunque non passi per il centro, è circolare alla superficie, poichè sempre potrà immaginarsi una sezione parallela che passi per il centro (377).

384. I poli di un circolo massimo sono pur quelli di tutti i suoi paralleli, e tutti i punti d'ognuna delle circonferenze sono egualmente distanti dall' uno, o dall' altro de' poli. È chiaro, per esem-

pio, che la rivoluzione (376) del raggio FE non altera mai la distanza AE.

Su questi principj vi sono de' compassi sferici, col mezzo de' quali si trovano facilmente sopra la superficie di un globo i poli di un circolo dato, o vero da un polo dato si descrive un cerchio.

385. Sia DAE un arco di circolo massimo descritto col raggio CD della sfera, e sia DBE un arco terminato ai medesimi punti D, E, ma descritto da un raggio più piccolo FE. È noto, per l'operazione medesima del compasso, che l'arco descritto dal raggio più piccolo ha una curvatura più grande. Dunque *l'arco di circolo massimo è il più breve che si possa condurre da un punto ad un altro sopra una superficie sferica.* Fig.44

L'arco di circolo massimo è dunque la misura naturale ed unica, perchè costante, d'ogni distanza sferica. All'incontro l'ineguaglianza de' cerchj minori (376) è cagione che di essi non fa uso la Trigonometria. Però sotto il semplice nome di circoli, o di archi, intenderemo sempre circoli massimi, od archi di circoli massimi.

386. Consideriamo nella fig. 45 il fuso AEDBKGA della fig. 43, e cerchiamo di valutare l'angolo formato sopra la superficie della sfera dall' incontro di due archi, per esempio l'angolo DAM. Fig.45

È chiaro che DAM è l'angolo stesso, che EAG, o sia che la grandezza di un angolo sferico è indipendente da quella de' lati, come nel rettilineo: giacchè *angolo sferico non può essere altro, che l'apertura, o sia l'inclinazione scambievole di due archi, considerata ne' punti immediatamente prossimi a quello, nel quale s'incontrano.* Ma l'arco infinitamente piccolo si confonde con la sua tangente, poichè hanno origine nel medesimo punto, e sono perpendicolari entrambi al raggio che cade in quel punto. Dunque un angolo sferico qualunque, come EAG, il qual dipende dall' inclinazione scambievole di due archi AE, AG, considerata presso il punto A, dove sono infinitamente piccoli, sarà lo stesso che l'angolo formato al punto A dal concorso delle tangenti dei detti due archi. Ora le tangenti degli archi AE, AG, sono respettivamente

Fig.45 parallele ai raggi CD, CM, che sono perpendicolari ad AC, posto AD = 90° = AM. E però l'angolo formato da dette tangenti sarà eguale a DCM. Ma quest' angolo, avendo il vertice al centro della sfera, ha per misura l'arco DM. Dunque 1°. *un angolo sferico ha per misura l'arco compreso fra i suoi lati, a 90° di distanza dalla loro intersezione.*

387. L'angolo DCM è pur quello che serve di misura all' inclinazione scambievole dei due piani AEDB, AGKB. Se per misurar questa inclinazione si prendesse ogni angolo formato da linee non perpendicolari alla comune sezione AB, da linee diversamente oblique si avrebbero angoli differenti, e per conseguenza non proprj a determinare la quantità dell' inclinazione. In fatti, quando i piani sono perpendicolari uno all' altro, l'angolo d' inclinazione non può esser che retto. Ora è facile conoscere, che tal non sarebbe, se si considera formato da linee non perpendicolari alla comune sezione. Dunque 2°. *un angolo sferico ha per misura l'inclinazione de' piani dei due archi, che lo formano.*

388. Applicando tutto ciò che si è detto (386, 387) anche all'angolo DBM, si vedrà, per le stesse ragioni, che questo pure è misurato dall' arco DM. Dunque 1°. *le circonferenze di due circoli formano un angolo eguale in ambi i punti della loro intersezione; 2°. questi due punti sono i poli* (379, 382) *dell' arco, che serve di misura comune ai detti due angoli.*

389. Perchè un angolo sferico sia di 90°, bisogna dunque che i suoi lati, prolungati se fa duopo, passino per li poli l' uno dell' altro. In fatti l' inclinazione de' piani non può esser che uguale a quella degli assi (381). Se dunque due piani sono perpendicolari fra essi, l' asse dell' uno sarà necessariamente nel piano dell' altro.

E però, per la pratica, se si vuole formare un angolo retto all' estremità D di un arco DE, si prenderà sopra DE, prolungato se bisogna, un arco DA = 90°. Quindi dal punto A per polo, e con l' intervallo AD, descrivendo un arco, il qual sarebbe DM, se si suppone AD = AM, sarà per le cose dette ADM = 90°, giacchè DE prolungato

prolungato passa per il polo A dell'arco DM, e DM prodotto fino a 90° terminerebbe ad un punto distante 90° per costruzione dai punti A, e D. Questo punto sarebbe per conseguenza il polo dell' arco DE, (382, 378).

390. Da ogni punto della superficie della sfera si può dunque condurre un arco perpendicolare ad un arco dato, prolungato se è necessario; bastando per ciò far passare l' arco richiesto per il punto dato, e per il polo dell' arco dato. Donde si vede che tutti gli archi perpendicolari ad un circolo vanno ad intersecarsi ne' poli del detto circolo; e reciprocamente, che un arco, il qual taglia due o più archi a 90° di distanza dalla loro comune intersezione, li taglia tutti perpendicolarmente. Così ADM = 90° = AMD.

391. L'arco, che passa dal polo di un circolo al polo di un altro circolo, misura evidentemente l'inclinazione scambievole degli assi dei detti circoli. Ma l' inclinazione degli assi è la stessa che quella de' piani de' circoli respettivi (381). Dunque *la distanza de' poli di due circoli è uguale all' inclinazione de' loro piani.*

392. Quando i cerchj minori si frammettono nei problemi, due sono le maniere per eliminarli. Sia EG un arco di parallelo. In sua vece si può introdurre, o l'arco di circolo massimo, compreso fra i medesimi punti E, G; o l' arco parallelo di circolo massimo, DM, che è quanto dire (386), l' angolo al polo, EAG, opposto all' arco EG di cerchio minore, che vuole eliminarsi. Per determinar queste due ragioni giova premettere il seguente teorema.

Essendo noto che le circonferenze, o vero le loro parti omologhe, cioè gli archi di egual numero di gradi, sono proporzionali ai raggi, ne segue che un arco di circolo massimo sta all' arco omologo d' un cerchio minore, il cui raggio sia, per esempio, EF, come CE ad EF :: 1 : sen. AE. E però *un arco di circolo massimo sta ad un arco d' egual numero di gradi d' un cerchio minore, come il raggio della sfera sta al seno della distanza del cerchio minore al suo polo.* Questa analogia dà la lunghezza d'un arco di cerchio minore in parti di circolo massimo. Fig. 43

Ff

Fig. 44 393. Ciò posto, 1°. sia DBE l'arco di cerchio minore, in cambio del quale si vuol prendere l'arco DAE di circolo massimo (385). Tirata la corda comune DE, si ha (247), $\frac{1}{2}$ DE $=$ CE $\times$ sen. $\frac{1}{2}$C $=$ EF $\times$ sen. $\frac{1}{2}$F. Ma EF è uguale (392) al raggio della sfera moltiplicato per il seno della distanza del polo al cerchio minore, di cui EF è il raggio. Sostituendo nell'ultima equazione questo valore di EF, si ricava la seguente: sen. $\frac{1}{2}$ *arco cercato di circolo massimo* $=$ sen. $\frac{1}{2}$ *arco di cerchio minore, sotteso da una medesima corda* $\times$ sen. *distanza di quest' ultimo cerchio al suo polo.*

394. 2°. I raggi EF, GF, dell'arco di parallelo EG, essendo perpendicolari (376) sopra AB, e però respettivamente paralleli a CD, CM, formano l'angolo EFG uguale all'angolo DCM. Ne segue che un arco DM di circolo massimo è d'egual numero di gradi d'ogni arco EG suo parallelo, compreso fra gli stessi archi AD, AM, che si riuniscono al polo comune A. Si ha dunque (392), DM : EG :: 1 : sen. AE : ma DM $=$ DAM, (386); dunque *un arco di cerchio minore* $=$ *angolo al polo, che gli è opposto* $\times$ sen. *distanza dell'arco al polo.* Col mezzo di questa equazione si potrà sostituire l'angolo al polo, in vece dell'arco opposto di cerchio minore.

395. Se nell' analogia (394), in vece di 1, si pone sen. 90°, (42), o vero sen. AD, si potrà esprimerla generalmente, come segue. *Gli archi omologhi paralleli sono fra essi come i seni delle distanze respettive al polo comune.*

396. La proporzione (394), DM : EG :: 1 : sen. AE, fa vedere che, come niun seno è maggiore del raggio, così l'arco EG di parallelo, qualunque sia la sua distanza dal polo, non sarà mai maggiore di DM. Con più ragione ciò sarebbe vero quando EG fosse un arco di circolo massimo (385). E però *la distanza massima* DM *fra due circoli qualunque*, ADB, AMB, *è a* 90° *dai punti della loro intersezione.* Questa è pur la larghezza massima d'ogni fuso AEDBKGA.

E tanto basta sulla comparazione de' cerchj minori ai massimi.

397. I principj, che ho sminuzzati fin quì con qualche prolissità, ben intesi che siano, non resterà più veruna difficoltà nella Trigonometria sferica. Tutto quello che segue si appoggia su questi fondamenti.

Poichè l' angolo rettilineo, che fanno insieme le tangenti di due archi nel punto ove questi s' incontrano, è uguale all'angolo sferico formato dagli archi stessi (386), saranno perciò comuni agli angoli sferici le seguenti proprietà degli angoli rettilinei.

1°. Un angolo sferico è sempre minore di 180°.

2°. Ogni arco, cadente sopra un altr' arco, forma due angoli eguali a due retti.

3°. Ogni arco, che taglia un altro arco, forma gli angoli opposti al vertice eguali.

4°. La somma degli angoli formati dall' intersezione di due archi è di 360°.

398. Volendo rinchiudere con tre archi una porzione di superficie della sfera, che è quanto dire, volendo formare un triangolo sferico, è necessario che due archi, per esempio, AN, AK, siano intersecati da un terzo, come NK, avanti che i primi due si riuniscano (380) al punto B, lontano 180° dall' altro punto d'intersezione A. Ciò che si è detto di AN, e AK, sarà pur vero di AN, e NK; non meno che di AK, e NK. Dunque *ogni lato di un triangolo sferico è necessariamente minore di* 180°.

Questa regola e la seguente contengono due condizioni, senza le quali non è possibile di costruire un triangolo sferico con tre archi dati.

399. Poichè l'arco che passa da un punto ad un altro è la misura più breve della distanza di quei due punti (385), ne risulta che *la somma di due lati di un triangolo sferico è sempre maggiore del terzo.*

400. Dunque $NK < (BN + BK)$. Ma $BN + BK = 360° - AN - AK$. Dunque $(NK + AN + AK) < 360°$, o sia *la somma dei tre lati di un triangolo sferico è sempre minore di* 360°.

Ff ij

401. *La somma dei tre angoli è sempre minore di* 540°,(397,1°). Resta da provare ch' essa è sempre maggiore di 180°; il che forma una differenza essenziale dai triangoli rettilinei.

Fig.46 402. In un triangolo sferico qualunque ABC, se si prende successivamente per polo il vertice dei tre angoli A, B, C, e si descrivono a 90° di distanza gli archi DE, EF, DF, questi incontrandosi formeranno un triangolo, come DFE.

Questa costruzione fa vedere che il punto E è lontano 90° dai punti A, e B. Dunque E è il polo (382, 378) dell' arco AB. Per la stessa ragione, D è il polo di AC, e F è il polo di BC.

Dal polo E prolunghisi AB fino in G, e dal polo D si prolunghi AC fino in H. Sarà, per costruzione, $GE = 90° = DH$. Dunque $GE + DH = 180° = GE + DG + GH = DE + GH$. Ma GH è la misura dell'angolo A, (386). Dunque DE è il supplemento di A.

Col medesimo metodo si troverà, che EF è il supplemento di B, e DF di C.

Or se dal polo E si prolunga GA fino in L, GL sarà la misura dell' angolo E. Ma $GA = 90° = BL$, e per conseguenza $GA + BL$, o vero $GL + AB = 180°$. Dunque l' angolo E è supplemento dell' arco AB.

Si troverà similmente, che D è supplemento di AC, e F di BC.

Dunque gli angoli e i lati del triangolo DEF sono supplementi dei lati e degli angoli respettivamente opposti nel triangolo ABC, e viceversa. Si faccia attenzione a questa proprietà de' triangoli DEF, ABC, (l'uno chiamasi il *triangolo polare*, o *supplementario* dell' altro) poichè è di grande uso nella Trigonometria sferica. Or servirà a far conoscere facilmente qual sia il limite in meno della somma dei tre angoli di un triangolo sferico.

403. In fatti, poichè i tre lati DE, EF, DF, son supplementi dei tre angoli A, B, C, ne risulta che $DE + EF + DF + A + B + C = 540°$. Ma $(DE + EF + DF) < 360°$, (400). Dunque

1°. *la somma dei tre angoli di un triangolo sferico è sempre maggiore di* 180°. E ne segue 2°. che, *se il triangolo è equilatero, l'angolo formato dall'incontro di due archi è maggiore dell'angolo rettilineo formato dalle loro corde.*

404. Se ognuno de'lati AB, AC, BC, è minore di 90°, ciascuno degli angoli del triangolo supplementario DEF sarà maggior di 90°. E se gli angoli A, B, C, sono tutti acuti, ognuno de'lati del triangolo DEF sarà parimenti maggior di 90°. Ma, se ognuno de'lati AB, AC, BC, fosse di 90°, il triangolo ABC si confonderebbe col supplementario (402). Dunque *un triangolo sferico può avere tanto gli angoli, quanto i lati, tutti minori, o tutti eguali, o tutti maggiori di* 90°.

405. Dunque (403, 401) *la somma degli angoli d'un triangolo sferico può variare da* 180° *fino a* 540° *esclusivamente.* Per conseguenza dalla cognizione di due angoli non può dedursi il valore del terzo, come nella Trigonometria rettilinea; ma in contraccambio si ha il grande avvantaggio, che dati i tre angoli si può trovare il valor d'ogni lato, come vedremo a suo luogo.

406. Si noti quanta sia la disparità fra il variare degli angoli, e quello de'lati. Se questi ultimi sono infinitamente piccoli, la differenza da essi alle loro corde respettive consiste in infinitesimi di terzo ordine, di quinto ordine, &c. (152) : il triangolo è dunque rettilineo, e la somma degli angoli di 180°. Questo è il caso della minima grandezza possibile tanto dei lati, quanto degli angoli. Or si supponga che il triangolo infinitamente piccolo cresca in modo, che ognuno de' lati sia di 90°. Allora ciascuno degli angoli sarà retto (404) : con che la somma degli angoli sarà cresciuta di 90°, nel mentre che quella de' lati è cresciuta tre volte tanto, prossimamente. Il contrario succede da questo punto in poi; giacchè, per quanto si aumentino ancora i lati, l'aumento di tutti insieme non arriverà mai a 90°, (400) : all'incontro quello degli angoli può esser di tre volte 90° prossimamente (405).

407. *Due triangoli sferici sono uguali, se i tre lati dell'uno sono*

respettivamente uguali ai tre lati dell' altro; giacchè ponendo i lati eguali l'uno sopra l'altro, dovranno coincidere in tutti i loro punti; dal che ne risulta, che i tre angoli pure sono respettivamente uguali.

408. Se i tre angoli sono respettivamente uguali in due triangoli sferici, i loro triangoli polari avranno i lati respettivamente uguali, come supplementi d'angoli uguali. Dunque i due triangoli polari avranno gli angoli respettivamente uguali (407). Dunque i supplementi di questi angoli, che sono i lati de' triangoli dati, saranno respettivamente uguali. E però (407), *due triangoli sferici sono uguali, se i tre angoli dell' uno sono respettivamente uguali ai tre angoli dell'altro.* Questa è un' altra differenza essenziale dai triangoli rettilinei.

409. *Due triangoli sferici sono ancora uguali,* 1°. *quando due lati e l'angolo compreso sono respettivamente uguali;* 2°. *quando due angoli e il lato compreso sono respettivamente uguali;* 3°. *quando due lati, e i due angoli opposti, sono respettivamente uguali.*

Queste tre proposizioni si dimostrano con la superposizione, come ne' triangoli rettilinei.

410. *Per tre punti dati, sopra la superficie di un globo, si può sempre far passare un cerchio;* il qual sarà cerchio massimo solamente nel caso che i tre punti dati siano posti tutti in un piano, il qual passi per il centro della sfera (378).

Fig.47 Siano A, B, C, i punti dati. Si conducano gli archi di circolo massimo, AB, BC. Dai punti di mezzo dell' uno e dell' altro, che suppongo essere E, D, si elevino gli archi perpendicolari EP, DP, i quali s' incontreranno in un punto qualunque P: e si tirino gli archi AP, BP, CP.

I due triangoli APE, BPE, rettangoli in E, saranno eguali, (409, 1°.). Dunque AP = BP. Nel modo stesso si prova che BP = CP. Dunque, se con l'intervallo AP = BP = CP, e dal punto P per polo, si descrive un cerchio, passerà per li punti A, B, C.

Si può dunque sempre circoscrivere un cerchio ad un triangolo sferico qualunque.

411. *Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono eguali.*

In fatti se AB = AC, si prenda ad arbitrio AD = AE, e si tirino gli archi BD, CE. I triangoli ABD, ACE sono uguali (409, 1°.). Dunque BD = CE. Quindi i due triangoli BCE, BCD sono uguali (407). Dunque gli angoli omologhi sono uguali; e per conseguenza EBC = DCB, o vero ABC = ACB. Fig.48

Col mezzo del triangolo supplementario, si deduce facilmente la proposizione inversa, cioè che *se un triangolo sferico ha due angoli eguali, i due lati opposti sono uguali fra essi.*

412. Quindi in ogni triangolo sferico i lati eguali sono opposti agli angoli eguali, e viceversa; per il che *ogni triangolo sferico equiangolo è anche equilatero, e reciprocamente.*

413. *In ogni triangolo sferico il maggiore de' lati è opposto al maggiore degli angoli, e il minore de' lati è opposto al minore degli angoli.*

Sia BAC > B, e per mezzo di un arco AD si faccia A = B. Sarà AD = BD, (411). Dunque BC = AD + DC. Ma (AD + DC) > AC, (399). Dunque BC > AC; che è ciò che dovea dimostrarsi. Fig.49

414. *In ogni triangolo sferico, prolungandosi un lato, l'angolo esteriore è sempre minore dei due interiori ed opposti.*

D + ADC = 180°, (397, 2°.). Ma (A + B + D) > 180°, (403). Dunque (A + B + D) > (D + ADC), o vero (A + B) > ADC, come si dovea dimostrare.

415. Se A, e B sono i poli dell' arco DM, ciascuno degli archi AD, AM, BD, BM è di 90°; e però (407) i triangoli ADM, BDM sono eguali, e ognuno di essi è la metà del fuso AEDBMGA. Immaginiamoci un arco, il quale partendo dal punto A venga a divider per mezzo l'arco DM: il mezzo fuso, o sia il triangolo ADM, sarà diviso in due triangoli eguali (407). Lo stesso succederà del triangolo BDM, se si prolunga fino al punto B l'arco immaginato. Fig.45

Fig. 45 Dunque un semicircolo, il qual divida per mezzo l'arco DM, e termini ai poli di esso, A, e B, divide in due fusi eguali il fuso AEDBMGA. Dunque i fusi sono fra essi, come gli archi DM che misurano la loro larghezza massima (396). Se l'arco DM cresce fino a 360°, il fuso AEDBMGA diviene evidentemente uguale a tutta la superficie della sfera. Dunque la superficie della sfera è a 360°, come qualsisia fuso è all'arco DM che misura la larghezza massima di esso. Ma DM è pur la misura (386) dell'angolo, DAM, o DBM, d'un fuso qualunque AEDBMGA. Dunque la superficie di qualsivoglia fuso potrà sempre aversi dalla seguente analogia: 360° *sono alla superficie della sfera, come l'angolo di un fuso alla superficie del fuso stesso.* Questa analogia sarà utile ancora per trovar facilmente la superficie d'ogni triangolo sferico (499).

416. Se A, e B sono i poli del globo terrestre, sicchè AB sia l'asse, intorno del quale succede la rotazione diurna della Terra, il circolo al quale appartiene l'arco DM si nomina l'*equatore*; tutti i circoli che passano per li poli, come ADB, AMB, si chiamano *meridiani, o circoli orarj;* e la posizione geografica di un luogo si denota nel modo seguente. Sia A il polo artico, B l'antartico, G il sito della città di Parigi sul globo terrestre, e sia ADB il meridiano che passa per l'isola del Ferro, il qual fu adottato per primo meridiano da un gran numero di Geografi. L'arco GM, il qual misura la distanza dal punto G all' equatore, si chiama l' *altezza del polo*, o vero la *latitudine geografica boreale* della città di Parigi, la quale è di 48° 50'; e l'arco DM, il qual misura la distanza del meridiano AGMB del luogo G dal primo meridiano, si chiama la *longitudine geografica* della città di Parigi, e questa è di 20°. La latitudine de' luoghi, come K, posti fra l' equatore e il polo antartico, si chiama *latitudine australe.* Questi due dati, *longitudine* e *latitudine*, sono quelli che servono a collocare ogni luogo nel suo giusto sito, disegnando una carta geografica.

Quindi è che le *distanze dalla perpendicolare* (341) ridotte in gradi, minuti, &c. (290), si appellano ancora *differenze di latitudine;*

tudine; e *le distanze dalla meridiana* (341) vengono pur nominate *differenze di longitudine*. Queste denominazioni, per verità, sono improprie ed inesatte; ma daremo (533) un esempio delle correzioni opportune per renderle giuste.

CAPITOLO XV.

Risoluzione de' Triangoli sferici rettangoli.

417. Un triangolo sferico può avere due angoli retti, ed anche tutti tre (406).

Ora 1°. se ognuno degli angoli è retto, ogni lato è pur di 90°, e viceversa, (404). Il triangolo è dunque bell' e risolto.

2°. Se due angoli sono retti, i lati opposti ai medesimi sono pur di 90°, e viceversa (389, 390). Ma questi dati non bastano a far conoscere il terzo lato, e l'angolo che gli è opposto; si sa solamente che sono uguali fra loro, (386).

418. Infine se il triangolo sferico ha un solo angolo retto, la sua risoluzione dipende da due teoremi fondamentali, il secondo de' quali suol dar molta briga ai principianti. Prendo la dimostrazione del primo dal Sig. Ab. Marie (*Éléments de Mathém.*), e mi lusingo d' aver ridotto quella del secondo ad uguale chiarezza e semplicità.

Sia E il centro della sfera, e siano sulla sua superficie tre archi AB, AC, BC, che formino un triangolo rettangolo in A. Si prolunghi ciascuno degli archi BA, BC, finchè si abbia BH = 90° = BF. Sarà 1°. BEF = 90° = BEH, poichè questi angoli sono misurati da archi di 90°, BF, BH; per conseguenza FE, HE sono perpendicolari a BE: 2°. FE = HE = CE = AE = BE, poichè questi sono tutti raggi della sfera: 3°. FH sarà la misura (386), Fig. 50

Fig.50 dell'angolo ABC, che chiameremo B. Si calino le perpendicolari, FG sopra EH, CL sopra AE, CD sopra BE; e si tiri DL che, essendo nello stesso piano con AE, farà angolo retto con CL. I triangoli rettangoli CLD, FGE saranno simili, e i loro piani paralleli, a cagione che CD, FE sono parallele, e FG, CL perpendicolari sul medesimo piano BAHE; donde ne segue che anche DL è parallela a GE, e perpendicolare a BE.

Ciò posto, DC : CL :: FE : FG. Ma DC è il seno di BC; CL il seno di AC, FG il seno di FH = B. Dunque

$$\text{sen.BC} : \text{sen.AC} :: 1 : \text{sen.B}.$$

Prolungando CA, CB, fino a 90° di distanza dal punto C, si troverebbe, col metodo stesso, che

$$\text{sen.BC} : \text{sen.AB} :: 1 : \text{sen.C}.$$

Dunque, per primo teorema: *in ogni triangolo sferico rettangolo, il seno dell'ipotenusa sta al seno di un lato, come il raggio sta al seno dell'angolo opposto al medesimo lato.*

419. I triangoli rettangoli EDL, ELC, danno (211, 210) $EL = \frac{DL}{\text{sen.DEL}} = \frac{CL}{\text{tang.CEL}}$. Ma DL : CL :: GE : FG :: 1 : tang.FEH :: 1 : tang.B. Dunque $\frac{1}{\text{sen.DEL}} = \frac{\text{tang.B}}{\text{tang.CEL}}$. Ma DEL = AB, e CEL = AC. Dunque

$$1 : \text{tang.B} :: \text{sen.AB} : \text{tang.AC}.$$

E però, per secondo teorema: *in ogni triangolo sferico rettangolo, il raggio sta alla tangente di un angolo, come il seno del lato adjacente sta alla tangente del lato opposto.*

420. In questo teorema si vede, che *ne' triangoli sferici rettangoli ogni lato è della stessa specie dell'angolo che gli è opposto;* poichè tang.B, e tang.AC hanno il medesimo segno nell'analogia, e però l'una non può essere negativa, senza che l'altra lo divenga.

Le regole ordinarie de' segni bastano per determinare la specie della cosa cercata in tutti i casi non dubbj, e risparmiano la fatica

avuta fin'ora di costruir molte regole, ed indicare la specie in ogni caso.

421. Per iscorgere in un' occhiata tutti i casi dubbj; se si suppone KN perpendicolare sopra ADB, i triangoli ANK, BNK rettangoli in N avranno il lato NK comune, e KAN = KBN, (388). Quindi si vede, che il conoscere il valore di NK, e dell' angolo opposto, non determina a qual dei due triangoli questi dati appartengano; sicchè, quando le circostanze della questione non levino l'incertezza, per la Trigonometria non si può sapere, se l'ipotenusa sia minore di 90°, come BK, o maggiore, come AK; e similmente se il lato e l' angolo ignoti siano BN e BKN, o i loro supplementi AN, e AKN. Si conchiuda però, che, *dati un angolo, e il lato opposto, la specie d' ognuna delle altre parti di un triangolo sferico rettangolo è dubbia.* Fig.49

422. Come un seno non è mai maggiore del raggio, così nell' analogia (419) non può mai essere tang.AC > tang.B. Ma AC e B sono sempre della medesima specie (420). Dunque *ne' triangoli sferici rettangoli ogni angolo obliquo non può mai esser minore se è acuto, maggiore se è ottuso, del lato che gli è opposto.* Fig.50

423. La regola (420) fa vedere che l' arco perpendicolare, se è minor di 90° è il più corto, se è maggior di 90° è il più lungo, che possa menarsi sopra la sfera da un punto dato ad un circolo. In fatti, nel primo caso, sarà opposto ad un angolo acuto; sarà dunque minor (413) d'ogni altro arco condotto dal punto dato allo stesso circolo, giacchè quest' arco sarebbe l' ipotenusa del triangolo risultante dalla presente costruzione. Nel secondo caso, sarà opposto ad un angolo ottuso, e però maggior d'ogni ipotenusa. Dunque *in un triangolo sferico rettangolo ogni lato minor di 90° è minor dell' ipotenusa, e ogni lato maggior di 90° è maggior dell' ipotenusa.*

424. Poichè (418), FG : CL :: FE : DC :: sen.BF : sen.BC, ne segue, che le distanze FG, CL di due circoli in diversi punti, misurate da linee perpendicolari al piano dell' uno BH, sono

proporzionali ai seni delle distanze BF, BC, fra i punti considerati e l'intersezione B dei due circoli, misurate sull'altro circolo BCF.

425. Se i tre lati del triangolo sono infinitamente piccoli, gli archi si confonderanno coi loro seni e tangenti (152, 153), ed il triangolo sarà rettilineo. In fatti, ponendo nelle analogie (418, 419) i lati, in vece de' loro seni e tangenti, si ha BC : AC :: 1 : sen.B, e 1 : tang.B :: AB : AC, che sono appunto le proporzioni di un triangolo rettilineo ABC rettangolo in A, (213; 10°, 1°). In questo modo le formole de' triangoli sferici sogliono convertirsi, ed applicarsi ai rettilinei. Ma un tale vantaggio fu perduto fino a quest'ora relativamente a quelle formole, in cui entrano coseni de' lati, le quali non furono credute suscettibili di tal traduzione; anzi di più alcuni Autori hanno escluso anche quelle dove entrano cotangenti de' lati. Tale sembra essere il sentimento dello stesso la Caille (*Élém. Astron. Traité prélim.* n°. 218). Altri sostituirono ∞ ad ogni coseno di lato, il che non è d'alcun frutto, nè agevole da intendere. E pure ogni apparente difficoltà si toglie facilmente, ponendo $\frac{1}{\text{tang.lato}}$, o vero $\frac{1}{\text{lato}}$ in vece di cot.lato, e l'unità in vece di cos.lato (*) come conviene (154) alla considerazione del triangolo infinitamente piccolo. Ma perchè quest'ultima regola non basta a tradur che una parte delle formole sferiche, nelle quali entrano coseni de' lati, così, quando una stessa formola contenga più coseni de' lati, trovo esser necessario invocare gl'infinitesimi di secondo ordine, cioè sostituire al coseno d'ogni lato i due primi termini della serie (Y), (154), vale a dire la differenza fra l'unità, e la metà del quadrato del respettivo lato. Che se due coseni de' lati si trovano moltiplicati insieme, dovrà negligersi il rettangolo dei

(*) Così vedo appunto aver fatto il Sig. Ab. Boscovich per le sue particolari formole differenziali contenute nell' interessante Opuscolo XV, che fa parte del tomo IV delle sue Opere stampate or ora in Bassano, e che mi fu inviato benignamente dal celebre Autore, allorchè la presente mia Operetta stava già sotto il torchio

due quadrati de' lati stessi, poichè rappresenta un infinitesimo di quarto ordine. Finalmente se il coseno di un lato sia moltiplicato per una linea trigonometrica qualunque, la qual non sia il coseno di un altro lato, si dovrà fare il coseno uguale all'unità solamente, per evitar nel prodotto gl' infinitesimi di terzo ordine. Facendo uso di queste regole, delle quali darò molti esempj, non trovo se non due formole, fra il gran numero delle appartenenti alla Trigonometria sferica nel presente Trattato (eccettuando quelle che ripugnano alla natura de' triangoli rettilinei), le quali non si traducano ad uso de' triangoli stessi. Si vedrà specialmente (727) quanto sia vasta l' utilità delle nostre regole.

Per maggior sodisfazione degli studiosi, aggiungerò che le formole trovate nel modo sopra esposto per un triangolo rettilineo infinitamente piccolo devono convenire ad ogni triangolo rettilineo di qualunque grandezza, poichè questa non altera punto la natura de' triangoli rettilinei. All' incontro dalle formole della Trigonometria rettilinea non si possono ricavare quelle della sferica, perchè non si dà mai che un triangolo rettilineo sia sferico, laddove un triangolo sferico infinitamente piccolo è veramente rettilineo.

426. Dai due teoremi (418, 419) se ne cavano altri quattro nel modo che segue.

Sia il triangolo ABC rettangolo in A, i cui lati e l'ipotenusa, prolungati fino a 90°, siano BE, BF, AD. D essendo il polo dell' arco BF, (389), l' arco descritto dal punto B come polo, passerà per li punti D, E, F, (382), e gli angoli E, F saranno retti (390). Fig.5.

Da questa costruzione si vede, che DE è il complemento di EF = B, CE il complemento dell' ipotenusa BC, AF = D il complemento del lato AB, e CD il complemento dell' altro lato AC. Perciò DCE si chiama *triangolo complementario* di ABC. Applicando al triangolo DCE rettangolo in E i due teoremi (418, 419), se ne deducono i quattro seguenti.

1°. Il teorema (418) dà sen.CD : sen.CE :: 1 : sen.D.

Prendendo i complementi nel triangolo dato ABC, l'analogia diviene

cos.AC : cos.BC :: 1 : cos.AB.

E però *in ogni triangolo sferico rettangolo, il coseno di un lato è al coseno dell' ipotenusa, come il raggio al coseno dell' altro lato.*

427. 2°. Il teorema (418) dà pure sen.CD : sen.DE :: 1 : sen.C. Dunque

cos.AC : cos.B :: 1 : sen.C.

E però *in ogni triangolo sferico rettangolo, il coseno di un lato sta al coseno dell' angolo opposto, come il raggio sta al seno dell' altro angolo.*

428. 3°. Dal teorema (419) si ha, 1 : tang.D :: sen.DE : tang.CE. Dunque 1 : cot.AB :: cos.B : cot.BC, o vero, per impiegar piuttosto le tangenti,

1 : cos.B :: tang.BC : tang.AB.

E però *in ogni triangolo sferico rettangolo, la tangente dell' ipotenusa sta alla tangente di un lato, come il raggio al coseno dell' angolo adjacente.*

429. 4°. Il teorema (419) dà ancora 1 : tang.C :: sen.CE : tang.DE. Dunque 1 : tang.C :: cos.BC : cot.B, o vero

1 : cos.BC :: tang.C : cot.B :: tang.B : cot.C.

E però *in ogni triangolo sferico rettangolo, il raggio è al coseno dell' ipotenusa, come la tangente di un angolo è alla cotangente dell' altro.*

430. Date due cose in un triangolo sferico rettangolo, col mezzo de' sei teoremi fin quì dimostrati sempre si trovano tutte le altre, salvi i casi dubbj (417, 2°; 421). Le soluzioni somministrate dai medesimi teoremi sono tutte raccolte nella tavola seguente, ed in altro modo nella tavola VI posta in fine.

Tavola per la risoluzione di un Triangolo sferico ABC *rettangolo in* A.

DATI.	QUESITI.		FORMOLE.
BC, B	AC	1°	$\text{sen.AC}^{\star} = \text{sen.BC sen.B}^{\star}$
	AB	2°	$\text{tang.AB} = \text{tang.BC cos.B}$
	C	3°	$\text{cot.C} = \text{cos.BC tang.B}$
BC, C	AB	4°	$\text{sen.AB}^{\star} = \text{sen.BC sen.C}^{\star}$
	AC	5°	$\text{tang.AC} = \text{tang.BC cos.C}$
	B	6°	$\text{cot.B} = \text{cos.BC tang.C}$
BC, AB	AC	7°	$\text{cos.AC} = \frac{\text{cos.BC}}{\text{cos.AB}}$
	B	8°	$\text{cos.B} = \text{tang.AB cot.BC}$
	C	9°	$\text{sen.C}^{\star} = \frac{\text{sen.AB}^{\star}}{\text{sen.BC}}$
BC, AC	AB	10°	$\text{cos.AB} = \frac{\text{cos.BC}}{\text{cos.AC}}$
	C	11°	$\text{cos.C} = \text{tang.AC cot.BC}$
	B	12°	$\text{sen.B}^{\star} = \frac{\text{sen.AC}^{\star}}{\text{sen.BC}}$
AB, C	BC	13°	$\text{sen.BC} = \frac{\text{sen.AB}}{\text{sen.C}}$
casi dubbj.	AC	14°	$\text{sen.AC} = \text{tang.AB cot.C}$
	B	15°	$\text{sen.B} = \frac{\text{cos.C}}{\text{cos.AB}}$
AC, B	BC	16°	$\text{sen.BC} = \frac{\text{sen.AC}}{\text{sen.B}}$
casi dubbj.	AB	17°	$\text{sen.AB} = \text{tang.AC cot.B}$
	C	18°	$\text{sen.C} = \frac{\text{cos.B}}{\text{cos.AC}}$

DATI.	QUESITI.		FORMOLE.
AB, B	BC	19ª	$\cot.BC = \cos.B \ \cot.AB$
	AC	20ª	$\text{tang}.AC = \text{tang}.B \ \text{sen}.AB$
	C	21ª	$\cos.C = \text{sen}.B \ \cos.AB$
AC, C	BC	22ª	$\cot.BC = \cos.C \ \cot.AC$
	AB	23ª	$\text{tang}.AB = \text{tang}.C \ \text{sen}.AC$
	B	24ª	$\cos.B = \text{sen}.C \ \cos.AC$
AB, AC	BC	25ª	$\cos.BC = \cos.AB \ \cos.AC$
	B	26ª	$\cot.B = \text{sen}.AB \ \cot.AC$
	C	27ª	$\cot.C = \cot.AB \ \text{sen}.AC$
B, C	BC	28ª	$\cos.BC = \cot.B \ \cot.C$
	AB	29ª	$\cos.AB = \frac{\cos.C}{\text{sen}.B}$
	AC	30ª	$\cos.AC = \frac{\cos.B}{\text{sen}.C}$

Gli archi segnati coll'asterisco sono della medesima specie (420). La specie di tutti gli altri, salvi i casi dubbj (13ª... 18ª), è determinata dal segno (42).

431. Cinque formole della tavola precedente si possono calcolare per via di addizione, o di sottrazione, col mezzo delle tavole de' seni in numeri naturali, previe le seguenti trasformazioni, (II. 16ª, 15ª, 17ª).

$$1^a \quad \text{sen}.AC = \tfrac{1}{2}\cos.(BC \backsim B) - \tfrac{1}{2}\cos.(BC + B)$$

$$4^a \quad \text{sen}.AB = \tfrac{1}{2}\cos.(BC \backsim C) - \tfrac{1}{2}\cos.(BC + C)$$

$$21^a \quad \cos.C = \tfrac{1}{2}\text{sen}.(AB + B) - \tfrac{1}{2}\text{sen}.(AB - B)$$

$$24^a \quad \cos.B = \tfrac{1}{2}\text{sen}.(AC + C) - \tfrac{1}{2}\text{sen}.(AC - C)$$

$$25^a \quad \cos.BC = \tfrac{1}{2}\cos.(AB + AC) + \tfrac{1}{2}\cos.(AB \backsim AC)$$

Nella

Nella formola 21ª se B > AB, $\frac{1}{2}$sen.(AB — B) divien positivo in virtù della regola (154). Così succede di $\frac{1}{2}$sen.(AC — C) quando C > AC nella formola 24ª. La Caille (*Elémens d'Astronomie, Traité préliminaire*, n°. 242) s'inganna, prescrivendo il segno positivo in tutti i casi.

432. Giova ora cercare gli espedienti per avere con esattezza i secondi, ed anche le decime di secondo, quando i seni e coseni degli archi cercati sono molto grandi.

Le formole precedenti (431) saranno utili, fra certi limiti, come dicemmo (193); ma se anche le tavole in numeri naturali fossero insufficienti, o se non si volesse farne uso, allora in quei cinque casi si procederà come segue. Allorchè, per esempio, dati BC e B, non si può avere AC esattamente per mezzo della formola 1ª, si ricorra ad un'altra che dia una tangente. Per esempio, se si cerca AB per la 2ª, tosto, coi dati AB e B, potrà aversi AC con ogni precisione dalla 20ª.

433. Dalla 7ª si ricava 1 : cos.AC :: cos.AB : cos.BC. Dunque (10), 1 + cos.AC : 1 — cos.AC :: cos.AB + cos.BC : cos.AB — cos.BC. E per conseguente (I. 42ª), (II. 13ª), 1 : tang.² $\frac{1}{2}$AC :: cot.$\frac{1}{2}$(BC + AB) : tang.$\frac{1}{2}$(BC — AB). Si avrà dunque AC con grandissima precisione, trasformando la 7ª come segue:

$$7^a\ldots\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}AC = \sqrt{\text{tang.}\tfrac{1}{2}(BC - AB)\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}(BC + AB)}.$$

434. La 8ª dà, 1 : cos.B :: tang.BC : tang.AB. E però 1 + cos.B : 1 — cos.B :: tang.BC + tang.AB : tang.BC — tang.AB. Donde si ha (II. 10ª)

$$8^a\ldots\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\text{sen.}(BC - AB)}{\text{sen.}(BC + AB)}}.$$

435. La 9ª dà, 1 : sen.C :: sen.BC : sen.AB. Dunque 1 +

sen.C : 1 — sen.C :: sen.BC + sen.AB : sen.BC — sen.AB.
E però (II. 9ª, 12ª)

$$9^a \ldots \ \text{tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}C) = \pm\sqrt{\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(BC + AB)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(BC - AB)}}.$$

In questa formola si discernerà facilmente, qual dei due segni convenga, per mezzo della regola (420). Nelle due formole precedenti il segno del radicale non può esser che positivo (398), (397, 1°).

Permutando nelle tre ultime formole C in B e B in C, si avranno le trasformate corrispondenti alle 10ª, 11ª, 12ª.

436. Coi metodi usati (435, 434, 433), si hanno le formole seguenti, nelle quali la specie delle cose cercate è dubbia (421).

$$13^a \ldots \ \text{tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}BC) = \pm\sqrt{\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(C + AB)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(C - AB)}}.$$

$$14^a \ldots \ \text{tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}AC) = \pm\sqrt{\frac{\text{sen.}(C + AB)}{\text{sen.}(C - AB)}}.$$

$$15^a \ldots \ \text{tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}B) = \pm\sqrt{\frac{\cot\frac{1}{2}(C + AB)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(C - AB)}}.$$

Permutando in queste tre formole B in C e C in B, si avranno le trasformate corrispondenti alle 16ª, 17ª e 18ª.

Queste formole non si possono tradurre ai triangoli rettilinei, poichè ripugna alla natura di essi il prender la somma, o la differenza, di un lato e di un angolo, queste essendo due quantità eterogenee. Lo stesso si dica delle quattro prime formole (431).

437. La 28ª dà, cos.BC : 1 :: cot.B : tang.C :: cot.C : tang.B. E però cos.BC + 1 : cos.BC — 1 :: cot.B + tang.C : cot.B — tang.C. E per conseguenza (I. 42ª), (II. 11ª), 1 : — tang.² ½BC :: cos.(B ∽ C) : cos.(B + C). Donde si ha

$$28^a \ldots \ \text{tang.}\tfrac{1}{2}BC = \sqrt{-\frac{\cos.(B + C)}{\cos.(B \backsim C)}}.$$

Si rifletta che cos.(B + C) converte sempre il segno negativo in positivo, giacchè *in ogni triangolo sferico rettangolo la somma dei due angoli obliqui è necessariamente maggiore di* $90°$, (403, 1°).

E come in un triangolo reale la tangente di mezza l'ipotenusa non può mai avere un valore immaginario, così deduco dall'ultima equazione, che *in ogni triangolo sferico rettangolo la differenza fra i due angoli obliqui è sempre minore di* $90°$.

Per quel che riguarda la formole 29ª e 30ª, quando AB o AC saranno piccoli, si cercherà prima BC per la 28ª; indi si avranno i lati esattamente col mezzo della 2ª, o della 5ª.

438. Le formole costruite (431 e segg.) servono ancora a risolvere un triangolo sferico rettangolo in molte combinazioni diverse da quelle della tavola (430); come si vede nella tavola seguente, dove si conoscerà facilmente che le formole 4ª, 6ª, 10ª, 12ª sono formate con moltiplicare, o dividere l'una per l'altra le due (433, 435).

Nell'uso della tavola seguente si osserveranno le regole de' segni (42, 154), e si noterà che non può mai essere $(BC - AB) > 180°$, (398); onde quando tang.$\frac{1}{2}(BC - AB)$, o sen.$(BC - AB)$ risulteranno negativi, sarà segno che $AB > BC$, (154). Ne segue che quando la quantità $(BC - AB)$ è data, convien che sia data altresì la nozione qual de' due archi è il più grande, eccetto nella 12ª dove tang.$\frac{1}{2}AC$ non può mai essere negativa, (398). Finalmente nella 13ª e 14ª, convien sapere, avanti di calcolarle, qual dei due angoli sia il maggiore.

Tavola per la risoluzione d' un Triangolo sferico rettangolo, in certi casi.

DATI.	QUESITI.	FORMOLE.
$(AB + AC), BC.$	AB, o AC.	1ª FORMOLA... $\cos.(AB \backsim AC) = 2\cos.BC - \cos.(AB + AC)$
Somma lati, ipot.	I due lati.	1ª cos.differ. lati = 2cos.ipotenusa − cos.somma lati
$(AB \backsim AC), BC.$	AB, o AC.	2ª $\cos.(AB + AC) = 2\cos.BC - \cos.(AB \backsim AC)$
Diff. lati, ipot.	I due lati.	2ª cos.somma lati = 2cos.ipotenusa − cos.differenza lati
$(BC + AB), AC.$	BC, o AB.	3ª $\text{tang}.\frac{1}{2}(BC - AB) = \text{tang}.^2\frac{1}{2}AC \; \cot.\frac{1}{2}(BC + AB)$
	C.	4ª $\cot.(45° + \frac{1}{2}C) = \text{tang}.\frac{1}{2}AC \; \cot.\frac{1}{2}(BC + AB)$
Un lato, e la somma dell' ipotenusa e dell' altro lato.	L'ipot. e il lato ignoto.	3ª tang.½diff.ipot.lato = tang.²½lato dato × cot.½somma data
	L'ang. op. al lato ign.	4ª cot.(45° + ½ang. cercato) = tang.½lato dato × cot.½som.data
$(BC \backsim AB), AC.$	BC, o AB.	5ª $\text{tang}.\frac{1}{2}(BC + AB) = \text{tang}.^2\frac{1}{2}AC \; \cot.\frac{1}{2}(BC - AB)$
	C.	6ª $\text{tang}.(45° + \frac{1}{2}C) = \text{tang}.\frac{1}{2}AC \; \cot.\frac{1}{2}(BC - AB)$
Un lato, e la differenza dall' ipoten. all' altro lato.	L'ipot. e il lato ignoto.	5ª tang ½somma ipot. lato = tang.²½lato dato × cot.½diff.data
	L'ang. op. al lato ign.	6ª tang.(45° + ½ang. cercato) = tang.½lato dato × cot.½diff.data
$(BC + AB), B.$	BC, o AB.	7ª $\text{sen}.(BC - AB) = \text{tang}.^2\frac{1}{2}B \; \text{sen}.(BC + AB)$
Un ang. e la somma del lato adjacente e dell' ipotenusa.	L'ipot. e il detto lato.	7ª sen. differ. ipot. lato = tang.²½ang. dato × sen.somma data
$(BC \backsim AB), B.$	BC, o AB.	8ª $\text{sen}.(BC + AB) = \cot.^2\frac{1}{2}B \; \text{sen}.(BC - AB)$
Un angolo e la diff. fra il lato adjacente e l' ipotenusa.	L'ipot. e il detto lato.	8ª sen.som. ipot. lato = cot.²½ang. dato × sen.diff.data
$(BC + AB), C.$	BC, o AB.	9ª $\text{tang}.\frac{1}{2}(BC - AB) = \cot.^2(45° + \frac{1}{2}C) \; \text{tang}.\frac{1}{2}(BC + AB)$
	AC.	10ª $\text{tang}.\frac{1}{2}AC = \cot.(45° + \frac{1}{2}C) \; \text{tang}.\frac{1}{2}(BC + AB)$
Un ang. e la somma del lato opposto e dell' ipotenusa.	L'ipot. e il detto lato.	9ª tang.½diff.ipot.lato = cot.²(45° + ½ang.dato) × tang.½som.data
	L'altro lato.	10ª tang.½lato cercato = cot.(45° + ½ang.dato) × tang.½som.data
$(BC \backsim AB), C.$	BC, o AB.	11ª $\text{tang}.\frac{1}{2}(BC + AB) = \text{tang}.^2(45° + \frac{1}{2}C) \; \text{tang}.\frac{1}{2}(BC - AB)$
	AC.	12ª $\text{tang}.\frac{1}{2}AC = \text{tang}.(45° + \frac{1}{2}C) \; \text{tang}.\frac{1}{2}(BC - AB)$
Un angolo e la diff. fra il lato opposto e l'ipotenusa.	L'ipot. e il detto lato.	11ª tang.½som.ipot.lato = tang.²(45° + ½ang.dato) × tang.½diff.data
	L'altro lato.	12ª tang.½lato cercato = tang.(45° + ½ang.dato) × tang.½diff.data
$(B + C), BC.$	B, o C.	13ª $\cos.(B \backsim C) = -\cos.(B + C) \; \cot.^2\frac{1}{2}BC$
La som. degli ang. e l'ipotenusa.	I due angoli.	13ª cos.diff. angoli = − cos.somma data × cot.²½ipotenusa
$(B \backsim C), BC.$	B, o C.	14ª $\cos.(B + C) = -\cos.(B \backsim C) \; \text{tang}.^2\frac{1}{2}BC$
La differ. degli ang. e l'ipotenusa.	I due angoli.	14ª cos.som. angoli = − cos.diff.data × tang.²½ipotenusa

439. Finita la costruzione delle formole per la risoluzione di un triangolo sferico rettangolo, convien dir due parole della loro traduzione ai triangoli rettilinei, per prima prova della verità di quanto avanzai (425). Ripassando quelle della tavola (430), se si fa cos.BC = 1, la 3ª e la 6ª danno cot.C = tang.B, e cot.B = tang.C; il che appunto è la proprietà di un triangolo rettilineo ABC rettangolo in A. Regge nel modo stesso la traduzione delle formole 15ª, 18ª, e loro simili. Nella 8ª, ponendo $\frac{1}{\text{tang.BC}}$ in luogo di cot.BC, indi i lati in vece delle tangenti, si ha tosto la proporzione (213, 13ª). Similmente succede delle altre formole, dove si trovano cotangenti de' lati. La traduzione della 25ª (a cui si riducono la 7ª e la 10ª) si fa come segue : $1 - \frac{1}{2}BC^2 = (1 - \frac{1}{2}AB^2)(1 - \frac{1}{2}AC^2) = 1 - \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{2}AC^2$, negligendo il prodotto dei due quadrati : riducendo, trasponendo, e moltiplicando per 2, si ha $BC^2 = AB^2 + AC^2$, che è la famosa equazione dell'ipotenusa.

Le tre prime e la 5ª formola della tavola (438) danno pur l'equazion dell'ipotenusa. La 13ª e la 14ª non si possono tradurre ai triangoli rettilinei, ripugnando alla natura di essi, che l'ipotenusa sia determinata dagli angoli, e viceversa. Tutte le altre formole di detta tavola si riducono a quelle corrispondenti (217, 218).

Risoluzione de' Triangoli sferici rettilateri.

440. Chiamo *rettilatero* quel triangolo che ha un lato di 90°. Questo triangolo deve mettersi nella classe de' rettangoli, giacchè il suo supplementario (402) è rettangolo, e questo è quello che si risolve, ed al qual si riducono i dati.

Ne daremo un esempio. Sia A il polo artico, BC l'equatore; B la città di Quito, D quella di Parigi. Conoscendo AB = 90°, AD = 41° 10′, (416), e la differenza di longitudine, fra le due città, BC = A = 80° 15′, si dimanda la più corta distanza fra di esse, o sia l'arco BD. Fig.48

Poichè AB $= 90°$, convien ridurre i dati al triangolo supplementario: ma, senza fare un'altra figura, mi servo del medesimo triangolo ABD, prendendo le parti opposte alle cose note, nel modo seguente. Suppongo D supplemento di AB, e scrivo D $= 90°$; suppongo B supplemento di AD, e scrivo B $= 138° 50'$; suppongo BD supplemento di A, e scrivo BD $= 99° 45'$: quindi l'angolo A divien la cosa cercata, come supplemento di BD. Nel triangolo ABD rettangolo in D, si conosce il lato BD, e l'angolo adjacente B, e si cerca l'altro angolo A. Questo è il caso della formola 12ª della tavola VI, che dà, cos.A $=$ cos.BD sen.B $= -$ cos.$99° 45' \times$ sen.$138° 50' = -$ sen.$9° 45' \times$ cos.$48° 50'$.

$$\begin{aligned} \log.\cos.48° 50' &= 9{,}818392 \\ \log.\mathrm{sen}.9° 45' &= 9{,}228784 \\ \log.\cos.A &= 9{,}047176 \end{aligned}$$

Dunque A $= 96° 24'$, ed il suo supplemento $83° 36'$ è la distanza cercata BD, la qual corrisponde a 5016 miglia geografiche da 60 per grado.

Risoluzione di due Triangoli sferici rettangoli che hanno un angolo comune.

Fig.52 441. Ne' triangoli sferici BAC, BED, rettangoli in A e in E, ed aventi un angolo comune B, si hanno le seguenti proporzioni fra le linee trigonometriche delle parti omologhe.

Poichè (418), sen.BC : sen.AC :: 1 : sen.B, e per la stessa ragione, sen.BD : sen.DE :: 1 : sen.B, ne risulta che sen.BC : sen.BD :: sen.AC : sen.DE, e però

i seni delle ipotenuse sono proporzionali ai seni de' lati respettivamente opposti all'angolo comune.

442. Poichè (419), 1 : tang.B :: sen.AB : tang.AC :: sen.BE : tang.DE; ne segue che

i seni de' lati adjacenti all' angolo comune sono come le tangenti de' lati opposti.

443. Si ha (427), cos.AC : cos.B :: 1 : sen.C, e
cos.DE : cos.B :: 1 : sen.D. Dunque
i seni degli angoli non comuni sono in ragione inversa de' coseni de' lati opposti all'angolo comune.

444. Lo stesso teorema (427) dà, 1 : sen.B :: cos.AB : cos.C :: cos.BE : cos.D. Dunque
i coseni degli angoli non comuni sono come i coseni de' lati opposti.

445. Per il teorema (428), 1 : cos.B :: tang.BC : tang.AB :: tang.BD : tang.BE. Dunque
le tangenti delle ipotenuse sono proporzionali alle tangenti de' lati adjacenti all' angolo comune.

446. Si ha (429), 1 : tang.B :: cos.BC : cot.C :: cos.BD : cot.D. Dunque
i coseni delle ipotenuse sono in ragione inversa delle tangenti degli angoli non comuni.

Si sperimenterà l'utilità delle proporzioni precedenti nella risoluzion de' problemi. Se si traducono ai triangoli rettilinei (425), si avranno le proporzioni di due triangoli rettangoli simili, è le tre (443, 444, 446) daranno C = D, come è vero.

Risoluzione di due Triangoli sferici rettangoli che hanno un lato comune.

447. Siano i triangoli ABD, ACD, che hanno un lato comune AD, rettangoli in D. Si avrà (418), sen.AD = sen.AB sen.B = sen.AC sen.C. Dunque sen.AB : sen.AC :: sen.C : sen.B. E però
i seni delle ipotenuse sono in ragione inversa de' seni degli angoli respettivamente opposti al lato comune.

Fig.53 e 54.

448. Si osservi, che ABC può rappresentare ogni triangolo sferico obliquangolo, e la proporzione potrà enunciarsi ancora nel modo seguente :

in ogni triangolo sferico, i seni de' lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti.

Fig.53 e 54. 449. Per il teorema (419), 1 : sen.AD :: tang.BAD : tang.BD :: tang.CAD : tang.CD. Dunque

le tangenti degli angoli adjacenti al lato comune sono come le tangenti de' lati opposti.

450. Per il medesimo teorema, tang.AD = sen.BD tang.B = sen.CD tang.C. Ne risulta sen.BD : sen.CD :: tang.C : tang.B. E però

i seni de' lati non comuni sono in ragione inversa delle tangenti degli angoli adjacenti.

451. Per il teorema (426), 1 : cos.AD :: cos.BD : cos.AB :: cos.CD : cos.AC. Dunque

i coseni delle ipotenuse sono proporzionali ai coseni de' lati non comuni.

452. Per il teorema (427), 1 : cos.AD :: sen.BAD : cos.B :: sen.CAD : cos.C. Dunque

i seni degli angoli adjacenti al lato comune sono proporzionali ai coseni degli angoli opposti.

453. Per il teorema (428), tang.AD = cos.BAD tang.AB = cos.CAD tang.AC. Quindi cos.BAD : cos.CAD :: tang.AC : tang.AB. E però

i coseni degli angoli adjacenti al lato comune sono in ragione inversa delle tangenti delle ipotenuse.

Dalle sei proporzioni (448 e segg.) dipende la risoluzione de' triangoli obliquangoli.

Risoluzione di due Triangoli sferici rettangoli che hanno l'ipotenusa comune.

Fig.55 454. Siano i triangoli ABC, DBC, rettangoli in A e in D, con l'ipotenusa comune BC.

Il

Il teorema (418) dà sen.BC : 1 :: sen.AB : sen.ACB :: sen.BD : sen.BCD :: sen.AC : sen.ABC :: sen.CD : sen.CBD. Laonde

i seni di due lati qualunque sono proporzionali ai seni degli angoli opposti.

455. Il teorema (426) dà cos.BC = cos.AB cos.AC = cos.CD cos.BD. Quindi

il rettangolo de' coseni de' lati d'un triangolo è uguale al rettangolo de' coseni de' lati dell'altro.

456. Per il teorema (428), 1 : tang.BC :: cos.ABC : tang.AB :: cos.ACB : tang.AC :: cos.BCD : tang.CD :: cos.CBD : tang.BD. Dunque

le tangenti di due lati qualunque sono proporzionali ai coseni degli angoli adjacenti.

457. Per il teorema (429), 1 : cos.BC :: tang.ACB tang.ABC : 1 :: tang.BCD tang.CBD : 1. E però

il rettangolo delle tangenti degli angoli d'un triangolo è uguale al rettangolo delle tangenti degli angoli dell'altro.

Ne' casi, ai quali saranno applicabili le analogie precedenti (441 e segg.), se in vece di conoscere le parti assolute de' triangoli, si conoscessero le somme, o le differenze, sarà facile ridurre a questi dati le stesse analogie coi metodi, che abbiamo adoperati tante volte nel corso di quest' Opera, e che si vedranno impiegati anche nel Capitolo seguente, per costruire quelle di Neper.

CAPITOLO XVI.

Risoluzione de' Triangoli sferici obliquangoli.

458. OGNI triangolo sferico obliquangolo si risolve, dividendolo in due rettangoli, col mezzo di un arco perpendicolare, che viene ad essere lato comune ad entrambi. Per conseguenza ricaveremo le soluzioni agevolmente dalle analogie (447 a 453).

Ma la perpendicolare può cadere di dentro, o di fuori del triangolo; il che dà risultati molto diversi. Per esempio, nel triangolo ABC non potendosi avere il valore di BC che in due volte, cioè col mezzo di quello dei due segmenti BD, CD, è chiaro che deve prendersi la loro somma, se la perpendicolare AD cade di dentro, come nella fig. 53, o pure la loro differenza, se cade di fuori, come nella fig. 54.

Fig. 53 e 54.

459. Sembra pertanto, a primo aspetto, che per risolvere un triangolo sferico obliquangolo sia necessario sapere, se la perpendicolare cada di dentro, o di fuori. Quindi ne avvenne che molti Autori illustri, volendo ajutare il Calcolatore con regole particolari per ogni caso, moltiplicando i precetti ne hanno difficoltata l'esecuzione, o pur non di rado han prescritto regole fallaci; nel mentre che i più si son tratti d'impaccio, lasciando al calcolatore la cura molesta d'indagare in ciascun caso la situazione della perpendicolare. Egli mi sembra che tutti questi inconvenienti si dileguino, se si adotta il sistema seguente, generalissimo e semplicissimo.

Le formole devono costruirsi sull'ipotesi, che la perpendicolare cada di dentro, e che tanto gli angoli quanto i lati siano minori ciascuno di 90°. Ciò posto dico che non è necessario nell'uso delle formole di attender punto alla perpendicolare, e che, *osservando le sole regole de' segni* (42, 154), *si avrà sempre* (ne' casi che non sian dubbj di lor natura) *il giusto valore delle cose cercate.*

La verità di questo sistema mi sembra intuitiva; del resto ciascuna

delle mie soluzioni deve esserne la prova a chiunque sarà per farne uso. A fondamento di un tale esame gioverà la regola seguente.

460. *Se gli angoli sulla base sono della stessa specie fra essi, la perpendicolare cade di dentro del triangolo : essa cade di fuori, se sono di specie diversa.*

In fatti 1°. se la perpendicolare AD cade di dentro del triangolo, la sua specie è la stessa (420) che quella degli angoli sulla *base* (242), B e C; i quali per conseguenza sono della medesima specie fra essi. Fig.53

2°. Se la perpendicolare cade di fuori, il prolungamento della base può farsi, o considerarsi, tanto da una parte, quanto dall' altra. Sia DAE un semicerchio perpendicolare al semicerchio DCE, (379). La perpendicolare calata dall'angolo A d'un triangolo ABC, sopra la base BC prolungata, sarà a piacimento, o AD, o AE. Se si considera AD, il triangolo ABC si converte in due triangoli rettangoli ADC, ADB, ne' quali AD essendo della medesima specie (420) degli angoli B e ACD, ne segue (397, 2°.) che gli angoli B e C, sulla base del triangolo dato, sono di specie diversa fra essi. Se si considera AE, questa è della stessa specie degli angoli C e ABE, donde ancora risulta che B e C sono di specie diversa. Fig.56

Or passiamo a risolvere i dodici casi, che i triangoli sferici obliquangoli ci offeriscono, prendendo i dati a tre a tre.

461. *Dati i tre lati, trovare un degli angoli.*

SOLUZIONE I. In un triangolo qualunque ABC, sia B l'angolo, che si cerca, e da uno degli altri due si cali una perpendicolare, come AD. Sarà (451), cos.AB : cos.AC :: cos.BD : cos.CD :: cos.BD : cos.(BC — BD) :: cos.BD : cos.BC cos.BD + sen.BC sen.BD :: (9) 1 : cos.BC + sen.BC tang.BD :: 1 : cos.BC + sen.BC cos.B tang.AB, (VI. 2ª). Dalla prima e dall'ultima ragione si cava Fig.53

$$\cos.B = \frac{\cos.AC - \cos.BC \cos.AB}{\text{sen}.BC \ \text{sen}.AB}.$$

Fig.53 Questa formola tradotta ai triangoli rettilinei con le regole (425) dà l'espressione (III. 70^a).

462. Se l'angolo cercato fosse A, calando la perpendicolare dall' angolo B, o dall' angolo C, si troverà, col metodo stesso,

$$\cos.A = \frac{\cos.BC - \cos.AB \ \cos.AC}{\text{sen}.AB \ \text{sen}.AC}.$$

Ma questa formola si ha senza fatica, permutando B in A, e A in B nella precedente.

Per l'uno o per l'altro modo si troverà similmente il valore analitico di cos.C.

Vagliano questi cenni anche per tutte le formole susseguenti.

463. SOLUZIONE II. Abbiamo (461), $1 - \cos.B = \frac{\text{sen}.BC \ \text{sen}.AB + \cos.BC \ \cos.AB - \cos.AC}{\text{sen}.BC \ \text{sen}.AB} = \frac{\cos.(BC \backsim AB) - \cos.AC}{\text{sen}.BC \ \text{sen}.AB} = \frac{2\,\text{sen}.\frac{1}{2}(AC - \overline{BC \backsim AB}) \times \text{sen}.\frac{1}{2}(AC + \overline{BC \backsim AB})}{\text{sen}.BC \ \text{sen}.AB}$, (II. 23^a). Dunque, si ponga $BC > AB$, o $AB > BC$, sarà sempre, (I. 7^a), $2\,\text{sen}.^2\frac{1}{2}B = \frac{2\,\text{sen}.\frac{1}{2}(AC + AB - BC) \ \text{sen}.\frac{1}{2}(AC + BC - AB)}{\text{sen}.BC \ \text{sen}.AB}$; e però

$$\text{sen}.\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\text{sen}.\frac{1}{2}(AC + AB - BC) \ \text{sen}.\frac{1}{2}(AC + BC - AB)}{\text{sen}.BC \ \text{sen}.AB}}.$$

Nelle formole, che danno il valore di mezzo l'arco cercato, non v' è mai incertezza circa la specie. Il detto valore è sempre minor di 90°, (397, 1°.), (398).

Questa formola (egualmente che le altre che saranno date dalla seconda soluzione nei seguenti problemi) è quella che s'impiega ordinariamente nel calcolo numerico.

464. SOLUZIONE III. Abbiamo, (461), $1 + \cos.B = \frac{\text{sen}.BC \,\text{sen}.AB - \cos BC \cos.AB + \cos.AC}{\text{sen}.BC \ \text{sen}.AB} = $ (II. 3^a) $\frac{\cos.AC - \cos.(BC + AB)}{\text{sen}.BC \,\text{sen}.AB} = \frac{2\,\text{sen}.\frac{1}{2}(BC + AB - AC) \times \text{sen}.\frac{1}{2}(BC + AB + AC)}{\text{sen}.BC \ \text{sen}.AB}$, (II. 23^a). Dunque (I. 24^a)

$$\cos.\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\text{sen}.\frac{1}{2}(BC + AB + AC) \ \text{sen}.\frac{1}{2}(BC + AB - AC)}{\text{sen}.BC \ \text{sen}.AB}}.$$

Questa formola, benchè il calcolo sia un tantino più breve,

è tuttavia meno usitata dell'antecedente, per le stesse ragioni accennate (233).

465. SOLUZIONE IV. Poichè (451), $\cos.AB : \cos.AC :: \cos.BD : \cos.CD$, sarà $\cos.AB + \cos.AC : \cos.AB \backsim \cos.AC :: \cos.BD + \cos.CD : \cos.BD \backsim \cos.CD$. Quindi (II. 13°), $\cot.\frac{1}{2}(AB + AC) : \tang.\frac{1}{2}(AB \backsim AC) :: \cot.\frac{1}{2}(BD + CD) : \tang.\frac{1}{2}(BD \backsim CD)$. Ponendo le tangenti in vece delle cotangenti, e BC in luogo di $BD + CD$, si ha

$$\tang.\tfrac{1}{2}(BD \backsim CD) = \tang.\tfrac{1}{2}(AB + AC)\ \tang.\tfrac{1}{2}(AB \backsim AC)\ \cot.\tfrac{1}{2}BC.$$

Questa formola fu trovata da Neper, ma per vie più laboriose, egualmente che le altre formole, che daremo nelle ultime soluzioni de' seguenti problemi. Si ha da essa il valor de' segmenti della base, o sia del lato, come BC, diviso dalla perpendicolare. Se questa cade fuori del triangolo, la formola dà veramente il valore di $\tang.\frac{1}{2}(BD + CD)$, e non quello di $\tang.\frac{1}{2}(BD \backsim CD)$; ma è inutile il far questa distinzione, giacchè facendo uso dell'ultima espressione per denotare il risultato della formola in tutti i casi, si ha sempre

$$\text{segmento maggiore} = \tfrac{1}{2}BC + \tfrac{1}{2}(BD \backsim CD), \text{ e}$$

$$\text{segmento minore} = \tfrac{1}{2}BC - \tfrac{1}{2}(BD \backsim CD).$$

Se $(AB + AC) > 180°$, $\tang.\frac{1}{2}(BD \backsim CD)$ sarà negativa: e però si piglierà il supplemento dell'arco $\frac{1}{2}(BD \backsim CD)$ dato dalle tavole, e s'impiegherà questo supplemento nelle due ultime equazioni. Da queste si avrà sempre il segmento maggiore adjacente al maggior dei due lati, il minore al minore; come si può dedur facilmente dall'analogia (451).

Conosciuti i segmenti della base, si prenderà quello adjacente all' angolo cercato, come BD nel caso nostro, e si avrà (VI. 5°)

$$\cos.B = \tang.BD\ \cot.AB.$$

Se il segmento, che s'impiega in questa equazione, è il minore,

Fig.53 si farà negativa (154) la sua tangente ogni volta che l'equazione precedente darà negativo e $< 90°$ il segmento minore. La giustezza di questa regola spicca facilmente nella sua applicazione, giacchè quando la perpendicolare cade di fuori, come nella fig. 54, l'ultima equazione, se non si cangia il segno di tang.BD, darebbe il valore di ABD, mentre l'angolo cercato è ABC. Ora la quantità, che chiamo (BD $\backsim$ CD), non può essere maggiore di BC, se non quando la perpendicolare cada di fuori, o quando si abbia il valor de' segmenti relativamente al supplemento della perpendicolare che cade di dentro (497).

Questa soluzione non è la più breve, ma serve a due problemi, poichè fa conoscere anche i segmenti della base.

466. *Dati i tre angoli, trovare un de' lati.*

SOLUZIONE I. Sia AB il lato cercato, e da una delle sue estremità, come A, si cali la perpendicolare AD. Sarà (452), cos.B : cos.C :: sen.BAD : sen.CAD :: sen.BAD : sen.(BAC — BAD). Procedendo come si fece (461), e mettendo cos.AB tang.B in luogo di cot.BAD, (VI. 3°), si troverà

$$\cos.AB = \frac{\cos.C + \cos.A \cos.B}{\text{sen}.A\ \text{sen}.B}.$$

Se si pone 1 in vece di cos.AB, (425), si avrà la formola (III.94°) de' triangoli rettilinei.

Se i tre angoli sono acuti, rimane positivo il segno di cos.AB. Ma AB può rappresentare generalmente ogni lato di un triangolo sferico. Dunque *in ogni triangolo sferico, se tutti gli angoli sono acuti, ogni lato è minor di* 90°. Risparmio questa specie di conclusioni, qualora non mi forniscono qualche applicazione utile, giacchè ora si cavano in un'occhiata dalle formole analitiche, mentre costavano in vece lunghe dimostrazioni alla Geometria antica. Si può vedere gran numero di proposizioni di questo genere nelle Opere intitolate (*Menelaï sphaericorum*, e *Regiomontani de Triangulis*).

467. Soluzione II. (466), $1 - \cos.AB = \frac{\text{sen.}A\,\text{sen.}B - \cos.A\cos.B - \cos C}{\text{sen.}A\ \text{sen.}B}$

$$= \frac{-\cos.(A+B) - \cos.C}{\text{sen.}A\ \text{sen.}B} = -\frac{2\cos.\frac{1}{2}(A+B+C) \times \cos.\frac{1}{2}(\overline{A+B} \backsim C)}{\text{sen.}A\ \text{sen.}B}$$

(II. 19ª). Dunque (I. 7ª)

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}AB = \sqrt{-\frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\ \cos.\frac{1}{2}(\overline{A+B} \backsim C)}{\text{sen.}A\ \text{sen.}B}}.$$

Il segno — divien positivo in tutti i casi, perchè $\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)$ è sempre negativo (405, 42), e sarebbe facile dimostrare che l'altro coseno è sempre positivo.

Questa formola non può tradursi ai triangoli rettilinei, poichè ripugna alla natura di essi, che un lato sia determinato dalla sola cognizione degli angoli.

468. Soluzione III. (466), $1 + \cos.AB = \frac{\cos C + \cos.A\cos.B + \text{sen.}A\,\text{sen.}B}{\text{sen.}A\ \text{sen.}B}$

$$= \frac{\cos.C + \cos.(A \backsim B)}{\text{sen.}A\ \text{sen.}B} = \frac{2\cos.\frac{1}{2}(C + \overline{A \backsim B})\ \cos.\frac{1}{2}(C \backsim \overline{A \backsim B})}{\text{sen.}A\ \text{sen.}B}, \text{ (II. 19ª)}.$$

Dunque (I. 24ª)

$$\cos.\tfrac{1}{2}AB = \sqrt{\frac{\cos.\frac{1}{2}(C + \overline{A \backsim B})\ \cos.\frac{1}{2}(C \backsim \overline{A \backsim B})}{\text{sen.}A\ \text{sen.}B}}.$$

469. Soluzione IV. Trattando la proporzione (452), $\cos.B : \cos.C :: \text{sen.}BAD : \text{sen.}CAD$, nel modo adoperato (465), si avrà (II. 13ª, 12ª), $\cot.\frac{1}{2}(B+C) : \text{tang.}\frac{1}{2}(C \backsim B) :: \text{tang.}\frac{1}{2}(BAD + CAD) : \text{tang.}\frac{1}{2}(BAD \backsim CAD)$, o vero, ponendo A in vece di $BAD + CAD$,

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(BAD \backsim CAD) = \text{tang.}\tfrac{1}{2}A\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}(C \backsim B)\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}(C+B).$$

Con questa formola, si ha il valore de' segmenti dell' *angolo verticale* (242). Tenendo la stessa espressione nel primo membro per tutti i casi, come abbiam fatto (465), si ha sempre

$$\text{segmento maggiore} = \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}(BAD \backsim CAD);$$
$$\text{segmento minore} = \tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}(BAD \backsim CAD).$$

Poichè al maggior di due archi corrisponde il coseno più piccolo,

Fig.53 ed il seno più grande (formando sempre le regole (459) sugli archi minori di 90°), deduco dalla proporzione (452), che il minor dei due angoli sulla base, e il segmento maggiore dell'angolo verticale si troveranno sempre adjacenti a uno stesso lato, e che all'altro per conseguenza saranno adjacenti il maggior dei due angoli e il minor de' segmenti; posto sempre che nel calcolare la formola data quì sopra si abbia riguardo al segno di tang.$\frac{1}{2}$(C + B). Quindi prendendo il segmento adjacente al lato cercato, si avrà (VI. 15ª)

$$\cos.AB = \cot.B \ \cot.BAD.$$

Quando il segmento minore risulterà negativo e $< 90°$, s'impiegherà negativa in questa formola la cotangente del detto segmento (154).

470. *Dati due lati, e l'angolo compreso, trovare uno degli altri due angoli.*

SOLUZIONE I. Si chiamino BC, AC, e C le cose note, B la cercata, e si cali dal terzo angolo A la perpendicolare AD. Sarà (450), tang.B : tang.C :: sen.CD : sen.BD :: sen.CD : sen.(BC — CD) :: 1 : sen.BC cot.CD — cos.BC :: 1 : sen.BC $\times \frac{\cot.AC}{\cos.C}$ — cos.BC, (VI. 2ª). Dalla prima e dall'ultima ragione si cava

$$\text{tang.}B = \frac{\text{sen.}C}{\text{sen.}BC \ \cot.AC - \cos.BC \ \cos.C}.$$

Questa formola (in cui entra la cotangente di un lato, e il coseno di un altro) si traduce ai triangoli rettilinei con le regole date (425), e si riduce alla (III. 78ª). Lo stesso si dica della formola seguente, la qual si riduce alla 77ª.

471. Se i dati fossero AB, AC, e BAC, permutando in questa formola C in A, e A in C, o pur calando la perpendicolare sul lato AB, e procedendo collo stesso metodo come sopra, si troverà un altro valore di tang.B, cioè

$$\text{tang.}B = \frac{\text{sen.}A}{\text{sen.}AB \ \cot.AC - \cos.AB \ \cos.A}.$$

472.

472. SOLUZIONE II. Siano ancora BC, AC e C le cose note; B la cercata; e la perpendicolare AD. Si avrà

$$1^\circ.\ \text{tang.CD} = \text{cos.C tang.AC},\ (\text{VI. } 2^\circ);$$
$$2^\circ.\ \text{BD} = \text{BC} - \text{CD};$$
$$3^\circ.\ \text{tang.B} = \frac{\text{tang.C sen.CD}}{\text{sen.BD}},\ (450).$$

Il segmento CD della base, che si trova con la 1ª equazione, si chiama segmento *primo* : l'altro BD, dato dalla 2ª, si chiama segmento *secondo*. Se questo risulta negativo, sicchè sia CD > BC, s'impiegherà sen.BD negativo (154) nella 3ª formola.

Fu dato per regola di prender la somma di BC e di CD, per aver BD, quando l'angolo dato C sia ottuso. Ma 1°. se l'angolo cercato B fosse pure ottuso, la perpendicolare cadrebbe dentro del triangolo (460); e tosto si vede nella fig. 53, che in tal caso questa regola non sarebbe giusta : 2°. non ha essa mai luogo, se si osservano (459) le regole de'segni nel calcolar le equazioni date quì sopra.

473. SOLUZIONE III. Siano le cose note AB, AC, BAC; e però le cercate B o C. Calando la perpendicolare AD dall' angolo noto A, si avrà (453), tang.AB : tang.AC :: cos.CAD : cos.BAD; e per conseguenza (II. 10°, 13°), sen.(AB + AC) : sen.(AB ∽ AC) :: cot.½(CAD + BAD) : tang.½(BAD ∽ CAD). Ponendo BAC, o A, in vece di CAD + BAD, si ha

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(\text{BAD} \backsim \text{CAD}) = \text{cot.}\tfrac{1}{2}\text{A} \times \frac{\text{sen.(AB} \backsim \text{AC)}}{\text{sen.(AB + AC)}}.$$

Da questa formola si deduce il valore de' segmenti dell' angolo dato A; giacchè usando una stessa espressione per tutti i casi, come ho detto (465), si ha sempre

$$\text{segmento maggiore} = \tfrac{1}{2}\text{A} + \tfrac{1}{2}(\text{BAD} \backsim \text{CAD});$$
$$\text{segmento minore} = \tfrac{1}{2}\text{A} - \tfrac{1}{2}(\text{BAD} \backsim \text{CAD}).$$

L'analogia (453) fa vedere, che il segmento maggiore è adjacente al lato maggiore, il minore al minore, posto sempre che si abbia

Fig.53 riguardo nella formola precedente al segno di sen.(AB + AC). Si ha quindi (VI. 3°)

$$\cot.B = \tan g.BAD \cos.AB, \text{ e}$$
$$\cot.C = \tan g.CAD \cos.AC.$$

In queste formole s'impiegherà negativa (154) la tangente del segmento minore, quando esso risulti negativo e $< 90°$.

474. SOLUZIONE IV. Ferme le condizioni della soluzion precedente, si prenda l'analogia (447), sen.AB : sen.AC :: sen.C : sen.B, e si avrà in primo luogo (II. 12°) la seguente, che è utile in molti casi:

(P)... $\tan g.\frac{1}{2}(AB + AC) : \tan g.\frac{1}{2}(AB \backsim AC) :: \tan g.\frac{1}{2}(C + B) : \tan g.\frac{1}{2}(C \backsim B)$.

Si sostituisca il valore di $\tan g.\frac{1}{2}(C + B)$ dato dalla prima equazione (469), e si avrà $\tan g.\frac{1}{2}(AB + AC) : \tan g.\frac{1}{2}(AB \backsim AC) :: \cot.\frac{1}{2}A \tan g.\frac{1}{2}(BAD \backsim CAD) : \tan g.^2 \frac{1}{2}(C \backsim B)$. Si moltiplichi, termine a termine, questa analogia con la seconda (473) espressa come segue, (I. 6°), $2\,\text{sen}.\frac{1}{2}(AB + AC) \cos.\frac{1}{2}(AB + AC) : 2\,\text{sen}.\frac{1}{2}(AB \backsim AC) \cos.\frac{1}{2}(AB \backsim AC) :: \cot.\frac{1}{2}A : \tan g.\frac{1}{2}(BAD \backsim CAD)$, e dividendo la 1ª ragione per 2, e la 2ª per $\tan g.\frac{1}{2}(BAD \backsim CAD)$, il risultato sarà $\text{sen}.^2 \frac{1}{2}(AB + AC) : \text{sen}.^2 \frac{1}{2}(AB \backsim AC) :: \cot.^2 \frac{1}{2}A : \tan g.^2 \frac{1}{2}(C \backsim B)$. Estraendo le radici, si ottien finalmente

$$\tan g.\tfrac{1}{2}(C \backsim B) = \cot.\tfrac{1}{2}A \times \frac{\text{sen}.\frac{1}{2}(AB \backsim AC)}{\text{sen}.\frac{1}{2}(AB + AC)}.$$

Questa equazione fa conoscere la semidifferenza degli angoli ignoti. Per avere il valore assoluto di essi, fa mestieri trovare anche quello della mezza somma. Per ciò si sostituisca nella stessa equazione il valore di $\tan g.\frac{1}{2}(C \backsim B)$ dato dall'analogia (P); e, riducendo, si avrà

$$\tan g.\tfrac{1}{2}(C + B) = \cot.\tfrac{1}{2}A \times \frac{\cos.\frac{1}{2}(AB \backsim AC)}{\cos.\frac{1}{2}(AB + AC)}.$$

475. Le due precedenti formole Neperiane sono degne di alcune riflessioni su la loro utilità. 1°. Per calcolarle non si hanno da

cercare che sette logaritmi, e fanno conoscere due angoli ad un tratto, che è un vantaggio considerabile in certi casi (755, &c.). Con egual numero di logaritmi, dalla seconda e dalla terza soluzione (la prima sarebbe più laboriosa) non si ha che il valore di un angolo solo. 2°. L'una o l'altra di dette formole è la più breve che possa impiegarsi, *dati due lati e i due angoli opposti, per trovare il terzo angolo*, come è facile vedere, supponendo incognito l'angolo A. 3°. Dalla seconda ricavo la seguente bella proprietà de' triangoli sferici, utilissima per diminuire i casi dubbj.

Poichè $\text{tang.}\frac{1}{2}(C + B)$ e $\cos.\frac{1}{2}(AB + AC)$ hanno il medesimo segno nella formola, e che le altre due quantità non possono essere mai negative (397, 1°.), (398), ne segue che *in ogni triangolo sferico la mezza somma di due lati è della medesima specie che la mezza somma dei due angoli opposti.*

476. *Dati due lati, e l'angolo compreso, trovare il terzo lato.*

Soluzione I. Si chiamino AB, BC, e B le cose note; AC sarà la cercata. Dalla formola (461) si cava

$$\cos.AC = \cos.BC \cos.AB + \text{sen.}BC \text{ sen.}AB \cos.B.$$

477. Soluzione II. Si consideri calata una perpendicolare, come AD, sopra uno de' lati dati, e si avrà

$$1°.\ \text{tang.}BD = \text{tang.}AB \cos.B,\ (\text{VI. } 2^a);$$

$$2°.\ CD = BC \backsim BD;$$

$$3°.\ \cos.AC = \cos.AB \times \frac{\cos.CD}{\cos.BD},\ (451).$$

Ho impiegato $\backsim$ in vece di — nella 2ª equazione, perchè quando la medesima desse CD negativo, non per questo cos.CD cangierebbe di segno (154).

478. Soluzione III. Se il lato cercato è piccolo, non potrà aversi con esattezza per mezzo del coseno. In vece delle soluzioni precedenti, gioverà in tal caso ricorrere a quella che segue.

Poichè (463), $2\,\text{sen.}^2 \frac{1}{2}B = \frac{\cos.(BC \backsim AB) - \cos.AC}{\text{sen.}BC\ \text{sen.}AB}$, sarà (I. 22ª)

Fig. 53 $2\text{sen.}^2\frac{1}{2}B\ \text{sen.}BC\ \text{sen.}AB = 2\text{sen.}^2\frac{1}{2}AC - 2\text{sen.}^2\frac{1}{2}(BC \backsim AB)$.
E per conseguenza

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}AC = \sqrt{(\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}\overline{BC \backsim AB} + \text{sen.}BC\ \text{sen.}AB\ \text{sen.}^2\tfrac{1}{2}B)},$$

o vero, per più comodo nel calcolo,

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}AC = \text{sen.}\tfrac{1}{2}(BC \backsim AB)\sqrt{\left(1 + \frac{\text{sen.}BC\ \text{sen.}AB\ \text{sen.}^2\frac{1}{2}B}{\text{sen.}^2\frac{1}{2}(BC \backsim AB)}\right)}.$$

Questa formola può calcolarsi con le sole tavole trigonometriche in logaritmi, dividendola (207) in due, come segue:

$$\text{tang.}a = \frac{\text{sen.}\frac{1}{2}B}{\text{sen.}\frac{1}{2}(BC \backsim AB)}\sqrt{\text{sen.}BC\ \text{sen.}AB};$$

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}AC = \frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(BC \backsim AB)}{\cos.a}.$$

479. Il presente problema non può risolversi immediatamente con una formola analoga alle Neperiane: ma, dopo aver trovato uno degli angoli ignoti con le soluzioni (473) o (474), bisognerebbe impiegare la soluzione (492) per trovare il lato cercato.

480. *Dati due angoli, e il lato compreso, trovare uno degli altri due lati.*

SOLUZIONE I. Siano A, C, AC le cose note, AB la cercata, e si cali sopra il terzo lato la perpendicolare AD. Sarà (453), tang.AB : tang.AC :: cos.CAD : cos.BAD :: cos.CAD : cos.(BAC — CAD) :: 1 : cos.BAC + sen.BAC tang.CAD :: 1 : cos.A + sen.A $\times \frac{\cot.C}{\cos.AC}$, (VI. 3°). Dalla prima e dall' ultima ragione si cava

$$\text{tang.}AB = \frac{\text{sen.}AC}{\text{sen.}A\ \cot.C + \cos.A\ \cos.AC}.$$

481. Se i dati fossero B, C, BC, procedendo nel modo stesso, o vero permutando, nella formola ora trovata, A in B, e B in A, si avrà un altro valore di tang.AB, cioè

$$\text{tang.}AB = \frac{\text{sen.}BC}{\text{sen.}B\ \cot.C + \cos.B\ \cos.BC}.$$

Questa e la precedente formola si traducono (425) a quelle de' triangoli rettilinei (III. 4°, 3°).

482. Soluzione II. Ferme le condizioni (480), si ha

1°. $\cot.CAD = \tang.C \cos.AC$, (VI. 3°);

2°. $BAD = A \backsim CAD$, (477);

3°. $\tang.AB = \tang.AC \times \frac{\cos.CAD}{\cos.BAD}$, (453).

483. Soluzione III. Siano B, C, BC le cose note, e si consideri la perpendicolare AD sopra il lato dato. Si ha (450), $\tang.B : \tang.C :: \sen.CD : \sen.BD$. E però (II. 10°, 12°), $\sen.(B + C) : \sen.(B \backsim C) :: \tang.\frac{1}{2}(CD + BD) : \tang.\frac{1}{2}(CD \backsim BD)$, ovvero

$$\tang.\tfrac{1}{2}(CD \backsim BD) = \tang.\tfrac{1}{2}BC \times \frac{\sen.(B \backsim C)}{\sen.(B + C)}.$$

Per il caso, in cui la perpendicolare cada di fuori del triangolo, questa formola viene cangiata da accreditato Autore come segue, $\cot.\frac{1}{2}(BD + CD) = \cot.\frac{1}{2}BC \times \frac{\sen.(B - C)}{\sen.(B + C)}$. Ogni esempio numerico basterebbe per riconoscer la falsità di questa formola. Ma per dimostrar ciò analiticamente, ad esercizio e cautela de' principianti, si rammenti che se la perpendicolare cade di fuori, gli angoli sopra il lato noto devono esser di specie diversa (460). Sia dunque qual più si voglia, per esempio C, l'angolo ottuso; la proporzione (450) sarà in tal caso $\tang.B : -\tang.C :: \sen.CD : \sen.BD$. E però $\tang.B + (-\tang.C) : \tang.B - (-\tang.C) :: \sen.CD + \sen.BD : \sen.CD - \sen.BD :: \tang.B - \tang.C : \tang.B + \tang.C$. L'ultima analogia, trasformata secondo le formole (II. 12°, 10°), diviene $\tang.\frac{1}{2}(CD + BD) : \tang.\frac{1}{2}(CD - BD) :: \sen.(B - C) : \sen.(B + C)$. Mettendo BC in luogo di $CD - BD$, come conviene (fig. 54) quando la perpendicolare cade di fuori, si ha $\tang.\frac{1}{2}(CD + BD) = \tang.\frac{1}{2}BC \times \frac{\sen.(B - C)}{\sen.(B + C)}$; che è la formola stessa che ho dato quì sopra, salvo il segno fra CD e BD, del quale ho avvertito (465).

Si hanno dunque i segmenti del lato noto in tutti i casi, come segue:

segmento maggiore $= \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}(CD \backsim BD)$;

segmento minore $= \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}(CD \backsim BD)$.

Nell' analogia (450) si vede, che l'angolo maggiore è adjacente al segmento minore, e l'angolo minore al segmento maggiore; posto sempre che si abbia riguardo al segno di $\text{sen.}(B + C)$ nel calcolare la formola trovata quì sopra. Quindi prendendo il segmento adjacente al lato cercato, si avrà (VI. 10°)

$$\text{cot.}AB = \text{cot.}BD \ \text{cos.}B, \text{ e}$$

$$\text{cot.}AC = \text{cot.}CD \ \text{cos.}C.$$

In queste formole s'impiegherà negativa (154) la cotangente del segmento minore, quando esso risulti negativo e $< 90°$.

484. SOLUZIONE IV. Procedendo come feci (474), si sostituisca nell' analogia (P) il valore di $\text{tang.}\frac{1}{2}(AB + AC)$ preso dalla 1ª equazione (465), e si avrà $\text{tang.}\frac{1}{2}(BD \backsim CD)\,\text{tang.}\frac{1}{2}BC : \text{tang.}^2\frac{1}{2}(AB \backsim AC) :: \text{tang.}\frac{1}{2}(C + B) : \text{tang.}\frac{1}{2}(C \backsim B)$. Ma $\text{tang.}\frac{1}{2}(CD \backsim BD) = \text{tang.}\frac{1}{2}BC \times \frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(B \backsim C)\ \text{cos.}\frac{1}{2}(B \backsim C)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(B + C)\ \text{cos.}\frac{1}{2}(B + C)}$ (483). Ponendo questo valore nell' analogia precedente, ed estraendo le radici, si avrà

$$\text{tang.}\frac{1}{2}(AB \backsim AC) = \text{tang.}\frac{1}{2}BC \times \frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(C \backsim B)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(C + B)}.$$

Sostituendo in questa equazione il valore di $\text{tang.}\frac{1}{2}(AB \backsim AC)$ preso dall' analogia (P), si avrà inoltre

$$\text{tang.}\frac{1}{2}(AB + AC) = \text{tang.}\frac{1}{2}BC \times \frac{\text{cos.}\frac{1}{2}(C \backsim B)}{\text{cos.}\frac{1}{2}(C + B)}.$$

Con queste due belle ed utili formole si trovano ad un colpo ambi i lati ignoti. Ognuna di esse è poi la più breve, che possa impiegarsi, *dati due lati e i due angoli opposti, per trovare il terzo lato*, come è facile vedere, supponendo BC ignoto.

485. *Dati due angoli, e il lato compreso, trovare il terzo angolo.*

SOLUZIONE I. Se si chiamano A, B, AB, le cose note, dalla formola (466) si cava

$$\text{cos.}C = \text{cos.}AB \ \text{sen.}A \ \text{sen.}B - \text{cos.}A \ \text{cos.}B.$$

486. Soluzione II. Da uno degli angoli dati calando una perpendicolare, come AD, si ha

$$1^{\circ}.\ \cot.BAD = \cos.AB\ \tang.B,\ (VI.\ 3^{a});$$

$$2^{\circ}.\ CAD = A - BAD;$$

$$3^{\circ}.\ \cos.C = \cos.B \times \frac{\text{sen}\ CAD}{\text{sen}.BAD},\ (452).$$

Se la 2ª equazione dà CAD negativo, s'impiegherà sen.CAD negativo nella 3ª, (154).

Tanto in questa soluzione, quanto nella (482), La Caille (*Éléments d'Astron. Traité prélimin.*) prescrive di prender la somma o la differenza dell'angolo verticale, e del segmento di esso dato dalla prima equazione, per avere il secondo segmento; dico, *la somma, o la differenza*, *secondo la posizione della perpendicolare.* Or la somma non si deve prender mai, sia che la perpendicolare cada dentro, o fuor del triangolo, giacchè le regole date dal medesimo Autore, circa la specie del primo segmento, suppongono la perpendicolare dalla parte opposta all' angolo dato che s'impiega nella prima equazione, e non dalla parte opposta al supplemento dell' angolo stesso. Dico *date da lui medesimo*, essendo evidente, che la sua tavola per la risoluzione de' triangoli rettangoli, al n°. 118, contiene errore ove dice: *l'angolo cercato è* $<$ 90° *se l'ipotenusa è* $<$ 90°; e che deve leggersi in vece: *se l'ipotenusa e l'angolo dato sono della stessa specie.* Così ha corretto questa regola il Sig. Ab. Marie, e così essa divien conforme alle altre regole analoghe della tavola di La Caille, e sopra tutto a quella del n°. 121, dove il caso è lo stesso che al n°. 118, mutate soltanto le lettere.

487. Soluzione III. Se l'angolo cercato è piccolo, non si potrà averlo con esattezza dalle due soluzioni precedenti. Ma, poichè (467), $2\,\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}AB\ \text{sen}.A\ \text{sen}.B = -\cos.(A+B) - \cos.C = 1 - 2\cos.^2\tfrac{1}{2}(A+B) - 1 + 2\,\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}C$, (I. 23ª, 22ª), risulta

$$\text{sen}.\tfrac{1}{2}C = \sqrt{(\cos.^2\tfrac{1}{2}\overline{A+B} + \text{sen}.A\ \text{sen}.B\ \text{sen}.^2\tfrac{1}{2}AB)};$$

o vero, per maggior comodo nel calcolo,

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}C = \cos.\tfrac{1}{2}(A + B)\sqrt{\left(1 + \frac{\text{sen.A sen.B sen.}^2\tfrac{1}{2}AB}{\cos.^2\tfrac{1}{2}(A+B)}\right)};$$

o pure (207), per fare uso delle sole tavole trigonometriche in logaritmi,

$$\text{tang.}a = \frac{\text{sen.}\tfrac{1}{2}AB}{\cos.\tfrac{1}{2}(A+B)}\sqrt{\text{sen.A sen.B}};\ \text{e}$$

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}C = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(A+B)}{\cos.a}.$$

Manca quì pure la soluzione di Neper; ma, volendo fare uso delle analogie di questo Autore, converrebbe trovare un de' lati ignoti con le soluzioni (483), o (484), indi ricorrere alla seguente per avere il terzo angolo.

488. *Dati due lati, e l'angolo opposto all'un d'essi, trovar l'angolo opposto all'altro.* (Non si ha che una soluzione di questo problema, e di ognuno dei cinque che vengono dopo. Questi sei casi sono *dubbj*, come vedremo).

Se si chiamano AB, AC, B, le cose note, sarà C la cercata; e si avrà (447)

$$\text{sen.C} = \frac{\text{sen.AB sen.B}}{\text{sen.AC}}.$$

In questo problema la specie dell' angolo C è dubbia. Si dimostra, come nella Trigonometria rettilinea (225), che quest' angolo ha due valori, e così le altre parti ignote del triangolo. Ne' triangoli sferici il dubbio è tolto, nella maggior parte de' casi, dalla regola (475), che può enunciarsi come segue. *Secondo che la somma de' lati dati è maggiore, uguale, o minore di* 180°, *la somma degli angoli opposti è similmente maggiore, uguale, o minore di* 180°.

Se, in vece di conoscere un angolo, si conoscesse la somma, o la differenza degli angoli opposti ai lati dati, il valore d'ognuno degli angoli stessi si troverebbe col mezzo dell' analogia (P), (474).

489.

489. *Dati due lati, e l'angolo opposto ad uno di essi, trovar l'angolo fra essi compreso.*

Se si chiamano AB, AC, B le cose note, sarà A la cercata. Da quest'angolo calando la perpendicolare AD, si avrà

1°. $\cot.BAD = \cos.AB \tan g.B$, (VI. 3°);
2°. $\cos.CAD = \cos.BAD \times \frac{\tan g.AB}{\tan g.AC}$, (453);
3°. $BAD \pm CAD = A$.

Il segno + ha luogo, quando la perpendicolare cade di dentro; il segno —, quando cade di fuori. E però (460) *si prenderà la somma de' segmenti dell'angolo cercato, quando gli altri due angoli sono della medesima specie fra essi; la differenza, quando la specie degli angoli stessi è diversa.* Donde si vede, che il caso presente è ambiguo, ogni volta che lo è il precedente.

Nondimeno, senza cercare la specie dell'angolo C, basterà a determinare quella dell'angolo A la regola seguente, che piglio nell'eccellente Trigonometria sferica del Sig. Ab. Boscovich: *Se la somma de' segmenti $>$ 180°, si prenda la differenza; se la differenza è negativa, si prenda la somma.*

La Caille prescrive di prender la somma de' segmenti, quando *i lati dati* sono della medesima specie fra essi. L'autorità di un uomo sì perito, e sì accurato, ha fatto che il Sig. Ab. Marie, ed altri rispettabili Autori prendano da lui questa regola senza esame. Importa dunque mettere in chiaro l'error della stessa, perchè non si diffonda più oltre.

Sia un triangolo ACD, rettangolo in D, composto da tre archi, minori ciascuno di 90°, e per conseguenza (420) cogli angoli obliqui ambi acuti. Da uno di questi, come A, si tiri dentro del triangolo un arco AB, il qual divida, comunque, in due parti il lato opposto CD. Sarà BD $<$ CD, e però BD $<$ 90°. Ma (451), cos.BD : cos.CD :: cos.AB : cos.AC. Dunque, essendo AC $<$ 90° per ipotesi, risulta da questa analogia che AB è $<$ 90°; e però Fig.54

L l

AB, AC sono della medesima specie. Ma nel triangolo obliquangolo ABC i segmenti dell'angolo A, prodotti dall'arco AD perpendicolare sul lato opposto, sono CAD, BAD; ed è visibilmente BAC = CAD — BAD. Dunque dall'esser due lati della medesima specie non segue che l'angolo fra essi compreso sia composto dalla somma de' suoi segmenti: e per conseguenza la regola di La Caille non può reggere.

490. *Dati due lati, e l'angolo opposto ad uno di essi, trovare il terzo lato.*

Fig.53 Si chiamino AB, AC, B le cose note, e si cali sopra il lato cercato BC la perpendicolare AD. Sarà

$$1^{\circ}.\ \text{tang.BD} = \text{tang.AB cos.B},\ (\text{VI. } 2^{\circ});$$

$$2^{\circ}.\ \text{cos.CD} = \text{cos.BD} \times \frac{\text{cos.AC}}{\text{cos AB}},\ (451);$$

$$3^{\circ}.\ \text{BD} \pm \text{CD} = \text{BC}.$$

Per prender la somma, o la differenza de' segmenti della base, si osserveranno le stesse regole che abbiamo date (489) per li segmenti dell' angolo verticale.

Anche in questo caso fu detto doversi prender la somma, quando *i due lati dati* sono della medesima specie. Ne seguirebbe che, quando due lati sono della stessa specie, la perpendicolare sul terzo cade *sempre* dentro del triangolo; ed io ho dimostrato or ora il contrario (489).

491. Se il seno, o coseno, trovato in alcuno dei tre precedenti problemi, fosse molto grande, sicchè l'arco non si potesse avere con la precisione desiderata, si avrebbe ricorso ad un altro dei tre problemi, cioè a quello, nel quale il seno, o coseno cercato fosse men grande; ed allora, conoscendo quattro parti del triangolo, si varierebbero i dati, per trovare quella che si cerca col mezzo di alcuno de' problemi che precedono gli ultimi tre. Tutto questo s'intenderà similmente per li tre seguenti.

492. *Dati due angoli, e il lato opposto all' un d'essi, trovare il lato opposto all' altro.*

Siano B, C, AC, i dati, sarà AB il quesito; e si avrà (447)

$$\text{sen.AB} = \text{sen.AC} \times \frac{\text{sen.C}}{\text{sen.B}}.$$

Secondo che la somma degli angoli dati è maggiore, uguale, o minore di 180°, *la somma de' lati opposti è similmente maggiore, uguale, o minore di* 180°, (475).

Se questa regola, o se le cognizioni estrinseche non bastano a togliere il dubbio sopra la specie del lato cercato in questo problema, sarà impossibile determinare il valore delle altre parti ignote del triangolo, che sono lo scopo dei due problemi che seguono. Regiomontano, che ben comprese l'ambiguità de' problemi (488 a 490), ha dato questo e i due seguenti, come determinati in tutti i casi (*de Triangulis, Lib.* 4. *prop.* 29 *et* 32). Diviene però necessario il mostrare che non lo sono.

Per ciò siano dati il lato NK, e gli angoli NAK, ed ANK. Supponendo KN obliquo sopra AN, sempre che un arco KL = KN potrà cadere dall' angolo ignoto K sopra il lato opposto, è chiaro che le soluzioni, di cui si tratta, saranno ambigue, nè si potrà discerner, colla Trigonometria, se i dati appartengano al triangolo ANK, o pure al triangolo BLK, poichè A = B, (388), KN = KL per l'ipotesi, e ANK = BLK, (411). Fig. 45

Se, in vece di conoscere un lato, si conoscesse la somma, o la differenza de' lati opposti agli angoli dati, il valore di ognuno dei detti lati si troverebbe, col mezzo dell' analogia (P), (474).

493. *Dati due angoli, e il lato opposto all' un d'essi, trovare il lato, sopra cui giacciono.*

Tenendo i dati B, C, AC, e calando la perpendicolare AD sopra il lato cercato BC, si ha Fig. 53

1°. tang.CD = tang.AC cos.C, (VI. 2ª);

2°. sen.BD = sen.CD $\times \frac{\text{tang.C}}{\text{tang.B}}$, (450);

3°. CD ± BD = BC.

Fig.53 La specie di BD è sempre dubbia, quando sia dubbia quella di AB nel problema precedente. Conoscendo la specie di AB, si determina quella di BD con l'analogia (451), cos.AC : cos.CD :: cos.AB : cos.BD, che dà la regola seguente : *Secondo che i lati opposti agli angoli dati sono fra loro della stessa, o di contraria specie, i segmenti del lato cercato sono fra loro della stessa, o di contraria specie.*

Nella 3ª equazione si prenderà sempre la somma, quando gli angoli dati sono della medesima specie; la differenza, nel caso di specie diversa. Questa sola regola basterà spesso, sperimentando il maggiore dei due valori di BD, o sia del secondo segmento, come prescrive il Sig. Ab. Boscovich. Se nel caso della somma si ha BC $>$ 180°, o se nel caso della differenza si ha BC negativo, il secondo segmento è sempre minor di 90°.

494. *Dati due angoli, e il lato opposto all'un d'essi, trovare il terzo angolo.*

Posti i dati come sopra, A è l'angolo cercato; e si ha

$$1^{\circ}.\ \text{cot.CAD} = \text{cos.AC tang.C},\ (\text{VI. } 3^{a});$$

$$2^{\circ}.\ \text{sen.BAD} = \text{sen.CAD} \times \frac{\text{cos.B}}{\text{cos.C}},\ (452);$$

$$3^{\circ}.\ \text{CAD} \pm \text{BAD} = \text{A}.$$

Previa la cognizione della specie di AB, (492), si determina quella di BAD, coll'analogia (453), tang.AB : tang.AC :: cos.CAD : cos.BAD. Del resto si applicheranno ai segmenti dell'angolo verticale tutte le regole del problema precedente, relative ai segmenti della base.

495. Ho riunito nella tavola VII tutte le soluzioni *analitiche*, così chiamate, perchè in una sola equazione contengono il valore completo d'una linea trigonometrica appartenente ad alcuna delle parti di un triangolo sferico; il qual valore per conseguenza si può sostituire nelle operazioni analitiche con vasta utilità. Le formole 5ª, 7ª, 9ª, 12ª, 15ª, 16ª, 23ª, 28ª, 29ª, 35ª, 36ª sono dimostrate agli articoli 488, 462, 461, 485, 470, 471, 492, 476, 466,

480, 481. Tutte le altre formole sono cavate da queste, con la permutazione delle lettere (462).

Questa tavola si può ampliare, come la III, fino ad avere dieci valori per ogni linea trigonometrica. Io non l'ho fatto, a cagione che diverse espressioni sono troppo complicate. In caso di bisogno, sarà facile formarle nel modo seguente. Oltre i due valori, per esempio, di sen.A, che dà la tavola VII, se ne trovano altri quattro, pigliando in essa i due valori di cos.A e sostituendoli nella formola (I. 3ª), e i due valori di tang.A e sostituendoli nella formola (I. 5ª). Gli altri quattro valori di sen.A sono men facili da trovare, convenendo tirarli dalle soluzioni trigonometriche de' casi dubbj (489, 494). Ne cercherò uno per norma.

Essendo dati due angoli, e un lato opposto, come B, C, AC, *si dimanda l'espressione analitica del seno del terzo angolo,* o sia di sen.A. Questo è il caso della soluzione (494), nella quale, cominciando dalla 3ª equazione, e ponendo gli angoli dati della stessa specie (459), si ha $\text{sen.A} = \text{sen.(CAD} + \text{BAD)} = \text{sen.CAD} \times \text{cos.BAD} + \text{cos.CAD sen.BAD}$. Conviene eliminare BAD col mezzo della 2ª equazione (494), osservando che $\text{cos.BAD} = \sqrt{(1 - \text{sen.}^2\,\text{BAD})}$. Si ha dunque $\text{sen.A} = \text{sen.CAD} \times \sqrt{\left(1 - \text{sen.}^2\,\text{CAD} \times \frac{\text{cos.}^2\,\text{B}}{\text{cos.}^2\,\text{C}}\right)} + \text{cos.CAD sen.CAD} \times \frac{\text{cos.B}}{\text{cos.C}}$. Resta ora da scacciare CAD col mezzo della 1ª, (494), avvertendo, che $\text{sen.CAD} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \text{cot.}^2\,\text{CAD})}}$, (I. 4ª), e $\text{cos.CAD} = \frac{\text{cot.CAD}}{\sqrt{(1 + \text{cot.}^2\,\text{CAD})}}$, (I. 20ª). Prendendo il valore di cot.CAD, (494), e ponendolo in queste due equazioni, si sostituiranno poi nella precedente questi valori di sen.CAD, e cos.CAD, e si avrà $\text{sen.A} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \text{tang.}^2\,\text{C cos.}^2\,\text{AC})}} \times \sqrt{\left(1 - \frac{\text{cos.}^2\,\text{B}}{\text{cos.}^2\,\text{C} + \text{sen.}^2\,\text{C cos.}^2\,\text{AC}}\right)} + \frac{\text{cos.B}}{\text{cos.C}} \times \frac{\text{tang.C cos.AC}}{\sqrt{(1 + \text{tang.}^2\,\text{C cos.}^2\,\text{AC})}} \times \frac{1}{\sqrt{(1 + \text{tang.}^2\,\text{C cos.}^2\,\text{AC})}}$. Ottenuta l'espressione desiderata, or convien procurare di simplificarla. Si ponga dappertutto $\frac{\text{sen.}^2\,\text{C}}{\text{cos.}^2\,\text{C}}$ in vece di tang^2C, $1 - \text{sen.}^2\text{AC}$ in vece di

$\cos.^2 AC$, indi 1 in vece di $\cos.^2 C + \text{sen.}^2 C$, e $\text{sen.}^2 B$ in vece di $1 - \cos.^2 B$; e si avrà finalmente

$$\text{sen.} A = \frac{\cos.C \sqrt{(\text{sen.}^2 B - \text{sen.}^2 C \, \text{sen.}^2 AC)} + \text{sen.}C \cos B \cos.AC}{1 - \text{sen.}^2 C \, \text{sen.}^2 AC}.$$

Permutando C in B, e B in C, si ha tosto l'altra espressione di sen.A, quando i dati fossero B, C, AB.

Maneggiando nei modi stessi la soluzione (489), si avranno due altri valori di sen.A, che compiscono i dieci.

Se si vuol tradurre l'ultima formola ai triangoli rettilinei, bisogna fare $\text{sen.}^2 AC = 0$, giacchè $\text{sen.}^2 AC = 1 - \cos.^2 AC = 1 - 1$, (425). Lo stesso si dica di $\text{sen.}^2 \frac{1}{2} AB$, e di $\text{sen.} \frac{1}{2} AB$ nelle formole (487): e in generale, quando in una formola sferica si trova un lato solo, è d'uopo fare il suo seno e la sua tangente uguali a zero; il che è conforme (I. 3ª, 33ª) alla regola data (425) di fare il coseno eguale all'unità.

496. La tavola VIII contiene le soluzioni *trigonometriche*, alle quali do questo nome, per esser le più usitate nel calcolo numerico, e per essere state date da tutti gli Autori di Trigonometria. Questa tavola è fatta in modo, che dispensa il Calcolatore da ogni studio in tutti i casi. Non avrà mai bisogno nè di fare una figura, nè di saper la situazione della perpendicolare. Basta che si ricordi, che il coseno, la tangente e la cotangente dell'arco, maggior di 90° e minor di 180°, sono negativi; il che è perpetuo nella Trigonometria. Ho esposto (459) la regola fondamentale, su di cui tutte le mie soluzioni sono costrutte. Qualunque volta il I *segmento* sarà più grande della base, o dell'angolo verticale, sarà segno che la perpendicolare cade fuori del triangolo, se si avesse curiosità di saperlo.

497. Ho raccolto nella tavola IX le soluzioni di Neper, per le quali parimente il Calcolatore non avrà duopo di usare attenzione, che ai segni (42). Avverto che quando il segmento maggiore risulti $> 180°$, allora il valor de' segmenti, che si ottiene osservando

le regole de' segni, è relativo non alla perpendicolare che cade dentro del triangolo, ma al supplemento di essa, il qual supplemento è il solo dei due archi perpendicolari, il qual cada in tal caso fuori del triangolo.

L'arco *a* rappresenta la somma de' segmenti, quando la perpendicolare (il suo supplemento nel caso ora detto) cade fuori; la differenza, quando cade dentro del triangolo.

Del Triangolo isoscele.

498. Se il triangolo è isoscele, si divide in due triangoli rettangoli uguali (409, 3°.), col mezzo di un arco perpendicolare, il quale per conseguenza spartisce per metà l'angolo verticale e la base. Quindi si hanno dalla tavola VI le seguenti analogie che risolvono tutti i casi.

1°. Il seno di *un lato* sta al seno di mezza *la base*, come il raggio al seno di mezzo *l'angolo verticale*.

2°. La tangente di *un lato* sta alla tangente di mezza *la base*, come il raggio al coseno di *un angolo sulla base*.

3°. Il coseno di *un lato* sta alla cotangente di mezzo *l'angolo verticale*, come il raggio alla tangente di *un angolo sulla base*.

4°. Il coseno di mezza *la base* sta al coseno di mezzo *l'angolo verticale*, come il raggio al seno di *un angolo sulla base*.

Della misura della superficie di un triangolo sferico.

499. Per trovare la superficie di un triangolo sferico qualunque ABC, si prolunghi uno de' suoi lati, come BC, descrivendo il circolo intiero BCEFB, il qual rappresenterà la metà di una sfera (377). Si prolunghino pure, tanto da una parte, come dall'altra, i due lati AB, AC, finchè si abbia (379), BAE $= 180° =$ ABD $=$ CAF $=$ ACD. È manifesto, per questa costruzione (in virtù della quale anche CBF $= 180° =$ BFE), che il triangolo AEF, posto sull' emisfero anteriore, è uguale (407) al triangolo BCD posto Fig. 57

sull' emisfero posteriore. Or si chiami m la superficie d' ognuno di questi due triangoli, x la superficie cercata del triangolo ABC, m, e p le superficie de' triangoli CAE, BAF. È poi noto che la superficie della sfera è uguale alla circonferenza di un circolo massimo, moltiplicata per il diametro. Mettendo dunque $2R \times 360°$, in vece della *superficie della sfera*, nell' analogia (416), si avrà il fuso ABDCA, o vero $x + m$, $= 2A \times R$; il fuso BAECB, o vero $x + n$, $= 2B \times R$; e il fuso CBFAC, o vero $x + p$, $= 2C \times R$. Per il che, sommando insieme le tre equazioni, si ha $3x + m + n + p = (A + B + C) \times 2R$. Ma è chiaro, per la figura, che la metà della superficie della sfera, o sia $2R \times 180°$, $= x + m + n + p$. Dunque $2x + 2R \times 180° = (A + B + C)\ 2R$; e per conseguenza

$$x = (A + B + C - 180°) \times R.$$

Dunque *la superficie di un triangolo sferico si ha, sottraendo* 180° *dalla somma dei tre angoli, e moltiplicando il residuo per il raggio della sfera.*

Questa soluzione semplicissima è presa da Wallis.

Si avverta, nel calcolare questa equazione, che i due fattori del secondo membro devono essere quantità della medesima specie. Sia $(A + B + C - 180°) = D$: se la superficie cercata si vuole in gradi, o minuti, &c. s' impiegherà D in gradi, o minuti, e, per il raggio, R°, o R′, &c. (262). Se la superficie si vuole in pollici, o piedi, &c. si prenderà R in pollici, o piedi, &c. e si ridurrà D in pollici, o piedi, per mezzo della seguente proporzione, R°, o R′ : D°, o D′ :: R in pollici, o piedi : D in pollici, o piedi.

Esempj del calcolo de' Triangoli obliquangoli.

500. ESEMPIO I. Data la longitudine e la latitudine geografica (416) di due luoghi, come Pietroburgo; e la Concezione, città del Chili, si dimanda l'arco della Terra intercetto da essi, o sia la loro distanza.

Longitudine

Longitudine di Pietroburgo contata dal meridiano di Parigi, e a levante . . . . 27° 59' 30"

Longitudine della Concezione a ponente di Parigi 75 0 0

Differenza di longitudine fra Pietroburgo e la Concezione 102 59 30

Latitudine settentrionale di Pietroburgo . . . 59 56 0

Latitudine meridionale della Concezione . . 36 42 53

Sia dunque (416), A il polo, e l'angolo A = 102 59 30 Fig.48

B la Concezione, e . . . . . AB = 126 42 53

D Pietroburgo, e . . . . . . AD = 30 4 0

Si cerca BD; e però questo è il caso della soluzione (VIII. 8°). Nomino AB la *base*, e AD il *lato dato*, ed ho

log. — cos.A = 9,351814	log. cos.AD = 9,937238
log. tang. AD = 9,762606	comp.log.— cos.I seg. = 0,003647
log.— tang.I seg. = 9,114420	log. cos.II segmento = 9,842787
Onde I segm. = 172°35' 6"	log. — cos.BD = 9,783672
Base = 126 42 53	
Diff. o II seg. = 45 52 13	Dunque BD = 127°25'18"

E però la distanza cercata viene ad essere di 7645 miglia geografiche da 60 per grado.

Il modo più spedito per fare il calcolo precedente è quello di cercare e scrivere immediatamente uno dopo l'altro il logaritmo di tang.AD, e quello di cos.AD; e così il compl. di log.cos.I segm. subito dopo aver trovato il valore del I segmento.

Esempio II. Si risolva il medesimo problema, facendo AD la *base*, e AB il *lato dato*.

log. — cos.A = 9,351814	log. — cos.AB = 9,776578
log. — tang.AB = 0,127391	compl.log.cos.I segm. = 0,018886
log.tang.I segm. = 9,479205	log.cos.II segmento = 9,988208
I segmento = 16° 46'30"	log. — cos.BD = 9,783672
Base = 30 4 0	Che è lo stesso logaritmo trovato
Diff. o II seg. = 13 17 30	di sopra.

Con che si vede la giustezza e facilità delle nostre regole ; e si può farne il confronto con quelle date da La Caille per questo caso nel suo X problema (*Éléments d'Astron. Traité prélimin.*).

ESEMPIO. III. S'inverta il problema ; e *data la distanza di due luoghi, e le loro latitudini geografiche, si cerchi la differenza di longitudine.*

Questo problema è di grande uso nella navigazione : giacchè i Piloti, misurando (216) il viaggio che fanno, osservando la latitudine (o altezza del polo) nel sito dove si trovano, e conoscendo la longitudine e la latitudine del luogo, donde sono partiti, trovano, con questi dati, il cammino fatto in longitudine, e sanno per conseguenza (416) in qual punto stanno del globo.

Fig. 48 Sia dunque BD il viaggio fatto, AB il complemento della latitudine del luogo di partenza B, AD il complemento di quella del punto D, dove sta il naviglio : dati così i tre lati del triangolo ABD, si cerca l'angolo al polo, A, che è la differenza dalla longitudine nota del meridiano AB alla longitudine richiesta del meridiano AD.

Impiegando, per risolvere questo caso, la prima formola (VIII. 11ª), chiamo a il lato BD opposto all'angolo cercato, b e c gli altri due ad arbitrio, e suppongo

a	=	37°	24′	46″
b	=	41	9	0
c	=	71	30	0
somma		150	3	46
mezza somma, o s	=	75	1	53
$s-b$	=	33	52	53
$s-c$	=	3	31	53

Fatte le preparazioni indicate dalla formola, segue il calcolo.

$$\begin{aligned} \log.\text{sen}.(s - b) &= 9,746226 \\ \log.\text{sen}.(s - c) &= 8,789548 \\ \text{compl.log.sen}.b &= 0,181753 \\ \text{compl.log.sen}.c &= 0,023043 \\ \text{somma} \quad & 8,740570 \\ \text{mezza somma , o sia log.sen.}\tfrac{1}{2}A &= 9,370285 \end{aligned}$$

Questo log. corrisponde al sen. 13° 34′ 0″. E però $A = 27° 8′$.

Chi vorrà esercitarsi, potrà cercare lo stesso angolo per mezzo della seconda formola (VIII. 11ª).

Esempio IV. Coi medesimi dati, cerchiamo l'angolo stesso per mezzo della soluzione (IX. 7ª).

Sia dunque BD = 37° 24′ 46″, AD = 41° 9′, AB = 71° 30′. Nomino *base* il lato AD, *lati* i due altri, ed ho $\tfrac{1}{2}$AD = 20° 34′ 30″; $\tfrac{1}{2}$(AB + BD) = 54° 27′ 23″; $\tfrac{1}{2}$(AB — BD) = 17° 2′ 37″. Quindi

$$\begin{aligned} \text{log. tang. mezza somma de' lati} &= 0,146033 \\ \text{log. tang. mezza differenza de' lati} &= 9,486520 \\ \text{log.cot.}\tfrac{1}{2}\text{base} &= 0,425532 \\ \text{log.tang.}\tfrac{1}{2}a &= 0,058085 \end{aligned}$$

Onde $\tfrac{1}{2}a$ = 48° 49′ 12″$\tfrac{1}{2}$. Nel calcolo della 4ª equazione (IX. 7ª) si deve impiegare il segmento ed il lato adjacenti all'angolo cercato. Ora AD è la base, e però il solo lato adjacente all'angolo cercato è AB, il quale essendo maggiore dell'altro lato BD, ne risulta, secondo la regola della tavola, che col lato AB si deve impiegare il segmento maggiore. Questo è dunque il solo segmento che cerco, ed ho: segmento maggiore = 20° 34′ 30″ + 48° 49′ 12″$\tfrac{1}{2}$ = 69° 23′ 42″$\tfrac{1}{2}$. Quindi

$$\begin{aligned} \text{log. tang. } 69° 23' 42''\tfrac{1}{2} &= 0,424844 \\ \text{log.cot. } 71° 30' &= 9,524520 \\ \text{log.cos.A} &= 9,949364 \end{aligned}$$

E però A = 27° 8′ 0″; come si trovò nell'esempio III.

Fig.48 Chi vorrà esercitarsi, potrà rifar tutto il calcolo di questo esempio, prendendo AB per base. Deve trovare lo stesso log. per cos. A.

ESEMPIO V. Coi medesimi dati dell' esempio IV si cerchi l' angolo D. Poichè anche questo giace sopra AD, che fu ivi presa, e che prendo ancora per base, varrà il calcolo già fatto della prima equazione (IX. 7ª). Il lato adjacente all' angolo cercato sarà BD, che, essendo minore dell' altro lato AB, esige l'impiego del segmento minore nella quarta equazione (IX. 7ª). Si ha dunque: segmento minore $= 20° 34' 30'' - 48° 49' 12''\frac{1}{2} = -28° 14' 42''\frac{1}{2}$. La tangente di quest' arco negativo sarà negativa, secondo la regola della tavola. E però

$$\log. - \text{tang.} 28° 14' 42''\tfrac{1}{2} = 9,730144$$
$$\log.\text{cot.} 37\ 24\ 46 = 0,116389$$
$$\log. - \cos.D = 9,846533$$

Per il che D $= 134° 36' 47''$, 3.

501. Accreditato Autore, impiegando i valori precedenti di AB, AD e A, calcola quest' angolo D col mezzo della formola (VII. 17ª), (nella quale suppongo D in luogo di C) e lo dà come acuto, cioè di $45° 23' 14''$, non facendo attenzione, che per esser cos. AD cos. A $>$ sen. AD cot. AB, la quantità negativa prevale nel denominatore, e fa sì che tang. D sia pur negativa. Questa inavvertenza non meriterebbe d'essere rilevata, se questo Autore non annunziasse, avanti di fare il calcolo, che l'angolo cercato deve essere acuto; e se non dicesse ancora, che per questa ragione piglia cos. AD cos. A col segno negativo: giacchè con questi principj ogni calcolo trigonometrico sarebbe sconvolto. In vano si cercherà di comporre un triangolo ABD, il quale smentisca la regola seguente: *Il segno di* cos. AD cos. A *non dipende punto dalla specie dell' angolo* D, *ma unicamente da quella di* AD *e di* A; *e sarà sempre negativo, quando* AD *e* A *siano della medesima specie.* Se questo Autore, meritamente stimato, ha potuto così trave-

dere, d'intorno i segni, mi sarà lecito di conchiudere, che *la specie* di analisi algebraica, di cui si è valso nel costruire le formole della tavola VII, è molto meno sicura (per la ragione d'esser molto più complicata) dell' analisi trigonometrica da me adottata in questa Opera, e maneggiata con le regole esposte (459). Per dare un'idea di comparazione, la costruzione della formola (VII. 17^{a}), per mezzo dell' accennata *specie* d'analisi algebraica, esige la considerazione di tredici linee interiori nella sfera, distribuite in quattro analogie. Ognun può immaginarsi quanto la figura ed il calcolo esser debbano complicati, e osservare la semplicità dell'una e dell' altro nel metodo che ho seguito (470). Mi sono però determinato ad omettere quasi intieramente in questo Trattato la considerazione delle linee interiori della sfera, non avendone veduto sortire finora se non soluzioni laboriose.

Or passiamo a provare in altra guisa, che nel triangolo, di cui si tratta negli esempj IV e V, l'angolo D è veramente ottuso, qual fu trovato con le nostre regole della tavola IX.

502. Esempio VI. Essendo dati $AB = 71°30'$, $AD = 41°9'$, $A = 27°8'$, si cerchino ad un tratto gli altri due angoli del triangolo ABD, per via delle speditissime formole Neperiane (IX. 2^{a}).

Abbiamo $\frac{1}{2}A = 13°34'$, $\frac{1}{2}(AB + AD) = 56°19'30''$, $\frac{1}{2}(AB - AD) = 15°10'30''$. Osservo inoltre che, in virtù della regola (413), deve essere $D > B$; e faccio il calcolo come segue:

log.cot.$\frac{1}{2}$A	= 0,617425		0,617425
log.sen.$\frac{1}{2}$(AB — AD)	= 9,417917	log.cos.	9,984586
compl.log.sen.$\frac{1}{2}$(AB + AD)	= 0,079774 . .	compl.log.cos.	0,256113
log.tang.$\frac{1}{2}$(D — B)	= 0,115116 :	log.tang.$\frac{1}{2}$(D + B) =	0,858124.

$$
\begin{aligned}
\text{E però } \tfrac{1}{2}(D + B) &= 82°\ 6'\ 25'',4\\
\tfrac{1}{2}(D - B) &= 52\ 30\ 22\ ,0\\
\text{Dunque } D &= 134\ 36\ 47\ ,4\\
\text{e } B &= 29\ 36\ \ 3\ ,4;
\end{aligned}
$$

Con che si vede la giustezza delle nostre regole, usate nell'esempio V. Il divario di un decimo di secondo, fra quel calcolo e questo, dipende dall'aver preso i logaritmi con sei decimali solamente. Si prendano con sette, e si troverà assolutamente lo stesso valore di D, coi due calcoli.

CAPITOLO XVII.

Risoluzione de' Triangoli sferici con la Regola e col Compasso.

503. L'INVENZIONE de' logaritmi ha recato tanta brevità e precisione nella risoluzione de' triangoli, che i Geometri non fanno più quasi alcun conto delle Operazioni grafiche, soggette all' errore di molti minuti, per quanta cura vi si ponga. Nondimeno, perchè questa specie di soluzioni può essere utile, in certi casi dove non si ha bisogno di tutta l'esattezza, o per coloro che non sono familiarizzati al calcolo, non tralascio d'indicarle brevemente, e indipendentemente dalla dottrina delle projezioni, onde metterle alla portata di un maggior numero di Lettori.

Siano *dati i tre lati* di un triangolo sferico ABC; per esempio, AB di $71°\frac{1}{2}$, AC di $41°\frac{1}{4}$, e BC di $37°\frac{1}{2}$; e si dimandi il valore dell' angolo C.

Fig.58 Si descriva un circolo intiero *nac*M più grande che sia possibile. Indi col mezzo del rapportatore, o di un compasso di proporzione, che è sempre munito di una scala delle corde, o come meglio piaccia, si taglino sopra la circonferenza del circolo descritto, da un punto *c* di essa ad arbitrio, gli archi *cb*, *ca*, respettivamente uguali ai lati dati, BC, AC, che comprendono l'angolo cercato. Poi si tagli, dall'altra parte, un arco *c*M eguale ad un qualsivoglia dei detti lati, per esempio a *cb*, e si tiri la corda M*b*.

Allora dall' estremità *a* dell' altro *ca* de' suddetti lati si taglino gli archi *an*, *a*N, eguali ciascuno al terzo lato dato AB; poi si tiri la corda *n*N, la qual taglierà (398, 399) la *b*M in un punto, come P. Presa infine la metà MD di quest' ultima, si descriva dal punto D il semicircolo MR*b*, fino all' incontro del quale s'innalzi tosto la perpendicolare PR, e menato il raggio RD, l' angolo *b*DR sarà eguale all' angolo cercato C. Quest' angolo *b*DR si misura poi col rapportatore, o colla scala delle corde proporzionata al raggio DR, o come si ami meglio.

Or se si voglia sapere l' angolo A opposto al lato BC $=$ *bc*, basta prendere la metà di N*n*, e dal punto R, con questo intervallo, tagliare l' altra corda M*b*. Supponendo E il punto della sezione, si tiri la linea RE, e si avrà DER eguale all' angolo richiesto A.

Che se si vuole l' angolo B, convien cangiare la costruzione, cioè fare per esso tutte le operazioni, che si son fatte per trovar l' angolo C. Vedremo in breve che la costruzione della fig. 58 basta a risolvere tutti i casi non dubbj de' triangoli sferici. Or conviene spiegare i fondamenti di essa, per sodisfazione di coloro che amassero intenderla.

504. Si consideri la calotta sferica che sarebbe generata dalla rivoluzione del mezzo segmento *c*D*b*. La base di questa calotta sarebbe evidentemente un circolo, che avrebbe D*b* per raggio, *c* per polo, e D per centro. La semicirconferenza di questo circolo sarà dunque uguale a MR*b*; e però, se si considera il semicerchio MR*b* perpendicolare al piano del circolo massimo *nac*M, la semicirconferenza MR*b* apparterrà alla superficie della sfera. Si concepisca similmente un altro circolo, descritto su la superficie della sfera, dal polo *a*, con l'intervallo *an* $=$ *a*N. Poichè i diametri M*b*, N*n* di questi due circoli si tagliano in un punto P, le loro circonferenze convien che si taglino nel punto R; giacchè se il punto P è comune ai diametri, è duopo che l'ordinata PR sia comune alle circonferenze. Se dunque *an* è la distanza dal punto R al punto *a*

sulla superficie della sfera, e cb la distanza dal punto R al punto c, si concepisca un triangolo acR sopra la superficie della sfera, e si conoscerà ch'esso è uguale, per costruzione, al triangolo dato ABC. L'angolo cercato C è l'angolo acR, che è d'egual numero di gradi (394) dell'arco di parallelo bR. Ma $b\text{R} = \text{D}$. Dunque $\text{D} = \text{C}$, come dovea dimostrarsi.

Or si consideri che nel triangolo rettilineo RDE, ER : DR :: sen.D : sen.DER, (49). Ma, per costruzione, $\text{ER} = \frac{1}{2}\text{N}n =$ sen.an (18) $=$ sen.AB. E similmente $\text{DR} = \frac{1}{2}\text{M}b =$ sen.cb $=$ sen.BC. Di più vedemmo or ora che $\text{D} = \text{C}$. Dunque l'analogia diviene, sen.AB : sen.BC :: sen.C : sen.DER, e per conseguenza (VII. 1°), $\text{DER} = \text{A}$, come si avanzò (503).

505. Abbiamo veduto (503) come si trovi un angolo, conoscendo i tre lati. *Se i dati fossero i tre angoli*, per avere il valore di un lato la stessa costruzione servirebbe, facendo uso del triangolo supplementario, cioè impiegando il supplemento a 180° di ciascuno degli angoli dati. Con questi valori, l'angolo A si chiamerà BC, l'angolo B si chiamerà AC, e l'angolo C si chiamerà AB, (440). Allora, se il lato cercato è, per esempio, BC, si cercherà in vece l'angolo A, di cui, trovato che sia, prendendo il supplemento, questo sarà il valore del lato richiesto BC.

506. *Se fossero dati due lati, e un angolo compreso*, si troveranno il terzo lato, e qualunque degli altri due angoli, nel modo seguente. Si taglieranno due archi, cb, ca, eguali ai lati dati: nominando cb quello opposto all'angolo cercato, si tirerà (503) la corda Mb, e dall'estremità a dell'altro lato ca il raggio am, m essendo il centro del circolo nacM. Sopra Mb si descriverà il semicircolo MRb, di cui si prenderà, dalla parte ove stanno gli archi cb, ca, un arco bR, uguale all'angolo dato. Dal punto R si calerà la perpendicolare RP, e si tirerà il raggio DR. Indi per il punto P si farà passare una corda Nn, la qual sia perpendicolare ad am. E tosto si avrà nell'arco aN, o in an, la misura del lato ignoto nel triangolo dato.

Quindi

Quindi, presa RE uguale alla metà di Nn, (503), sarà DER uguale all'angolo richiesto. Tutte queste operazioni sono manifestamente fondate sopra la costruzione (503).

507. *Se i dati fossero due angoli, e il lato compreso*, si troveranno il terzo angolo, e qual si voglia degli altri due lati, prendendo i supplementi del lato e degli angoli dati, come si fece (505), e risolvendo il triangolo nel modo indicato (506). Il supplemento del lato che si troverà, sarà l'angolo cercato; il supplemento dell'angolo che si troverà, sarà il lato cercato.

508. Ometto di risolvere il triangolo, quando i dati sono, due lati, ed un angolo opposto, o vero due angoli, e un lato opposto: 1°. perchè questi sono i casi dubbj; 2°. perchè sono i meno frequenti in pratica; 3°. perchè la soluzione grafica di essi è molto più laboriosa di quelle date di sopra, e però non credo che meriti, in questi casi, d'essere anteposta giammai al calcolo numerico. Con questo, trascurando i minuti secondi, non v'è alcuna soluzione d'un triangolo sferico, la qual costi cinque minuti di tempo, e si ha sempre una precisione molto maggiore di quella che possa aversi con la riga e col compasso.

CAPITOLO XVIII.

Comparazione de' Triangoli sferici ai rettilinei.

509. Eseguirò questo assunto in tre modi. 1°. Farò la comparazione di un triangolo sferico, col triangolo rettilineo formato dalle corde degli archi, che sono i lati del primo: il che è forse nuovo, ma pur conveniente, per quel che mi pare, ad un Trattato delle due Trigonometrie.

2°. L'uso di considerare e risolvere come rettilinei i piccoli triangoli sferici rettangoli essendo molto frequente e comodo, così

determinerò, in tutti i casi, i limiti, ai quali può estendersi tal licenza, mediante una facile correzione: questa sarà una comparazione tra le formole della Trigonometria sferica e quelle della rettilinea.

3°. Avendo scoperto, con questa investigazione, che quando l'angolo retto è formato da un arco di cerchio minore (come succede, per lo più, in Astronomia), l'errore, non per anco avvertito, ch' io sappia, sull' angolo retto, può influire sensibilmente sui risultati, somministrerò i mezzi per evitarlo.

510. La differenza dall' arco alla corda si può determinare con quanta approssimazione si voglia, per mezzo dell' ultima equazione (152). Se gli archi sono piccoli, queste differenze sono proporzionali ai cubi de' medesimi, qualora non si pretenda maggiore approssimazione di quella che dà il primo termine del secondo membro della detta equazione. Per l'arco di 1° la differenza è 0″, 04569; il suo logaritmo 8,6598: aggiungendo a questo il triplo del log. di un arco (non maggior di 8°) espresso in gradi e decimali di grado, si avrà il log. della differenza esatta da quest' arco alla sua corda in secondi e decime di secondo. Si può ancora moltiplicare per R°, o per R', o per R'', (262), il doppio seno della metà di un arco qualunque (18), e si avrà il valor della corda in gradi, o in minuti, o in secondi. Questo valore, comparato con quello dell' arco, darà la differenza cercata.

511. Per determinare la differenza dagli angoli sferici ai rettilinei, proponiamoci di risolvere il seguente problema.

In un triangolo sferico qualunque, dati due lati, e l'angolo compreso, trovar l'angolo rettilineo corrispondente. (Intendo per *corrispondente* l'angolo formato dalle corde dei lati dati).

Fig. 59. Sia ABC un triangolo sferico, cioè formato da tre archi di raggio eguale, e *abc* il triangolo formato dalle loro corde. Il primo dà (VII. 26ᵃ), $\cos.BC = \cos.A \text{ sen.}AB \text{ sen.}AC + \cos.AB \times \cos.AC$, o vero (I. 22ᵃ), $1 - 2\text{sen.}^2 \tfrac{1}{2}BC = \cos.A \text{ sen.}AB \times \text{sen.}AC + (1 - 2\text{sen.}^2 \tfrac{1}{2}AB)(1 - 2\text{sen.}^2 \tfrac{1}{2}AC)$. E però

$2\,\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}AB + 2\,\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}AC - 2\,\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}BC = \cos.A\ \text{sen.}AB \times$ $\text{sen.}AC + 4\,\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}AB\ \text{sen.}^2\tfrac{1}{2}AC$. Il triangolo *abc* dà (III. 25ª), $bc^2 = ab^2 + ac^2 - 2ab \times ac \cos.a$. Ma $bc = 2\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}BC$, (18) : trasformando le altre corde nel modo stesso, l'equazione diviene, $4\,\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}BC = 4\,\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}AB + 4\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}AC - 8\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}AB$ $\text{sen.}\tfrac{1}{2}AC \cos.a$, o vero $2\,\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}AB + 2\,\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}AC - 2\,\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}BC =$ $4\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}AB\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}AC \cos.a$. Ponendo il valore del primo membro, trovato di sopra, si ha $\cos.A\ \text{sen.}AB\ \text{sen.}AC + 4\,\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}AB \times$ $\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}AC = 4\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}AB\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}AC \cos.a$. Dividendo per $4\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}AB$ $\text{sen.}\tfrac{1}{2}AC$, e osservando che $\text{sen.}AB\ \text{sen.}AC = 4\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}AB \times$ $\cos.\tfrac{1}{2}AB\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}AC \cos.\tfrac{1}{2}AC$, (I. 6ª), trovo una formola molto semplice, che risolve generalmente il problema proposto; ed è

$$(A)\ldots\ \cos.a = \cos.A \cos.\tfrac{1}{2}AB \cos.\tfrac{1}{2}AC + \text{sen.}\tfrac{1}{2}AB\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}AC.$$

Facilmente si conchiude da questa formola 1°. che l'angolo sferico ottuso, o retto, è sempre maggiore dell'angolo rettilineo corrispondente; 2°. che l'angolo sferico acuto è minore del rettilineo corrispondente, qualunque volta sia $\cos.A > \frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}AB\ \text{sen.}\frac{1}{2}AC}{1 - \cos.\frac{1}{2}AB \cos.\frac{1}{2}AC}$.

512. Dalla formola (A) si passa agevolmente alla soluzione del problema inverso.

In un triangolo rettilineo abc, *dati due lati e l'angolo compreso, trovar l'angolo dei due archi* AB, AC, *di cui i lati dati sarebbero le corde.*

La formola (I. 18ª) dà $\cos.\tfrac{1}{2}AB \cos.\tfrac{1}{2}AC = \sqrt{(1 - \text{sen.}^2\tfrac{1}{2}AB)}$ $(1 - \text{sen.}^2\tfrac{1}{2}AC)$. Ora $\text{sen.}\tfrac{1}{2}AB = \tfrac{1}{2}ab$, e $\text{sen.}\tfrac{1}{2}AC = \tfrac{1}{2}ac$. Facendo queste sostituzioni nell'equazione (A), si ha la seguente :

$$(B)\ldots\ \cos.A = \frac{\cos.a - \frac{1}{2}ab \times \frac{1}{2}ac}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2}ab)(1 + \frac{1}{2}ab)(1 - \frac{1}{2}ac)(1 + \frac{1}{2}ac)}}.$$

Per calcolar questa formola, bisogna assumere un valore de' lati *ab*, *ac*, tale che possano esser corde di un circolo che ha l'unità per raggio; il che si otterrà facilmente, dividendo il valor de' lati,

Fig.59 dato in piedi, tese, o altra misura, per qualche potenza di 10, tale che alcun de' lati non resti maggiore di 2, che è la corda massima, posto R = 1.

513. Se AB = AC, e per conseguenza $ab = ac$, le formole (A), (B) si riducono alle seguenti (C), (D). In fatti allora $\cos.a = \cos.A \cos.^2 \frac{1}{2}AB + \text{sen.}^2\frac{1}{2}AB$, e però (I. 22^a, 3^a), $1 - 2\text{sen.}^2 \frac{1}{2}a = (1 - 2\text{sen.}^2 \frac{1}{2}A) \cos.^2 \frac{1}{2}AB + 1 - \cos.^2 \frac{1}{2}AB$; donde si cava

$$(C)\ldots\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}a = \text{sen.}\tfrac{1}{2}A\ \cos.\tfrac{1}{2}AB.$$

Ma $\cos.\frac{1}{2}AB = \sqrt{(1 - \text{sen.}^2 \frac{1}{2}AB)} = \sqrt{(1 - \frac{1}{4}ab^2)}$. Dunque

$$(D)\ldots\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}A = \frac{\text{sen.}\frac{1}{2}a}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2}ab)(1 + \frac{1}{2}ab)}}.$$

La formola (C) fa vedere che l'angolo verticale di un triangolo sferico isoscele è sempre maggiore dell'angolo rettilineo corrispondente.

514. Finalmente se A = 90°, le formole (A), (B) danno

$$(E)\ldots\ \cos.a = \text{sen.}\tfrac{1}{2}AB\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}AC = \tfrac{1}{2}ab \times \tfrac{1}{2}ac.$$

Tutte le formole precedenti sono generali e rigorose, qualunque sia la grandezza del triangolo. Ma, se un triangolo sferico rettangolo è piccolo, si potranno mettere gli archi in vece de' seni nella formola (E), e come $\cos.a = \text{sen.}(90° - a) = 90° - a$, si avrà in secondi la piccola differenza dall'angolo retto sferico all'angolo rettilineo corrispondente, dalla formola seguente che suppone presi in secondi gli archi AB, AC.

$$(F)\ldots\ 90° - a = \frac{\frac{1}{2}AB \times \frac{1}{2}AC}{R''}.$$

Questa formola non commette l'error di 1'', quand'anche la somma de' lati fosse di 10°.

Che se l'ipotenusa non è maggiore di 1° 30', si può mettere BC sen.C in vece di AB, e BC cos.C in vece di AC, (213, 11^a, 12^a); il che dà $AB \times AC = BC^2 \text{ sen.C cos.C} = \frac{1}{2}BC^2 \text{ sen.}2(90° - B)$

$= \frac{1}{4}BC^2$ sen. $2B$. E però la differenza cercata si ha pure dalla formola seguente:

(G)... $90° - a = \frac{(\frac{1}{2}BC)^2 \text{ sen.} 2C}{2R''} = \frac{(\frac{1}{2}BC)^2 \text{ sen.} 2B}{2R''}$.

Se $BC = 1° 30'$, e $B = C = 45°$ presso poco, si trova $90° - a = 17'', 7$.

515. Ferma l'ipotesi, che l'ipotenusa non sia maggiore di $1° 30'$, passo a considerare gli angoli obliqui.

La formola (A) applicata all'angolo B, per esempio, dà $\cos.b = \cos.B \cos.\frac{1}{2}AB \cos.\frac{1}{2}BC + \text{sen.}\frac{1}{2}AB \text{ sen.}\frac{1}{2}BC$. Ma $\cos.\frac{1}{2}AB \times \cos.\frac{1}{2}BC = (1 - 2\text{sen.}^2\frac{1}{4}AB)(1 - 2\text{sen.}^2\frac{1}{4}BC) = 1 - 2\text{sen.}^2\frac{1}{4}AB - 2\text{sen.}^2\frac{1}{4}BC$, negligendo la quantità $4\text{sen.}^2\frac{1}{4}AB \text{ sen.}^2\frac{1}{4}BC$, che è affatto insensibile nell'ipotesi presente. Sostituendo l'ultimo valore di $\cos.\frac{1}{2}AB \cos.\frac{1}{2}BC$, e mettendo gli archi in luogo de' seni, si ha $\cos.b = \cos.B - \frac{1}{8}\cos.B (AB^2 + BC^2) + \frac{1}{2}AB \times \frac{1}{2}BC$. Ma nell' ultimo termine può supporsi, senza errore sensibile, $AB = BC \cos.B$. Dunque $\cos.b - \cos.B = \frac{1}{8}\cos.B (BC^2 - AB^2) = \frac{1}{8}AC^2 \cos.B$. Ora(II. 23°), $\cos.b - \cos.B = 2\text{sen.}\frac{1}{2}(B - b) \text{ sen.}\frac{1}{2}(B + b) = (B - b) \text{ sen.}B$, attesa l'estrema piccolezza di $B - b$. Dunque la differenza, che passa da un angolo sferico obliquo all' angolo rettilineo corrispondente, sarà

(H)... $B - b = \frac{(\frac{1}{2}AC)^2 \cot.B}{2R''}$.

E perchè AC cot.B = AB, (213, 5°), sarà pure

(K)... $B - b = \frac{\frac{1}{2}AB \times \frac{1}{2}AC}{2R''}$.

516. Collo stesso metodo, si trova per $C - c$ il medesimo valore (K), il quale è visibilmente la metà di quello (F). Dunque 1°. per quanto siano diversi fra loro in grandezza gli angoli obliqui d'un piccolo triangolo sferico rettangolo, sempre è uguale l'eccesso dell'uno all'eccesso dell'altro sopra il respettivo angolo rettilineo corrispondente; 2°. la somma di questi due eccessi è uguale all'eccesso dell'angolo retto sopra l'angolo rettilineo corrispon-

dente. Donde ne segue che una sola delle formole (F), (G), (H), (K) basta per render nota la differenza che passa da ognuno dei tre angoli di un piccolo triangolo sferico rettangolo al respettivo angolo rettilineo corrispondente.

517. Le formole trovate fin quì fanno conoscere veramente la differenza da un angolo sferico al rettilineo corrispondente; differenza costante in un triangolo dato. Quando poi si risolve un triangolo sferico con le formole della Trigonometria rettilinea, l'errore che si commette sugli angoli è d'un' altra specie. Mi sembra che questo errore non possa chiamarsi *la differenza* dall' angolo sferico al rettilineo, poichè in un medesimo triangolo si ha un errore diverso sull' angolo stesso, secondo che questo si cerca col mezzo di certe parti del triangolo, o pur col mezzo di certe altre. Il Sig. de la Lande (*Mémoires Acad.* 1763) ha determinato l'errore sugli angoli obliqui d'un piccolo triangolo sferico rettangolo, trovati col mezzo dei due lati. Seguirò le traccie del celebre Autore per investigare, in tutti i casi, gli errori che si commettono usando le formole della Trigonometria rettilinea per risolvere i piccoli triangoli sferici rettangoli. Questa ricerca, che è la seconda propostaci (509), porgerà un nuovo mezzo molto comodo per ottenere i piccoli archi con somma precisione, e molto maggiore di quella che possa sperarsi dalle formole ordinarie, calcolate col mezzo delle tavole de' logaritmi con sette decimali.

518. *In un triangolo sferico* ABC *rettangolo in* A, *data l'ipotenusa* BC, non maggiore di 4°, *e dato un angolo*, per esempio B, *trovare l'errore* e *che si commette cercando il lato opposto* AC *col mezzo della Trigonometria rettilinea.*

La Trigonometria sferica dà sen. AC $=$ sen. BC sen. B. Dunque (149), (W), AC $- \frac{1}{6}$AC^3 $=$ sen. B (BC $- \frac{1}{6}$BC^3). In questa trasformazione ho negletto le quantità di quinto ordine, e degli ordini superiori, giacchè la quinta potenza di un arco di 4° divisa per 120 non vale $0''$, 01. Si ha dunque AC $=$ BC sen. B $-$

$\frac{1}{6}(BC^3 \text{sen}.B - AC^3)$. Per la Trigonometria rettilinea si ha $AC = BC \text{ sen}.B$. Questa formola dunque dà il lato AC troppo grande della quantità $\frac{1}{6}(BC^3 \text{ sen}.B - AC^3)$. Ma, posta la massima di negligere le quantità di quinto ordine, la penultima equazione, elevata al cubo, dà $AC^3 = BC^3 \text{ sen}.^3 B$. Dunque $e = -\frac{1}{6} BC^3 \text{ sen}.B\ (1 - \text{sen}.^2 B)$: e finalmente per aver questo errore in secondi (noi supponiamo sempre che i lati sono presi in secondi),

$$e = -BC \text{ sen}.B \times \frac{BC^2 \cos.^2 B}{6 R'' R''}.$$

Se $BC = 4°$, e $B = 35° 16'$; che è il caso del valor massimo (141) di $\text{sen}.B \cos.^2 B$; si trova $e = -4'', 50$. Con che si vede (e s' intenda detto per tutti i seguenti problemi) quanto sarebbe facile formare una tavola di questo errore, o trovarlo di volta in volta, giacchè log.BC si tien pronto nel calcolo di BC sen.B, i logaritmi di 6 e di R'' si hanno a memoria, e basta impiegarli con quattro decimali, egualmente che quello di cos.B: tutto ciò può costar men fatica, che il computare le parti proporzionali per avere i logaritmi di sen.BC, e di sen.AC, risolvendo il triangolo come sferico; e questi logaritmi non darebbero forse mai i centesimi di secondo con quella esattezza, con cui possono aversi impiegando, nel calcolo dell' equazione $AC = BC \text{ sen}.B$, i logaritmi de' numeri, con sette decimali.

519. Tenendo fermi i dati del problema precedente, ed usando sempre il metodo stesso, *trovare il lato* AB *adjacente all' angolo dato.*

Poichè (430, 2°), $\text{tang}.AB = \cos.B \text{ tang}.BC$, si avrà (153), (U), $AB + \frac{1}{3}AB^3 = \cos.B(BC + \frac{1}{3}BC^3)$. E però $AB = BC \cos.B + \frac{1}{3}(BC^3 \cos.B - AB^3)$. Dunque $e = \frac{1}{3} BC^3 \cos.B\ (1 - \cos.^2 B)$, o vero

$$e = BC \cos.B \times \frac{BC^2 \text{ sen}.^2 B}{3 R'' R''}.$$

Questo errore è in senso contrario del precedente. La stessa tavola dell' errore di AC, (518), darebbe anche quello di AB, cercan-

dolo con l' argomento ($90^\circ - B$) in cambio di B, e prendendo il doppio dell' errore dato dalla tavola.

520. Fermi ancora i medesimi dati, *trovare l' altro angolo* C.

Poichè (230, 3ª), $\cot.C = \cos.BC \tan g.B = \tan g.B(1 - \frac{1}{2}BC^2)$, (154), (Y), se si pone $C = 90^\circ - B + e$, si avrà $\cot.C = \tan g.(B - e)$: e per conseguenza $\tan g.B - \tan g.(B - e) = \frac{1}{2}BC^2 \tan g.B = \frac{\text{sen } e}{\cos.B \cos.(B - e)}$, (II. 24ª). Mettendo cos.B in vece di $\cos.(B - e)$, ed e in vece di sen.e, si ha

$$e = (\tfrac{1}{2}BC)^2 \times \frac{\text{sen.}2B}{R''}.$$

Questa formola è molto comoda, poichè sola basta a far conoscere il valore di C. Essa non è atta veramente a dare i centesimi di secondo quando sia $BC > 1^\circ 30'$: ma rare volte l' errore sarà di un decimo di secondo quando sia $BC < 3^\circ$.

521. *Data l' ipotenusa* BC, non maggiore di 3°, *e un lato*, come AB, *trovare l' angolo opposto* C.

Si ha (230, 9ª), $\text{sen.}C = \frac{\text{sen.}AB}{\text{sen.}BC} = \frac{AB - \frac{1}{6}AB^3}{BC - \frac{1}{6}BC^3} = \frac{AB}{BC} \times \frac{1 - \frac{1}{6}AB^2}{1 - \frac{1}{6}BC^2}$. Chiamando $C - e$ l'angolo che si trova per la Trigonometria rettilinea, si ha $\text{sen.}C - \text{sen.}(C - e) = \frac{AB}{BC}\left(\frac{1 - \frac{1}{6}AB^2}{1 - \frac{1}{6}BC^2} - 1\right)$ $= \frac{AB}{BC} \times \frac{BC^2 - AB^2}{6 - BC^2} = 2\,\text{sen.}\frac{1}{2}e \cos.(C - \frac{1}{2}e)$, (II. 22ª). Negligendo nel denominatore il termine BC², il quale, effettuando la divisione, non darebbe che quantità d'ordini superiori al terzo, si ha $e = \frac{AB(BC^2 - AB^2)}{6BC \times \cos.C} = \frac{1}{6}AB \times AC$, (213; 14ª, 12ª). Per formare una tavola, si avrebbe dunque

$$e = \frac{AB}{6R''} \times \sqrt{(BC - AB)(BC + AB)}.$$

E per correggere l'angolo C ottenuto con la formola $\text{sen.}C = \frac{AB}{BC}$ sarebbe più comoda la seguente:

$$e = \frac{AB \times BC \cos.C}{6R''}$$

Questo

Questo errore è tre volte più piccolo di quello che abbiamo trovato (520) per lo stesso angolo C, quando i dati erano l'ipotenusa e l'altro angolo. È facile il confronto dei due valori di e, ponendo nell'ultima formola BC cos.B in vece di AB, e sen.B in vece di cos.C. Con che si vede la verità di quel che ho avanzato (517).

522. Coi medesimi dati; *trovare l'angolo adjacente* B.

La Trigonometria sferica dà cos.B $=$ cot.BC tang.AB; e la rettilinea cos.$(B - e) = \frac{AB}{BC}$. Dunque cos.$(B - e)$ $-$ cos.B $=$ $\frac{AB}{BC} - \frac{AB + \frac{1}{3}AB^3}{BC + \frac{1}{3}BC^3} = \frac{AB}{BC}\left(1 - \frac{3 + AB^2}{3 + BC^2}\right) = \frac{AB}{BC} \times \frac{BC^2 - AB^2}{3 + BC^2} = e \times$ sen.B, (II. 23°). E per conseguenza $e = \frac{AB}{BC \times \text{sen.}B} \times \frac{AC^2}{3 + BC^2}$ $= \frac{1}{3}AB \times AC$, (213, 10°), negligendo nel denominatore il termine BC^2, per lo stesso motivo addotto (521). L'errore in questo caso è dunque doppio di quello che abbiamo trovato (521) per l'angolo C; sicchè le medesime formole serviranno per determinare ambi gli angoli. Bensì per avere nel problema presente il valore di e con quel grado maggiore di esattezza, che può sperarsi dalle tavole nel valore di $(B - e)$ mediante la formola cos.$(B - e)$ $= \frac{AB}{BC}$, convien che l'ipotenusa non sia maggior di 2°.

523. Coi medesimi dati, *trovare l'altro lato* AC.

Poichè cos.BC $=$ cos.AB cos.AC, sarà, negligendo le quantità di sesto ordine, $1 - \frac{1}{2}BC^2 + \frac{1}{24}BC^4 = (1 - \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{24}AB^4)$ $(1 - \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{24}AC^4) = 1 - \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{24}AB^4 + \frac{1}{24}AC^4$ $+ \frac{1}{4}AB^2 \times AC^2$. Riducendo, moltiplicando per 2, e trasportando, si ha $BC^2 = AB^2 + AC^2 + \frac{1}{12}BC^4 - \frac{1}{12}AB^4 - \frac{1}{12}AC^4 - \frac{1}{2}AB^2 \times$ AC^2. Ma, negligendo sempre le quantità di sesto ordine, questa equazione, elevata al quadrato, dà $BC^4 = AB^4 + 2AB^2 \times AC^2$ $+ AC^4$. Dunque, sostituendo questo valore di BC^4 nell' equazione precedente, si avrà $BC^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{1}{3}AB^2 \times AC^2$, o vero $\sqrt{(BC^2 - AB^2)} = AC\sqrt{(1 - \frac{1}{3}AB^2)}$. Sviluppando quest' ultimo binomio, e negligendo le quantità di quinto ordine, ho AC $=$

$\surd(BC^2 - AB^2) + \frac{1}{6}AB^2 \times AC$. In questo ultimo termine si può mettere senza scrupolo il valore di AC dato dal primo; con che si ha finalmente

$$e = \frac{AB^2}{6R''R''} \times \surd(BC - AB)(BC + AB).$$

Questa formola dà i centesimi di secondo, purchè l'ipotenusa non sia maggiore di 4°.

Come l'uso di questo problema è frequente, così giova avvertire, che quando si è calcolato il valore di AC con la formola (213, 14°), resta solo da moltiplicarlo per $\frac{AB^2}{6R''R''}$, a fine di avere la correzione del detto valore.

524. *Dati un lato, e l'angolo opposto,* come AC e B, *trovare l'altro angolo* C.

Poichè $\text{sen.}C = \frac{\cos.B}{\cos.AC}$, se si fa $C = 90° - B + e$, sarà $\cos.(B - e) = \frac{\cos.B}{\cos.AC} = \cos.B \times (1 - \frac{1}{2}AC^2)^{-1} = \cos.B + \frac{1}{2}AC^2 \cos.B$, negligendo le quantità di quarto ordine. E però $\cos.(B - e) - \cos.B = \frac{1}{2}AC^2 \cos.B = e\ \text{sen.}B$, (II. 23°). Laonde

$$e = \frac{AC^2 \times \cot.B}{2R''}.$$

Questa formola dà i centesimi di secondo, quando la somma de' lati o vero $(AC + AC \cot.B) < 2°40'$. Se si volesse formare una tavola con tal precisione fino ad $(AC + AC \cot.B) = 8°$, bisognerebbe adoprar la seguente $e = \frac{AC^2 \cot.B}{2R''}\left(1 + \frac{5AC^2}{12R''R''}\right) + \frac{e^2 \cot.B}{2R''}$, bastando impiegare nell' ultimo termine il valore di e dato dal primo.

525. Coi medesimi dati, *trovare l'altro lato* AB.

Poichè $\text{sen.}AB = \cot.B\ \text{tang.}AC$, sarà $AB - \frac{1}{6}AB^3 = \cot.B\ (AC + \frac{1}{3}AC^3)$; onde $AB = AC \cot.B + \frac{1}{3}AC^3 \cot.B + \frac{1}{6}AB^3$. E però $e = \frac{1}{3}AC^3 \cot.B + \frac{1}{6}AC^3 \cot.^3B$, o vero

$$e = AC \times \cot.B \times \frac{AC^2}{3R''R''}(1 + \frac{1}{2}\cot.^2B).$$

Questa formola e la seguente danno i centesimi di secondo, quando $(AC + AC \cot.B) < 8^\circ$.

526. Coi medesimi dati, *trovare l'ipotenusa* BC.

La seconda equazione (518) dà $BC = \frac{AC}{\text{sen.}B} + \frac{1}{6}\left(BC^3 - \frac{AC^3}{\text{sen.}B}\right)$.

E per conseguenza $e = \frac{1}{6}\left(BC^3 - \frac{AC^3}{\text{sen.}B}\right) = \frac{AC^3}{6\,\text{sen.}B}\left(\frac{1}{\text{sen.}^2B} - 1\right)$, o vero

$$e = \frac{AC}{\text{sen.}B} \times \frac{AC^2 \cot.^2B}{6R''R''}.$$

527. *Dati un lato, e l'angolo adjacente*, come AB e B, *trovare l'angolo opposto* C.

$\text{Cos.}C = \text{sen.}B \cos.AB = \text{sen.}B\,(1 - \frac{1}{2}AB^2)$. Or sia $C = 90^\circ - B + e$; sarà $\text{sen.}B - \text{sen.}(B - e) = \frac{1}{2}AB^2\,\text{sen.}B = e \times \cos.B$, (II. 22'). Dunque

$$e = \frac{AB^2 \tan g.B}{2R''}.$$

Questa formola dà i centesimi di secondo, quando $(AB + AB \tan g.B) < 2^\circ 40'$. Questo limite può portarsi a 8° con la seguente, $e = \frac{AB^2 \tan g.B}{2R''}\left(1 - \frac{AB^2}{12\,R''R''}\right) - \frac{e^2 \tan g.B}{2R''}$, bastando, per calcolare l'ultimo termine, il valore di e dato dal primo.

528. Coi medesimi dati, *trovare l'altro lato* AC.

La seconda equazione (525) dà $AC = AB \tan g.B - \frac{1}{6}AB^3 \times \tan g.B - \frac{1}{3}AC^3$. Dunque $e = -\frac{1}{6}AB^3 \tan g.B - \frac{1}{3}AB^3 \tan g.^3B$, o vero

$$e = -AB \tan g.B \times \frac{AB^2}{6R''R''}\,(1 + 2\tan g.^2B).$$

Questa formola dà i centesimi di secondo, se $(AB + AB \tan g.B) < 8^\circ$.

529. Coi medesimi dati, *trovare l'ipotenusa* BC.

La terza equazione (519) dà $BC = \frac{AB}{\cos.B} - \frac{1}{3}\left(BC^3 - \frac{AB^3}{\cos.B}\right)$.

Dunque $e = -\frac{1}{3}\left(\frac{AB^3}{\cos.^3B} - \frac{AB^3}{\cos.B}\right) = -\frac{AB^3}{3\cos.B}\left(\frac{1}{\cos.^2B} - 1\right)$, o vero

$$e = -\frac{AB}{\cos.B} \times \frac{AB^2 \tan g.^2B}{3R''R''}.$$

Il limite è lo stesso che quello (528).

530. *Dati due lati*, AB, AC, la cui somma non sia maggiore di 4°, *trovare uno degli angoli*, come B.

La Trigonometria sferica dà $\text{tang.B} = \frac{\text{tang.AC}}{\text{sen.AB}}$; e la rettilinea $\text{tang.}(B - e) = \frac{AC}{AB}$. Dunque $\text{tang.B} - \text{tang.}(B - e) = \frac{AC}{AB}\left(\frac{1 + \frac{1}{3}AC^2}{1 - \frac{1}{6}AB^2} - 1\right) = \frac{AC}{AB} \times \frac{2\,AC^2 + AB^2}{6 - AB^2} = \frac{e}{\cos.^2 B}$, (II. 24°). Negligendo nel denominatore il termine AB^2, il qual non darebbe, con la divisione, che quantità d'ordini superiori al terzo, e ponendo $\frac{AB^2}{BC^2}$ in vece di $\cos.^2 B$, BC^2 in cambio di $AC^2 + AB^2$, si ha $e = \frac{1}{6}AB \times AC \times \frac{BC^2 + AC^2}{BC^2} = \frac{1}{6}AB \times AC\left(1 + \frac{AC^2}{BC^2}\right)$, o vero

$$e = \frac{AB \times AC}{6R''}(1 + \text{sen.}^2 B).$$

531. *Dati due lati*, AB, AC, la cui somma non sia maggiore di 8°, *trovare l'ipotenusa* BC.

Abbiamo ottenuto (523), $BC^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{1}{3}AB^2 \times AC^2$. Dunque $BC = \sqrt{(AB^2 + AC^2 - \frac{1}{3}AB^2 \times AC^2)}$; e per via della formola Neutoniana, negligendo le quantità di quinto ordine, $BC = \sqrt{(AB^2 + AC^2)} - \frac{AB^2 \times AC^2}{6\sqrt{(AB^2 + AC^2)}}$. Laonde

$$e = -\frac{AB^2 \times AC^2}{6R''\,R''\sqrt{(AB^2 + AC^2)}}.$$

Siccome il presente problema occorre frequentissimamente, così do qui pronto il log. costante $8,59300 = \log.\frac{1}{6R''\,R''}$.

Per darun esempio dell'utilità della nostra formola, siano $AB = 4°\,1'\,13''$, $AC = 3°\,55'\,17''$; si troverà, facendo uso de' logaritmi con sette decimali, $\sqrt{(AB^2 + AC^2)} = 5°\,36'\,57'',75$. Quindi $\log. -e = 8,59300 + 2\log.AB + 2\log.AC - \log.\sqrt{(AB^2 + AC^2)} = 0,90787$; e per conseguenza $e = -8'',09$, e l'ipotenusa cercata $BC = 5°\,36'\,49'',66$, senza errore nè pur di un centesimo di secondo. La formola ordinaria $\cos.BC = \cos.AB\,\cos.AC$ non dà esattamente nè pure i secondi, quando BC sia minore di 4°, e commette errore tanto più grave, quanto più BC sia minore di 4°.

L'espressione $\sqrt{(AB^2 + AC^2)}$ si calcola ordinariamente per

mezzo di un angolo. Si ha, per esempio, $\text{tang.B} = \frac{AC}{AB}$, indi BC o $\sqrt{(AB^2 + AC^2)} = \frac{AB}{\text{cos.B}}$. Si avverta che in quest' ultima equazione deve impiegarsi l'angolo B quale è dato dalla precedente, senza applicarvi la correzione (530): quì cade opportuno l'uso del metodo (200).

532. *Dati i due angoli*, convien sempre cercare in primo luogo l'ipotenusa, con la formola (437); indi, con l'ipotenusa e un angolo, potranno trovarsi i lati, coi mezzi somministrati (518, 519).

533. Coi metodi precedenti, si può anche risolvere un triangolo, nel quale un lato solo sia piccolo. Ne darò un esempio. Sia P il polo artico, A l'Osservatorio reale di Parigi, M la città di Marsiglia, o sia quel punto di essa, il qual servì di segnale nelle operazioni; e sia ME un arco di circolo massimo, perpendicolare sopra AE. Suppongo che, per una catena di triangoli, e coi metodi (341), sia stata determinata la distanza ME da Marsiglia al meridiano di Parigi, di 126210 tese, e la distanza AE alla perpendicolare, di 314131 tese. Dissi (416) che ME si chiama anche la *differenza di longitudine*, e AE la *differenza di latitudine* fra i due luoghi di cui si tratta: ma queste denominazioni sono inesatte ed improprie, poichè la differenza di longitudine è veramente l'angolo P, e la differenza di latitudine l'arco AL, posto PL = PM. Però, dati ME, AE, se ne deduce facilmente il valore di P, e di AL, supponendo che si conosca la distanza di uno de' due luoghi dal polo. In fatti, sia $AP = 41^\circ\, 9'\, 46''$; se si riduce AE in secondi, con la proporzione (290), si trova $AE = 5^\circ\, 30'\, 4''$, 5; e per conseguenza $PE = 46^\circ\, 39'\, 50''$, 5. Allora nel triangolo PEM rettangolo in E si ha (VI. 14ª), $\text{cot.P} = \text{sen.PE cot.ME}$, o vero $\text{tang.P} = \frac{\text{tang.ME}}{\text{sen.PE}}$. Laonde $P + \frac{1}{3}P^3 = \frac{ME + \frac{1}{3}ME^3}{\text{sen.PE}}$, e $P = \frac{ME}{\text{sen.PE}} (1 + \frac{1}{3}ME^2) - \frac{1}{3}P^3$. Ponendo al solito $\frac{ME^3}{\text{sen.}^3 PE}$ in vece di P^3, (il che suppone che si negligano le potenze superiori alla quarta), si ha $P = \frac{ME}{\text{sen.PE}} \left(1 + \frac{1}{3}ME^2 \times \overline{1 - \frac{1}{\text{sen.}^2 PE}}\right)$, e per conseguenza P =

Fig. 60

$\frac{ME}{sen.PE} \times (1 - \frac{1}{3}ME^2 \times cot.^2PE)$. Ecco il calcolo di questa formola.

$$
\begin{aligned}
\log.ME = 126210 \text{ tese} &= 5,1010938 \\
\text{compl.}\log.(R = 3271686 \text{ tese}) &= 3,4852284 \\
\log.(ME \text{ in parti di } R = 1) &= 8,5863222 \\
\log.R'' &= 5,3144251 \\
\text{compl.}\log.\text{sen.}PE &= 0,1382613 \\
\log.\frac{ME}{\text{sen.}PE} &= 4,0390086 = \log.10939'',78 \\
\text{compl.}\log.3 &= 9,5229 \\
\log.ME, \text{ preso quì sopra}, &= 8,5863 \\
\text{idem} &= 8,5863 \\
\log.\cot.PE &= 9,9747 \\
\text{idem} &= 9,9747 \\
\log. - \frac{ME^2 \cot.^2 PE}{3\text{sen.}PE} &= 0,6839 = \log. - 4'',83
\end{aligned}
$$

Onde $P = 10934'',95 = 3^\circ 2' 14'',95$.

Per aver AL, l' equazione ordinaria cos.PM = cos.PE cos.ME mi sembra la più comoda, giacchè AL = PM — PA.

534. Or passo ad esaminare il caso, che è frequentissimo, in cui uno degli archi, che formano l'angolo retto, è arco di parallelo, o sia di cerchio minore. Come quest' arco ne' piccoli triangoli non differisce sensibilmente in lunghezza dalla sua corda, così il triangolo suole risolversi, senza scrupolo, come rettilineo rettangolo. Ma la verità è che l' errore sull' angolo retto può esser notabile, e produrre nelle parti cercate del triangolo alterazioni, non per anco avvertite, ch' io sappia, e pur maggiori di quelle che abbiamo sin quì scoperte. Questo è il terzo punto che si è da noi assunto a trattare (509).

Fig. 61 Sia il piccolo triangolo sferico BAC, rettangolo in A relativamente all' arco di parallelo CDA, P il polo di quest' arco, *Ca* l'arco corrispondente di circolo massimo. Se si risolve il triangolo BAC come rettilineo, si fa uso nel fatto piuttosto dell' arco *Ca*, che

dell' arco CDA; giacchè il primo è quello che più si accosta alla sua corda (385), e per conseguenza alla linea retta. Ma l'angolo a è tanto più piccolo o tanto più grande di 90°, quanto più la distanza al polo aP è minore o maggiore di 90°. In fatti il triangolo isoscele CPa dà (498, 2°), cos.a = tang.$\frac{1}{2}$ aC cot.AP. Facendo, al nostro solito, $e = 90° - a$, si ha

$$e = \tfrac{1}{2} aC \times \text{cot.} aP;$$

la qual formola dà l'errore sull'angolo che si tratta e considera come retto.

535. Supponendo AP $< 90°$, sarà $a < 90°$; ed è facile conoscere che, se si risolve il triangolo BAC come rettilineo rettangolo, nasceranno diversi errori, secondo che i dati sono diversi.

Per esempio, siano dati i lati AB, e ADC in parti di circolo massimo (392).

Si osservi in primo luogo, che ne' piccoli triangoli, di cui si tratta, raro può essere il caso, in cui la differenza di lunghezza fra ADC e aC meriti attenzione. In fatti ADC = P $\times$ sen.AP, (394), e sen.$\frac{1}{2}$ aC = sen.$\frac{1}{2}$P sen.AP, (498, 1°). Eguagliando i due valori di sen.AP presi da queste equazioni, indi riducendo in proporzione quella che ne risulta, si ha

$$P : \text{sen.}\tfrac{1}{2}P :: ADC : \text{sen.}\tfrac{1}{2} aC.$$

Col mezzo di quest' analogia, si potrà ridurre il lato dato ADC ad aC; ma la loro differenza si troverà insensibile ne' casi ordinarj, ne' quali non suole mai essere P $> 1° 30'$.

Prendendo dunque indifferentemente aC in vece di ADC; sia BaC (fig. 62) lo stesso triangolo della fig. 61 formato da tre archi di circolo massimo, e si nomini a l'angolo BaC. Poichè $a < 90°$, s'innalzi dal punto a l'arco perpendicolare aM = aB, e si congiunga CM. Il triangolo CaM sarà quello che si risolve effettivamente, se coi dati aC, aB si risolve BaC come rettangolo. Per conseguenza si troverà l'ipotenusa CM $>$ CB, l'angolo MCa $<$ BCa, e anche CMa sarà diverso da CBa. Questi errori sarebbero

Fig. 62

Fig.62 differenti, se i dati fossero, per esempio, Ba, BC: giacchè, calando l'arco perpendicolare BN, sensibilmente uguale a Ba, il triangolo che si risolverebbe in tal caso sarebbe BCN.

536. Per applicare un rimedio facile a tutti gli errori di questa specie, considero prima, che senza scrupolo può supporsi NBa $=$ BaM $= 90° - a = e$. Ciò posto, col mezzo della formola (534), ho formato la tavola seguente de' valori di e in minuti, e decimali di minuto, supponendo aC $= 1'$, e cominciando dalla distanza al Fig.61 polo AP $= 10°$, per evitare la variazione troppo irregolare dei detti valori, quando la detta distanza è più piccola, nel qual caso bisognerà calcolare espressamente la formola (534), $e = \frac{1}{2}a\text{C} \times \text{cot.}a\text{P}$, o pure, con ogni precisione, $\text{sen.}e = \text{tang.}\frac{1}{2}a\text{C} \times \text{cot.}a\text{P}$.

DIST. al POLO.	VALORI di e.	DIST. al POLO.	VALORI di e.	DIST. al POLO.	VALORI di e.	DIST. al POLO.	VALORI di e.
10°	2', 836	30°	0', 866	50°	0', 420	70°	0', 182
11	2, 572	31	0, 832	51	0, 405	71	0, 172
12	2, 352	32	0, 800	52	0, 391	72	0, 162
13	2, 166	33	0, 770	53	0, 377	73	0, 153
14	2, 005	34	0, 741	54	0, 363	74	0, 143
15	1, 866	35	0, 714	55	0, 350	75	0, 134
16	1, 744	36	0, 688	56	0, 337	76	0, 125
17	1, 635	37	0, 664	57	0, 325	77	0, 115
18	1, 539	38	0, 640	58	0, 312	78	0, 106
19	1, 452	39	0, 617	59	0, 300	79	0, 097
20	1, 374	40	0, 596	60	0, 289	80	0, 088
21	1, 303	41	0, 575	61	0, 277	81	0, 079
22	1, 238	42	0, 555	62	0, 266	82	0, 070
23	1, 178	43	0, 536	63	0, 255	83	0, 061
24	1, 123	44	0, 518	64	0, 244	84	0, 053
25	1, 072	45	0, 500	65	0, 233	85	0, 044
26	1, 025	46	0, 483	66	0, 223	86	0, 035
27	0, 981	47	0, 466	67	0, 212	87	0, 026
28	0, 940	48	0, 450	68	0, 202	88	0, 017
29	0, 902	49	0, 435	69	0, 192	89	0, 009
30	0, 866	50	0, 420	70	0, 182	90	0, 000

Per

Per dare un esempio dell' uso di questa tavola, suppongo che dato un arco di parallelo di 60', come ADC, posto a 30° di distanza dal polo P, si dimandi di quanto l'angolo PAD di 90° ecceda l'angolo *a* formato dall' arco stesso PA, o P*a*, con l'arco di circolo massimo *a*C, corrispondente all' arco ADC. L'equazione della tavola a 30° di distanza dal polo è 0', 866; moltiplicandola per 60, si ha $e = 51', 96 = 51' \; 57'', 6$. Questo è il valore, all' incirca, di NB*a*, nel caso proposto. Per conoscere l'angoletto NB*a*, basta dunque moltiplicare l'equazione della tavola per l'arco *a*C preso in minuti. Fig. 62

537. Conosciuto l'angolo NB*a*, sono note immediatamente le altre differenze dalle parti del triangolo dato CB*a* alle parti corrispondenti del triangolo veramente rettangolo CBN. In fatti 1°. $NBa = N - a = 90° - a$; 2°. $BN = Ba \times \cos. NBa$; questa riduzione di B*a* a BN sarà ordinariamente insensibile. 3°. $Na = Ba \times \text{sen.} NBa$; questa è la riduzione importante. Supponendo $Ba = 1'$, $NBa = 1'$, si ha $Na = 0'', 01745$, e $\log. 0'', 01745 = 8, 242$. Dunque in generale si avrà, per ogni diverso valore di B*a* e di NB*a*, preso in minuti,

$$Na = 0'', 01745 \times Ba \times NBa.$$

Per esempio, sia $Ba = 60'$, $NBa = 20'$, sarà $Na = 0'', 01745 \times 60 \times 20 = 20'', 94$.

Quindi se si fa anche $Ca = 60'$, e se si risolve il triangolo CB*a* come rettilineo rettangolo, si troverà, negligendo la piccola correzione (531), 1° 24' 51'', 17 per il valor dell' ipotenusa. Ma questo è veramente il valor di CM, e non quello di BC. All' incontro, se in questo calcolo in luogo di C*a* s'impiega $CN = 59' \; 39'', 06$, si trova $BC = 1° \; 24' \; 36'', 38$. Donde si vede esser di 14'', 79 l'errore sull' ipotenusa, risolvendo il triangolo CB*a* come rettangolo; e che questo errore sarebbe tanto più grave, quanto più CDA fosse vicino al suo polo. Nel caso presente AP = 56° 18'. Fig. 61

Pp

Le mie correzioni esser possono dunque importanti in Astronomia, quando l'arco di parallelo sia un almicantarat.

538. In tutti i casi, ne' quali un de'lati dell' angolo retto sarà un arco di parallelo, potrà dunque evitarsi ogni errore, risolvendo il triangolo BCN in vece di BCa. Se l'arco di parallelo è uno dei dati, convien diminuirlo della quantità Na (537) prima di risolvere il triangolo BCN. Similmente se l'angolo CBa fosse dato, conviene impiegarlo diminuito della quantità NBa, (536). All'incontro, se aC o CBa sono le cose cercate, converrà, trovate che sieno, applicarvi le medesime correzioni, ma in senso contrario; giacchè la risoluzione del triangolo BCN dà CN e CBN, in vece di Ca e CBa. Del resto la risoluzione del triangolo BCN potrà farsi, volendo grande esattezza, coi metodi e formole (518 a 532).

Fig.62

Resta solo da avvertire, che quando sia AP $>$ 90°, e l'angolo CBa opposto all' arco di parallelo si trovi situato fra il detto arco e il polo, allora la perpendicolare BN cade fuori del triangolo CBa, e per conseguenza le correzioni precedenti devono farsi tutte in senso contrario, di quel che abbiamo prescritto per il caso in cui si abbia AP $<$ 90°.

Fig.61 e 62.

539. Occorre frequentemente, massime in Astronomia, il caso di due triangoli che hanno l'ipotenusa comune, e in ambi i quali un de' lati dell' angolo retto è un arco di parallelo. Dati i due lati, come AB, AC dell' uno de' triangoli, e la differenza, come ACD, di due degli angoli aventi il vertice comune; per trovare il valore de' lati BD, CD dell' altro triangolo, si usa risolvere i detti triangoli come rettilinei rettangoli, e si fa ACD = ABD. Ma questi angoli sono tanto più disuguali, quanto più la correzione ACF dell' angolo A (536), è differente dalla correzione DCM dell' angolo D. Per evitare ogni errore conviene impiegare nel calcolo BF in vece di BA, e MCF in vece di ACD. Ora MCF = BCM — BCF = BCD — DCM — (BCA — ACF) = ACD + ACF — DCM. L'angolo dato ACD deve esser dunque aumentato (o diminuito, se DCM $>$ ACF) della differenza delle due correzioni ACF,

Fig.63

DCM. Allora si avrà MCF = ABD sensibilmente, ed impiegando MCF nel calcolo, si potrà fare uso delle formole (270, 271) per trovare CM, BM. Queste linee si ridurranno poi a CD, BD, (537). Tutto ciò si vedrà quanto sia facile, con un esempio (749).

CAPITOLO XIX.

Delle Analogie differenziali de' Triangoli sferici.

540. Darò le analogie differenziali de' triangoli sferici sotto tre forme. La prima rigorosa, e nuova, per le differenze finite di qualunque grandezza, espresse relativamente alle parti di un triangolo ABC: la seconda, per le differenze infinitesime, nel modo ordinario, aumentando però di molto il numero delle analogie publicate finora, e applicando di più il segno negativo ad una delle variazioni, quando succede in senso contrario dell' altra: la terza porgerà le stesse analogie infinitesimali espresse con le denominazioni delle parti del triangolo, pretermessi i segni, che potranno pigliarsi nell' analogia precedente. Da ognuna delle proporzioni fondamentali ne ricaverò, per via di sostituzioni, tante altre, quante potranno aversi senza introdurre nella seconda ragione più di tre parti del triangolo, o più di due, quando questo è rettangolo. Queste sostituzioni rare volte possono aver luogo nelle analogie finite, o sia della prima forma: sopprimerò poi le analogie della terza forma, quando le infinitesimali risulteranno complicate, e difficili ad ennunziarsi. Stimo bene dar tutte le analogie differenziali una dopo l'altra, senza interromperle con discorso, riserbandomi a dimostrarle in appresso. In tal guisa formano una tavola, alla qual si potrà ricorrere agevolmente.

TAVOLA DELLE ANALOGIE DIFFERENZIALI
DE' TRIANGOLI SFERICI.

Costanti AB, A; *un lato, e un angolo adjacente.*

RAGIONI DELLE VARIAZIONI

DEL LATO ADJACENTE ALL' ANGOLO COSTANTE,

E DELL' ANGOLO ADJACENTE AL LATO COSTANTE.

541. $\text{Sen.}\,\delta AC : \text{sen.}\,\delta B :: \text{sen.}(BC + \delta BC) : \text{sen.}\,C :: \text{sen.}\,BC : \text{sen.}(C - \delta C).$

$$\delta AC : \delta B :: \text{sen.}\,BC : \text{sen.}\,C.$$

La variazione del lato adjacente all' angolo costante
Sta alla variazione dell' angolo adjacente al lato costante,
Come il seno del lato opposto all' angolo costante
Sta al seno dell' angolo opposto al lato costante.

542. $\text{sen.}\,\delta AC : \text{sen.}\,\delta B :: \text{sen.}\,BC\ \text{sen.}(BC + \delta BC) : \text{sen.}\,AB\ \text{sen.}\,A$, (VII. 6°).

$$\delta AC : \delta B :: \text{sen.}^2\,BC : \text{sen.}\,AB\ \text{sen.}\,A.$$

La variazione del lato adjacente all' angolo costante
Stá alla variazione dell' angolo adjacente al lato costante,
Come il quadrato del seno del lato opposto all' angolo costante
Sta al prodotto del seno del lato costante pel seno dell' angolo costante.

543. $\text{sen.}\,\delta AC : \text{sen.}\,\delta B :: \text{sen.}\,AB\,\text{sen.}\,A : \text{sen.}\,C\,\text{sen.}(C - \delta C)$, (VII. 19°), (541).

$$\delta AC : \delta B :: \text{sen.}\,AB\ \text{sen.}\,A : \text{sen.}^2\,C.$$

La variazione del lato adjacente all' angolo costante
Sta alla variazione dell' angolo adjacente al lato costante,
Come il prodotto del seno del lato costante pel seno dell' angolo costante
Sta al quadrato del seno dell' angolo opposto al lato costante.

Se $A = 90°$, o se $AB = 90°$;

544. $\text{sen.}\delta AC : \text{sen.}\delta B :: \text{sen.}AC \cos.(AC + \delta AC) : \text{sen.}B \cos.(B + \delta B)$.

$$\delta AC : \delta B :: \text{sen.}2AC : \text{sen.}2B.$$

La variazione del lato adjacente all'angolo costante
Sta alla variazione dell'angolo adjacente al lato costante,
Come il seno del doppio del primo lato
Sta al seno del doppio del secondo angolo.

RAGIONI DELLE VARIAZIONI
DEL LATO ADJACENTE ALL'ANGOLO COSTANTE, E DELL'ANGOLO OPPOSTO AL LATO COSTANTE.

545. $\text{tang.}\tfrac{1}{2}\delta AC : -\text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta C :: \text{tang.}(BC + \tfrac{1}{2}\delta BC) : \text{sen.}(C - \tfrac{1}{2}\delta C)$.

$$\delta AC : -\delta C :: \text{tang.}BC : \text{sen.}C.$$

La variazione del lato adjacente all'angolo costante
Sta alla variazione dell'angolo opposto al lato costante,
Come la tangente del lato opposto all'angolo costante
Sta al seno dell'angolo opposto al lato costante.

546.* $\text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta AC : -\tfrac{1}{2}\text{sen}\,\delta C :: \dfrac{\text{sen.}AC}{\cos.\tfrac{1}{2}\delta AC\,\text{sen.}C \cot.A + \cos.C \cos(AC + \tfrac{1}{2}\delta AC)} : \text{sen.}(C - \delta C)$.

$$\delta AC : -\delta C :: \text{sen.}AC : \text{sen.}^2 C \cot.A + \text{sen.}C \cos.C \cos.AC.$$

547. $\delta AC : -\delta C :: \text{sen.}BC\ \text{tang.}BC : \text{sen.}AB\ \text{sen.}A$, (VII. 6ª), (545).

Se $A = 90°$;

548. $\text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta AC : -\tfrac{1}{2}\text{sen.}\delta C :: \dfrac{\text{sen.}AC}{\cos.(AC + \tfrac{1}{2}\delta AC)} : \text{sen.}(C - \delta C) \cos.C$, (546).

$$\delta AC : -\delta C :: 2\,\text{tang.}AC : \text{sen.}2C.$$

La variazione del lato
Sta alla variazione dell'angolo opposto al lato costante,
Come il doppio della tangente del lato variabile
Sta al seno del doppio del detto angolo.

Se $AB = 90°$;

549. $\text{sen.}\frac{1}{2}\delta AC : \frac{1}{2}\text{sen.}\delta C :: \frac{\text{cos.}AC}{\text{sen.}(AC + \frac{1}{2}\delta AC)} : \text{sen.}(C + \delta C)\ \text{cos.}C.$

$$\delta AC : \delta C :: 2\,\text{cot.}AC : \text{sen.}2C.$$

La variazione del lato adjacente all'angolo costante
Sta alla variazione dell'angolo opposto al lato costante,
Come il doppio della cotangente del primo lato
Sta al seno del doppio del secondo angolo.

RAGIONI DELLE VARIAZIONI

DEL LATO ADJACENTE ALL'ANGOLO COSTANTE,

E DEL LATO OPPOSTO ALL'ANGOLO COSTANTE.

550. $\text{tang.}\frac{1}{2}\delta AC : \text{tang.}\frac{1}{2}\delta BC :: \text{cos.}\frac{1}{2}\delta C : \text{cos.}(C - \frac{1}{2}\delta C).$

$$\delta AC : \delta BC :: 1 : \text{cos.}C.$$

La variazione del lato adjacente all'angolo costante
Sta alla variazione del lato opposto,
Come il raggio sta al coseno dell'angolo opposto al lato costante.

551.* $\text{sen.}\frac{1}{2}\delta AC : \text{sen.}\frac{1}{2}\delta BC :: 1 : \frac{\text{cos.}\frac{1}{2}\delta AC\ \text{cos}\ AB - \text{cos.}BC\ \text{cos.}(AC + \frac{1}{2}\delta AC)}{\text{sen.}AC\ \text{sen.}(BC + \frac{1}{2}\delta BC)}.$

$$\delta AC : \delta BC :: \text{sen.}BC\ \text{sen.}AC : \text{cos.}AB - \text{cos.}BC\ \text{cos.}AC.$$

552. $\delta AC : \delta BC :: 1 : \text{cos.}AB\ \text{sen.}A\ \text{sen.}B - \text{cos.}A\ \text{cos.}B$, (VII. 12*), (550).

Se $A = 90°$;

553. $\text{sen.}\frac{1}{2}\delta AC : \text{sen.}\frac{1}{2}\delta BC :: \frac{\text{cos.}AC}{\text{sen.}(AC + \frac{1}{2}\delta AC)} : \frac{\text{cos.}BC}{\text{sen.}(BC + \frac{1}{2}\delta BC)}.$

$$\delta AC : \delta BC :: \text{cot.}AC : \text{cot.}BC.$$

Le variazioni dell'ipotenusa e del lato
Sono proporzionali alle cotangenti di essi.

Se $AB = 90°$;

554. $\text{sen.}\frac{1}{2}\delta AC : - \text{sen.}\frac{1}{2}\delta BC :: \frac{\text{sen.}AC}{\text{cos.}(AC + \frac{1}{2}\delta AC)} : \frac{\text{cos.}BC}{\text{sen.}(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}.$

$$\delta AC : - \delta BC :: \text{tang.}AC : \text{cot.}BC.$$

La variazione del lato adjacente all'angolo costante
Sta alla variazione del lato opposto,
Come il prodotto delle tangenti dei detti lati sta al raggio.

RAGIONI DELLE VARIAZIONI

DEL LATO OPPOSTO ALL'ANGOLO COSTANTE, E DELL'ANGOLO ADJACENTE AL LATO COSTANTE.

555. $\text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta BC : \text{tang.}\tfrac{1}{2}\delta B :: \text{sen.}(BC + \tfrac{1}{2}\delta BC) : \text{tang.}(C - \tfrac{1}{2}\delta C).$

$$\delta BC : \delta B :: \text{sen.}BC : \text{tang.}C.$$

La variazione del lato opposto all' angolo costante
Sta alla variazione dell' angolo adjacente al lato costante,
Come il seno del lato opposto all' angolo costante
Sta alla tangente dell' angolo opposto al lato costante.

556.* $\tfrac{1}{2}\text{sen.}\delta BC : \text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta B :: \frac{\cos.\frac{1}{2}\delta B\,\text{sen.}BC\,\cot.AB - \cos.BC\cos(B + \frac{1}{2}\delta B)}{\text{sen.}B} : \frac{1}{\text{sen}(BC + \delta BC)}.$

$$\delta BC : \delta B :: \text{sen.}^2BC\,\cot.AB - \text{sen.}BC\,\cos.BC\,\cos.B : \text{sen.}B.$$

557. $\delta BC : \delta B :: \text{sen.}AB\,\text{sen.}A : \text{sen.}C\,\text{tang.}C$, (VII. 19ª), (555).

Se $A = 90°$;

558. $\tfrac{1}{2}\text{sen.}\delta BC : \text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta B :: \text{sen.}(BC + \delta BC)\cos.BC : \frac{\cos.B}{\text{sen.}(B + \frac{1}{2}\delta B)}.$

$$\delta BC : \delta B :: \text{sen.}2BC : 2\cot.B.$$

La variazione dell' ipotenusa
Sta alla variazione dell' angolo adjacente al lato costante,
Come il seno del doppio dell' ipotenusa
Sta al doppio della cotangente del detto angolo.

Se $AB = 90°$;

559. $-\tfrac{1}{2}\text{sen.}\delta BC : \text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta B :: \text{sen.}(BC - \delta BC)\cos.BC : \frac{\text{sen.}B}{\cos.(B + \frac{1}{2}\delta B)}.$

$$-\delta BC : \delta B :: \text{sen.}2BC : 2\,\text{tang.}B.$$

La variazione del lato opposto all' angolo costante
Sta alla variazione dell' angolo adjacente al lato costante,
Come il seno del doppio del primo lato
Sta al doppio della tangente del secondo angolo.

RAGIONI DELLE VARIAZIONI

DEL LATO OPPOSTO ALL' ANGOLO COSTANTE, E DELL' ANGOLO OPPOSTO AL LATO COSTANTE.

560.* $\text{tang.}\frac{1}{2}\delta BC : -\text{tang.}\frac{1}{2}\delta C :: \text{tang.}(BC + \frac{1}{2}\delta BC) : \text{tang.}(C - \frac{1}{2}\delta C)$.

$\delta BC : -\delta C :: \text{tang.}BC : \text{tang.}C$.

La variazione del lato opposto all' angolo costante,
E la variazione dell' angolo opposto al lato costante
Sono proporzionali alle tangenti di dette variabili.

561. $\delta BC : -\delta C :: \text{sen.}AC : (\text{cos.}AC + \text{tang.}C\ \text{cot.}A)\ \text{sen.}C$, (VII. 32°).

562. $\delta BC : -\delta C :: (\text{tang.}BC\ \text{cot.}AB - \text{cos.}B)\ \text{sen.}BC : \text{sen.}B$, (VII. 18°), (560).

Se $A = 90°$;

563. $\delta BC : -\delta C :: \text{sen.}BC : \text{cot.}B$, (430, 3°), (560).

La variazione dell' ipotenusa
Sta alla variazione dell' angolo opposto al lato costante,
Come il seno dell' ipotenusa
Sta alla cotangente dell' altro angolo.

Se $AB = 90°$;

564. $\delta BC : \delta C :: \text{sen.}BC : \text{tang.}B$, (562).

La variazione del lato opposto all' angolo costante
Sta alla variazione dell' angolo opposto al lato costante,
Come il seno del lato opposto all' angolo costante
Sta alla tangente dell' angolo variabile adjacente al lato costante.

RAGIONI DELLE VARIAZIONI

DEI DUE ANGOLI.

565. $\text{tang.}\frac{1}{2}\delta B : -\text{tang.}\frac{1}{2}\delta C :: \text{cos.}\frac{1}{2}\delta BC : \text{cos.}(BC + \frac{1}{2}\delta BC)$.

$\delta B : -\delta C :: 1 : \text{cos.}BC$.

La variazione dell' angolo adjacente al lato costante
Sta alla variazione dell' angolo opposto,
Come il raggio sta al coseno del lato opposto all' angolo costante.

566.

566.* $\text{sen.}\frac{1}{2}\delta B : -\text{sen.}\frac{1}{2}\delta C :: 1 : \frac{\cos.\frac{1}{2}\delta B \cos.A + \cos.C \cos.(B+\frac{1}{2}\delta B)}{\text{sen.}B\ \text{sen.}(C-\frac{1}{2}\delta C)}$.

$$\delta B : -\delta C :: \text{sen.}B\ \text{sen.}C : \cos.A + \cos.B \cos.C.$$

567. $\delta B : -\delta C :: 1 : \cos.A\ \text{sen.}AB\ \text{sen.}AC + \cos.AB \cos.AC$, (VII, 26ª), (565).

Se $A = 90°$;

568. $\text{sen.}\frac{1}{2}\delta B : -\text{sen.}\frac{1}{2}\delta C :: \frac{\text{sen.}B}{\cos.(B+\frac{1}{2}\delta B)} : \frac{\cos.C}{\text{sen.}(C-\frac{1}{2}\delta C)}$.

$$\delta B : -\delta C :: \text{tang.}B : \cot.C.$$

La variazione dell' angolo adjacente al lato costante
Sta alla variazione dell' angolo opposto,
Come il prodotto delle tangenti degli angoli stessi sta al raggio.

Se $AB = 90°$;

569. $\text{sen.}\frac{1}{2}\delta B : \text{sen.}\frac{1}{2}\delta C :: \frac{\cos.B}{\text{sen.}(B+\frac{1}{2}\delta B)} : \frac{\cos.C}{\text{sen.}(C+\frac{1}{2}\delta C)}$.

$$\delta B : \delta C :: \cot.B : \cot.C.$$

Le variazioni degli angoli
Sono proporzionali alle cotangenti di essi.

Costanti BC, A; *un lato, e l'angolo opposto.*

RAGIONI DELLE VARIAZIONI

DEI DUE LATI.

570. $\text{tang.}\frac{1}{2}\delta AB : -\text{tang.}\frac{1}{2}\delta AC :: \frac{\cos.(C+\frac{1}{2}\delta C)}{\cos.\frac{1}{2}\delta C} : \frac{\cos.(B-\frac{1}{2}\delta B)}{\cos.\frac{1}{2}\delta B}$.

$$\delta AB : -\delta AC :: \cos.C : \cos.B.$$

Le variazioni de' lati
Sono proporzionali ai coseni degli angoli opposti.

571. $\delta AB : -\delta AC :: \cos.AB\ \text{sen.}A\ \text{tang.}B - \cos.A : 1$, (VII. 12ª).

572. $\delta AB : -\delta AC :: 1 : \cos.AC\ \text{sen.}A\ \text{tang.}C - \cos.A$, (VII. 10ª), (570).

573.* $\delta AB : -\delta AC :: \frac{\text{sen.}AB}{\text{sen.}AC} : \frac{\cos.AC - \cos.BC \cos.AB}{\cos.AB - \cos.BC \cos.AC}$, (VII. 11ª, 9ª), (570).

574.* $\delta AB : -\delta AC :: 1 : \frac{1 - \text{tang.}AC \cot.AB \cos.A}{\text{tang.}AC \cot.AB - \cos.A}$, (VII. 26ª).

Se $A = 90°$;

575. $\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}\delta AB}{-\text{sen.}\frac{1}{2}\delta AC} : 1 :: \frac{\text{cos.}(AB + \delta AB)}{\text{sen.}(AB + \frac{1}{2}\delta AB)} \cdot \frac{\text{cos.}AC}{\text{sen.}(AC - \frac{1}{2}\delta AC)} :: \frac{\text{cot.}AB}{\text{sen.}(AB + \frac{1}{2}\delta AB)} \cdot \frac{\text{cos.}(AC - \delta AC)}{\text{sen}(AC - \frac{1}{2}\delta AC)}$

$$\delta AB : -\delta AC :: \text{cot.}AB : \text{cot.}AC.$$

Le variazioni de' lati
Sono proporzionali alle cotangenti di essi.

Se $BC = 90°$;

576. $\text{sen.}\delta AB : -\text{sen}\,\delta AC :: \text{sen.}AB\,\text{cos.}(AB + \delta AB) : \text{sen}(AC - \delta AC)\,\text{cos.}AC.$

$$\delta AB : -\delta AC :: \text{sen.}2AB : \text{sen.}2AC, \ (\text{I. } 6°).$$

Le variazioni de' lati
Sono proporzionali ai seni de' lati doppj.

577. $\text{sen.}\delta AB : -\text{sen.}\delta AC :: \text{cos.}(C + \delta C) : \text{cos.}B :: \text{cos.}C : \text{cos.}(B - \delta B).$

$$\delta AB : -\delta AC :: \text{cos.}C : \text{cos.}B.$$

578. $\delta AB : \delta AC :: \text{cos.}A : \text{cos.}^2B :: \text{cos.}^2C : \text{cos.}A.$

La variazione di un lato
Sta alla variazione dell' altro,
Come il quadrato del coseno dell' angolo opposto al primo lato
Sta al coseno dell' angolo costante.

RAGIONI DELLE VARIAZIONI

DEI DUE ANGOLI.

579. $\text{tang.}\frac{1}{2}\delta C : -\text{tang.}\frac{1}{2}\delta B :: \frac{\text{cos.}(AB + \frac{1}{2}\delta AB)}{\text{cos.}\frac{1}{2}\delta AB} : \frac{\text{cos.}(AC - \frac{1}{2}\delta AC)}{\text{cos.}\frac{1}{2}\delta AC}.$

$$\delta C : -\delta B :: \text{cos.}AB : \text{cos.}AC.$$

Le variazioni degli angoli
Sono proporzionali ai coseni de' lati opposti.

580. $\delta C : -\delta B :: \text{cos.}C\,\text{sen.}BC\,\text{tang.}AC + \text{cos.}BC : 1$, (VII. 30°).

581. $\delta C : -\delta B :: 1 : \text{cos.}B\,\text{sen.}BC\,\text{tang.}AB + \text{cos.}BC$, (VII. 28°), (579).

582.* $\delta C : -\delta B :: \frac{\text{sen.}C}{\text{sen.}B} : \frac{\text{cos.}B + \text{cos.}A\,\text{cos.}C}{\text{cos.}C + \text{cos.}A\,\text{cos.}B}$, (VII. 29°, 27°), (579).

583.* $\delta C : -\delta B :: \text{tang.}B\,\text{cot.}C + \text{cos.}BC : 1 + \text{tang.}B\,\text{cot.}C\,\text{cos.}BC$, (VII. 8°).

Se $A = 90°$;

584. $\text{sen.}\delta C : -\text{sen.}\delta B :: \text{sen.}C\ \cos.(C + \delta C) : \text{sen.}(B - \delta B)\cos.B.$

$$\delta C : -\delta B :: \text{sen.}2C : \text{sen.}2B.$$

Le variazioni degli angoli
Sono proporzionali ai seni degli angoli doppj.

585. $\text{sen.}\delta C : -\text{sen.}\delta B :: \cos.(AB + \delta AB) : \cos.AC :: \cos.AB : \cos.(AC - \delta AC)$

$$\delta C : -\delta B :: \cos.AB : \cos.AC.$$

586. $\delta C : -\delta B :: \cos.BC : \cos.^2 AC :: \cos.^2 AB : \cos.BC$, (430; 10°, 7°).
La variazione di un angolo
Sta alla variazione dell' altro ;
Come il quadrato del coseno del lato opposto al primo angolo
Sta al coseno dell' ipotenusa.

Se $BC = 90°$;

587. $\text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta C : -\text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta B :: \frac{\cos.(C + \delta C)}{\text{sen.}(C + \frac{1}{2}\delta C)} : \frac{\cos.B}{\text{sen.}(B - \frac{1}{2}\delta B)} :: \frac{\cos.C}{\text{sen.}(C + \frac{1}{2}\delta C)} : \frac{\cos.(B - \delta B)}{\text{sen.}(B - \frac{1}{2}\delta B)}$

$$\delta C : -\delta B :: \cot.C : \cot.B.$$

Le variazioni degli angoli
Sono proporzionali alle cotangenti di essi.

RAGIONI DELLE VARIAZIONI

DI UN LATO, E DELL' ANGOLO OPPOSTO.

588.* $\text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta AB : \text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta C :: \frac{\text{sen.}AB}{\cos.(AB + \frac{1}{2}\delta AB)} : \frac{\text{sen.}C}{\cos.(C + \frac{1}{2}\delta C)}.$

$$\delta AB : \delta C :: \text{tang.}AB : \text{tang.}C.$$

Le variazioni di un lato, e dell' angolo opposto,
Sono proporzionali alle tangenti di essi.

589. $\delta AB : \delta C :: \text{sen.}AC : \text{sen.}A + \cos.A\ \cos.AC\ \text{tang.}C$, (VII. 35°).

590. $\delta AB : \delta C :: \text{sen.}BC : \text{sen.}B + \cos.B\ \cos.BC\ \text{tang.}C$, (VII. 36°), (588).

591. $\delta AB : \delta C :: \text{sen.}AC - \cos.AC\ \cos.A\ \text{tang.}AB : \text{sen.}A$, (VII. 17°), (588.)

592. $\delta AB : \delta C :: \text{sen.}BC - \cos.BC\ \cos.B\ \text{tang.}AB : \text{sen.}B$, (VII. 18°), (588).

Similmente

593.* $-\text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta AC : -\text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta B :: \frac{\text{sen.}AC}{\cos.(AC - \frac{1}{2}\delta AC)} : \frac{\text{sen.}B}{\cos.(B - \frac{1}{2}\delta B)}.$

$$-\delta AC : -\delta B :: \text{tang.}AC : \text{tang.}B.$$

594. $-\delta AC : -\delta B :: \text{sen.}AB : \text{sen.}A + \cos.A \cos.AB\ \text{tang.}B.$

595. $-\delta AC : -\delta B :: \text{sen.}BC : \text{sen.}C + \cos.C \cos.BC\ \text{tang.}B.$

596. $-\delta AC : -\delta B :: \text{sen.}AB - \cos.AB \cos.A\ \text{tang.}AC : \text{sen.}A.$

597. $-\delta AC : -\delta B :: \text{sen.}BC - \cos.BC \cos.C\ \text{tang.}AC : \text{sen.}C.$

RAGIONI DELLE VARIAZIONI

DI UN LATO, E DELL' ANGOLO ADJACENTE.

598. $\text{tang.}\tfrac{1}{2}\delta AB : -\tfrac{1}{2}\text{sen.}\delta B :: \frac{\text{sen.}AC}{\cos.\frac{1}{2}\delta AC \cos.(AC - \frac{1}{2}\delta AC)} \times \frac{\cos.(C + \frac{1}{2}\delta C)}{\cos.\frac{1}{2}\delta C} : \text{sen.}B.$

$$\delta AB : -\delta B :: \text{tang.}AC \cos.C : \text{sen.}B.$$

La variazione di un lato
Sta alla variazione dell' angolo adjacente,
Come il prodotto della tang. dell' altro lato variab. pel cos. dell' altro ang. var.
Sta al seno del primo dei detti angoli.

599. $\text{tang.}\tfrac{1}{2}\delta AB : -\tfrac{1}{2}\text{sen.}\delta B :: \text{sen.}AB : \frac{\cos.\frac{1}{2}\delta AC \cos.(AC - \frac{1}{2}\delta AC)\ \text{sen.}C \cos.\frac{1}{2}\delta C}{\cos(C + \frac{1}{2}\delta C)}.$

$$\delta AB : -\delta B :: \text{sen.}AB : \cos.AC\ \text{tang.}C.$$

La variazione di un lato
Sta alla variazione dell' angolo adjacente,
Come il seno dello stesso lato
Sta al prodotto del cos. dell' altro lato variabile per la tang. dell' altro ang. variab.

600. $\delta AB : -\delta B :: \cos.AB\ \text{tang.}AC - \text{sen.}AB \cos.A : \text{sen.}A$, (VII. 17ª).

601. $\delta AB : -\delta B :: \text{sen.}BC : \cos.B\ \text{tang.}C + \text{sen.}B \cos.BC$, (VII. 33ª), (598).

602.* $\delta AB : -\delta B :: \frac{\text{tang.}BC - \cos.B\ \text{tang.}AB}{\text{sen.}B} : 1 + \cos.B\ \text{tang.}AB\ \text{tang.}BC$, (VII. 18ª).

603.* $\delta AB : -\delta B :: \text{sen.}AB : \frac{\text{tang.}B \cos.AB + \text{tang.}A}{\text{tang.}A\ \text{tang.}B \cos.AB - 1}$, (VII. 31ª).

Similmente

$$604.\ -\text{tang.}\tfrac{1}{2}\delta AC : \tfrac{1}{2}\text{sen.}\delta C :: \frac{\text{sen.}AB}{\cos.\tfrac{1}{2}\delta AB\ \cos.(AB+\tfrac{1}{2}\delta AB)} \times \frac{\cos.(B-\tfrac{1}{2}\delta B)}{\cos.\tfrac{1}{2}\delta B} : \text{sen.}C.$$

$$-\delta AC : \delta C :: \text{tang.}AB\ \cos.B : \text{sen.}C.$$

$$605.\ -\text{tang.}\tfrac{1}{2}\delta AC : \tfrac{1}{2}\text{sen.}\delta C :: \text{sen.}AC : \frac{\cos.\tfrac{1}{2}\delta AB\ \cos.(AB+\tfrac{1}{2}\delta AB)\ \text{sen.}B\cos\tfrac{1}{2}\delta B}{\cos.(B-\tfrac{1}{2}\delta B)}.$$

$$-\delta AC : \delta C :: \text{sen.}AC : \cos.AB\ \text{tang.}B.$$

$$606.\ -\delta AC : \delta C :: \cos.AC\ \text{tang.}AB - \text{sen.}AC\cos.A : \text{sen.}A.$$

$$607.\ -\delta AC : \delta C :: \text{sen.}BC : \cos.C\ \text{tang.}B + \text{sen.}C\cos.BC.$$

$$608.^{*}\ -\delta AC : \delta C :: \frac{\text{tang.}BC - \cos.C\ \text{tang.}AC}{1 + \text{tang.}BC\ \cos.C\ \text{tang.}AC} : \text{sen.}C.$$

$$609.^{*}\ -\delta AC : \delta C :: \text{sen.}AC : \frac{\text{tang.}C\ \cos.AC + \text{tang.}A}{\text{tang.}C\ \cos.AC\ \text{tang.}A - 1}.$$

Se $A = 90^\circ$;

$$610.\ \tfrac{1}{2}\text{sen.}\delta AB : -\text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta B :: \text{sen.}AB\cos.(AB+\delta AB) : \frac{\cos.B}{\text{sen.}(B-\tfrac{1}{2}\delta B)}.$$

$$\delta AB : -\delta B :: \text{sen.}2AB : 2\cot.B.$$

La variazione di un lato
Sta alla variazione dell' angolo adjacente;
Come il seno del doppio del lato stesso
Sta al doppio della cotangente del detto angolo.

Similmente

$$611.\ -\tfrac{1}{2}\text{sen.}\delta AC : \text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta C :: \text{sen.}AC\cos.(AC-\delta AC) : \frac{\cos.C}{\text{sen.}(C+\tfrac{1}{2}\delta C)}.$$

$$-\delta AC : \delta C :: \text{sen.}2AC : 2\cot.C,$$

Se $BC = 90^\circ$;

$$612.\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta AB : -\tfrac{1}{2}\text{sen.}\delta B :: \frac{\cos.AB}{\text{sen.}(AB+\tfrac{1}{2}\delta AB)} : \text{sen.}B\cos.(B-\delta B).$$

$$\delta AB : -\delta B :: 2\cot.AB : \text{sen.}2B.$$

La variazione di un lato
Sta alla variazione dell' angolo adjacente,
Come il doppio della cotangente del lato stesso
Sta al seno del doppio del detto angolo.

Similmente

613. $-\text{sen.}\frac{1}{2}\delta AC : \frac{1}{2}\text{sen.}\delta C :: \frac{\text{cos.}AC}{\text{sen.}(AC - \frac{1}{2}\delta AC)} : \text{sen.}C\ \text{cos.}(C + \delta C).$

$$-\delta AC : \delta C :: 2\ \text{cot.}AC : \text{sen.}2C.$$

Costanti AB, AC; *due lati.*

RAGIONI DELLE VARIAZIONI

DEI DUE ANGOLI OPPOSTI AI LATI COSTANTI.

614.* $\text{tang.}\frac{1}{2}\delta B : \text{tang.}\frac{1}{2}\delta C :: \text{tang.}(B + \frac{1}{2}\delta B) : \text{tang.}(C + \frac{1}{2}\delta C).$

$$\delta B : \delta C :: \text{tang.}B : \text{tang.}C.$$

Le variazioni degli angoli opposti ai lati costanti
Sono proporzionali alle tangenti degli angoli stessi.

615. $\delta B : \delta C :: \text{cos.}C : \text{sen.}BC\ \text{cot.}AC - \text{cos.}BC\ \text{cos.}C$, (VII. 15ª).

616. $\delta B : \delta C :: \text{cos.}AB - \text{cos.}BC\,\text{cos.}AC : \text{cos.}AC - \text{cos.}BC\,\text{cos.}AB$, (VII. 11ª).

617. $\delta B : \delta C :: \text{sen.}BC\ \text{cot.}AB - \text{cos.}BC\ \text{cos.}B : \text{cos.}B$, (VII. 18ª), (614).

618. $\delta B : \delta C :: 1 : \frac{\text{sen.}AB\ \text{cot.}AC - \text{cos.}AB\ \text{cos.}A}{\text{sen.}AC\ \text{cot.}AB - \text{cos.}AC\ \text{cos.}A}$, (VII. 16ª, 17ª), (614).

RAGIONI DELLE VARIAZIONI

DEL TERZO LATO, E DI UN ANGOLO ADJACENTE.

619. $-\text{sen.}\frac{1}{2}\delta BC : \text{tang.}\frac{1}{2}\delta B :: \text{sen.}(BC - \frac{1}{2}\delta BC) : \text{cot.}(C + \frac{1}{2}\delta C).$

$$-\delta BC : \delta B :: \text{sen.}BC : \text{cot.}C.$$

La variazione del lato
Sta alla variazione di un angolo adjacente,
Come il seno del detto lato
Sta alla cotangente dell' altro angolo adjacente.

620.* $-\text{sen.}\frac{1}{2}\delta BC : \text{sen.}\frac{1}{2}\delta B :: 1 : \frac{\text{cot.}AB\ \text{sen.}(BC - \frac{1}{2}\delta BC) - \text{cos.}B\ \text{cos.}(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}{\text{sen.}(B + \frac{1}{2}\delta B)\ \text{sen.}(BC - \delta BC)}$

$$-\delta BC : \delta B :: \text{sen.}B : \text{cot.}AB - \text{cot.}BC\ \text{cos.}B.$$

621. — $\delta BC : \delta B :: \text{sen.}AB\ \text{sen.}A : \cos.C$, (VII. 19ª), (619).

622. — $\delta BC : \delta B :: \text{sen.}AB : \cos.AB\ \text{sen.}B - \cot.A\ \cos.B$, (VII. 12ª).

Similmente

623. — $\text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta BC : \text{tang.}\tfrac{1}{2}\delta C :: \text{sen.}(BC - \tfrac{1}{2}\delta BC) : \cot.(B + \tfrac{1}{2}\delta B)$.

$$-\delta BC : \delta C :: \text{sen.}BC : \cot.B.$$

624.* — $\text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta BC : \text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta C :: 1 : \frac{\cot.AC\ \text{sen.}(BC - \frac{1}{2}\delta BC) - \cos.C\ \cos.(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}{\text{sen.}(C + \frac{1}{2}\delta C)\ \text{sen.}(BC - \delta BC)}$

$$-\delta BC : \delta C :: \text{sen.}C : \cot.AC - \cot.BC\ \cos.C.$$

625. — $\delta BC : \delta C :: \text{sen.}AC\ \text{sen.}A : \cos.B$.

626. — $\delta BC : \delta C :: \text{sen.}AC : \cos.AC\ \text{sen.}C - \cot.A\ \cos.C$.

Se $AC = 90°$;

627. $\tfrac{1}{2}\text{sen.}\delta BC : \text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta B :: \text{sen.}(BC + \delta BC)\ \cos.BC : \frac{\cos.B}{\text{sen.}(B + \frac{1}{2}\delta B)}$.

$$\delta BC : \delta B :: \text{sen.}2BC : 2\cot.B.$$

La variazione del lato
Sta alla variazione dell' angolo opposto al lato di 90°,
Come il seno del doppio del lato variabile
Sta al doppio della cotangente del detto angolo.

628. — $\delta BC : \delta B :: \cos.AB : \cos.C\ \cot.C$.

Se $AB = 90°$;

Si permuterà C in B, e B in C, nelle analogie (627, 628).

RAGIONI DELLE VARIAZIONI

DEL TERZO LATO, E DELL' ANGOLO OPPOSTO.

629. — $\text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta BC : -\text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta A :: \frac{\text{sen.}AB\ \text{sen.}AC\ \text{sen.}(A - \frac{1}{2}\delta A)}{\text{sen.}(BC - \frac{1}{2}\delta BC)} : 1$.

$$-\delta BC : -\delta A :: \text{sen.}AB\ \text{sen.}AC\ \text{sen.}A : \text{sen.}BC.$$

La variazione del lato
Sta alla variazione dell' angolo opposto,

Come il prodotto del rettangolo de' seni de' lati costanti pel seno dell'angolo
fra essi compreso
Sta al seno del lato variabile.

630. $-\,\delta BC : -\,\delta A :: \text{sen.}AB\ \text{sen.}B : 1$, (VII. 20[a]).

631. $-\,\delta BC : -\,\delta A :: \text{sen.}AC\ \text{sen.}C : 1$, (VII. 4[a]).

La variazione del lato
Sta alla variazione dell' angolo opposto,
Come il prodotto del seno di un lato costante pel seno dell' angolo opposto all' altro lato costante sta al raggio.

Se $AC = 90°$, o se $AB = 90°$;

632. $-\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta BC : -\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta A :: \frac{\text{cos.}BC}{\text{sen.}(BC - \frac{1}{2}\delta BC)} : \frac{\text{cos.}A}{\text{sen.}(A - \frac{1}{2}\delta A)}$.

$$-\,\delta BC : -\,\delta A :: \text{cot.}BC : \text{cot.}A.$$

Le variazioni del lato, e dell'angolo opposto,
Sono proporzionali alle cotangenti di essi.

RAGIONI DELLE VARIAZIONI

DELL'ANGOLO COMPRESO FRA I LATI COSTANTI, E DELL' UNO DEGLI ALTRI DUE ANGOLI.

633.* $-\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta A : \tfrac{1}{2}\text{sen.}\,\delta B :: \frac{1}{\text{sen.}(B + \delta B)} : \frac{\text{cos.}AB\,\text{sen.}B\,\text{sen}(A - \frac{1}{2}\delta A) - \text{cos.}B\,\text{cos.}(A - \frac{1}{2}\delta A)}{\text{sen.}(A - \delta A)}$

$$-\,\delta A : \delta B :: 1 : (\text{cos.}AB - \text{cot.}B\ \text{cot.}A)\ \text{sen.}^2B.$$

634. $-\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta A : \tfrac{1}{2}\text{sen.}\,\delta B :: \frac{\text{sen.}(A - \delta A)}{\text{sen.}(B + \delta B)} : \frac{\text{cos.}C\ \text{sen.}(A - \frac{1}{2}\delta A) - \text{cos.}B\ \text{sen.}\frac{1}{2}\delta A}{\text{sen.}A}$.

$$-\,\delta A : \delta B :: \text{sen.}A : \text{sen.}B\ \text{cos.}C.$$

La variazione dell' angolo opposto al lato variabile
Sta alla variazione dell' uno degli angoli adjacenti,
Come il seno del detto angolo opposto
Sta al prodotto del seno del detto angolo adjacente pel cos. del terzo angolo.

635.

635. $-\text{sen.}\frac{1}{2}\delta A : \text{tang.}\frac{1}{2}\delta B :: \frac{\text{sen.}^2(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}{\text{sen.}BC} : \frac{\text{sen.}AC\ \text{sen.}(A - \frac{1}{2}\delta A)\ \text{sen.}C}{\text{sen.}A\ \text{tang.}(C + \frac{1}{2}\delta C)}$.

$$-\delta A : \delta B :: \text{sen.}BC : \text{sen.}AC\ \text{cos.}C.$$

La variazione dell'angolo opposto al lato variabile
Sta alla variazione dell'uno degli angoli adjacenti,
Come il seno del lato variabile
Sta al prodotto del seno del lato opposto al detto angolo adjacente pel coseno dell' altro angolo adjacente.

636. $-\delta A : \delta B :: \text{sen.}^2 BC : \text{cos.}AB - \text{cos.}BC\ \text{cos.}AC$, (VII. 11*).

637. $-\delta A : \delta B :: 1 : \text{cos.}AB - \text{sen.}AB\ \text{cos.}B\ \text{cot.}BC$, (VII. 28*).

Similmente

638.* $-\text{sen.}\frac{1}{2}\delta A : \frac{1}{2}\text{sen}\delta C :: \frac{1}{\text{sen.}(C + \delta C)} : \frac{\text{cos.}AC\,\text{sen.}C\,\text{sen.}(A - \frac{1}{2}\delta A) - \text{cos.}C\ \text{cos.}(A - \frac{1}{2}\delta A)}{\text{sen.}(A - \delta A)}$

$$-\delta A : \delta C :: 1 : (\text{cos.}AC - \text{cot.}C\ \text{cot.}A)\ \text{sen.}^2 C.$$

639. $-\text{sen.}\frac{1}{2}\delta A : \frac{1}{2}\text{sen.}\delta C :: \frac{\text{sen.}(A - \delta A)}{\text{sen.}(C + \delta C)} : \frac{\text{cos.}B\ \text{sen.}(A - \frac{1}{2}\delta A) - \text{cos.}C\ \text{sen.}\frac{1}{2}\delta A}{\text{sen.}A}$.

$$-\delta A : \delta C :: \text{sen.}A : \text{sen.}C\ \text{cos.}B.$$

640. $-\text{sen.}\frac{1}{2}\delta A : \text{tang.}\frac{1}{2}\delta C :: \frac{\text{sen.}^2(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}{\text{sen.}BC} : \frac{\text{sen.}AB\ \text{sen.}(A - \frac{1}{2}\delta A)\ \text{sen.}B}{\text{sen.}A\ \text{tang.}(B + \frac{1}{2}\delta B)}$.

$$-\delta A : \delta C :: \text{sen.}BC : \text{sen.}AB\ \text{cos.}B.$$

641. $-\delta A : \delta C :: \text{sen.}^2 BC : \text{cos.}AC - \text{cos.}BC\ \text{cos.}AB.$

642. $-\delta A : \delta C :: 1 : \text{cos.}AC - \text{sen.}AC\ \text{cos.}C\ \text{cot.}BC.$

Se $AB = 90°$;

643. $\text{sen.}\frac{1}{2}\delta A : \frac{1}{2}\text{sen.}\delta B :: \frac{\text{sen.}A}{\text{cos.}(A + \frac{1}{2}\delta A)} : \text{sen.}B\ \text{cos.}(B + \delta B).$

$$\delta A : \delta B :: 2\ \text{tang.}A : \text{sen.}2B.$$

La variazione dell'angolo compreso fra i lati costanti
Sta alla variazione dell' altro angolo adjacente al lato di 90°,
Come il doppio della tangente del primo
Sta al seno del doppio del secondo angolo.

644. $\text{sen.}\delta A : \text{sen.}\delta C :: \text{sen.}(A + \delta A)\ \cos.A : \text{sen.}(C + \delta C)\ \cos.C.$

$$\delta A : \delta C :: \text{sen.}2A : \text{sen.}2C.$$

La variazione dell'angolo compreso fra i lati costanti,
E la variazione dell' angolo opposto al lato di 90°,
Sono proporzionali ai seni degli stessi angoli doppj.

645. $- \text{sen.}\delta A : \text{sen.}\delta C :: \text{sen.}(BC - \delta BC) : \cos.B.$

$$- \delta A : \delta C :: \text{sen.}BC : \cos.B.$$

La variazione dell' angolo compreso fra i lati costanti
Sta alla variazione dell' angolo opposto al lato di 90°,
Come il seno del lato variabile
Sta al coseno del terzo angolo.

646. $- \text{sen.}\delta A : \text{sen.}\delta C :: \cos.AC : \cos.B\ \cos.(B + \delta B).$

$$- \delta A : \delta C :: \cos.AC : \cos.^2 B.$$

La variazione dell'angolo compreso fra i lati costanti
Sta alla variazione dell' angolo opposto al lato di 90°,
Come il coseno dell' altro lato costante
Sta al quadrato del coseno del terzo angolo.

Se $AC = 90°$;

Si permuterà B in C, e C in B, nelle analogie (643 a 646).

Costanti B, C; *due angoli.*

RAGIONI DELLE VARIAZIONI
DEI DUE LATI OPPOSTI AGLI ANGOLI COSTANTI.

647.* $\text{tang.}\tfrac{1}{2}\delta AC : \text{tang.}\tfrac{1}{2}\delta AB :: \text{tang.}(AC + \tfrac{1}{2}\delta AC) : \text{tang.}(AB + \tfrac{1}{2}\delta AB).$

$$\delta AC : \delta AB :: \text{tang.}AC : \text{tang.}AB.$$

Le variazioni de' lati opposti agli angoli costanti
Sono proporzionali alle tangenti de' lati stessi.

648. $\delta AC : \delta AB :: \cos.AB : \text{sen}.A \cot.B + \cos.A \cos.AB$, (VII. 34°).

649. $\delta AC : \delta AB :: \cos.C + \cos.A \cos.B : \cos.B + \cos.A \cos.C$, (VII. 29°).

650. $\delta AC : \delta AB :: \text{sen}.A \cot.C + \cos.A \cos.AC : \cos.AC$, (VII. 35°), (647).

651. $\delta AC : \delta AB :: 1 : \frac{\text{sen}.C \cot.B + \cos.C \cos.BC}{\text{sen}.B \cot.C + \cos.B \cos.BC}$, (VII. 33°, 36°), (647).

RAGIONI DELLE VARIAZIONI

DEL TERZO ANGOLO, E DI UN LATO ADJACENTE.

652. $\text{sen}.\tfrac{1}{2}\delta A : \text{tang}.\tfrac{1}{2}\delta AC :: \text{sen}.(A + \tfrac{1}{2}\delta A) : \cot.(AB + \tfrac{1}{2}\delta AB)$.

$$\delta A : \delta AC :: \text{sen}.A : \cot.AB.$$

La variazione dell' angolo
Sta alla variazione di un lato adjacente,
Come il seno del detto angolo variabile
Sta alla cotangente dell' altro lato adjacente.

653.* $\text{sen}.\tfrac{1}{2}\delta A : \text{sen}.\tfrac{1}{2}\delta AC :: \text{sen}(AC + \tfrac{1}{2}\delta AC) : \frac{\cot.C \,\text{sen}(A + \frac{1}{2}\delta A) + \cos.AC \cos.(A + \frac{1}{2}\delta A)}{\text{sen}.(A + \delta A)}$

$$\delta A : \delta AC :: \text{sen}.AC : \cot.C + \cos.AC \cot.A.$$

654. $\delta A : \delta AC :: \text{sen}.BC \,\text{sen}.C : \cos.AB$, (VII. 1°), (652).

655. $\delta A : \delta AC :: \text{sen}.C : \cos.C \,\text{sen}.AC + \cot.BC \cos.AC$, (VII. 30°).

Similmente

656. $\text{sen}.\tfrac{1}{2}\delta A : \text{tang}.\tfrac{1}{2}\delta AB :: \text{sen}.(A + \tfrac{1}{2}\delta A) : \cot.(AC + \tfrac{1}{2}\delta AC)$.

$$\delta A : \delta AB :: \text{sen}.A : \cot.AC.$$

657.* $\text{sen}.\tfrac{1}{2}\delta A : \text{sen}.\tfrac{1}{2}\delta AB :: 1 : \frac{\cot.B \,\text{sen}.(A + \frac{1}{2}\delta A) + \cos.AB \cos.(A + \frac{1}{2}\delta A)}{\text{sen}.(AB + \frac{1}{2}\delta AB)\,\text{sen}.(A + \delta A)}$.

$$\delta A : \delta AB :: \text{sen}.AB : \cot.B + \cos.AB \cot.A.$$

658. $\delta A : \delta AB :: \text{sen}.BC \,\text{sen}.B : \cos.AC$.

659. $\delta A : \delta AB :: \text{sen}.B : \cos.B \,\text{sen}.AB + \cot.BC \cos.AB$.

Se $B = 90°$;

660. $\frac{1}{2}\text{sen.}\delta A : \text{sen.}\frac{1}{2}\delta AC :: \text{sen.}(A + \delta A)\ \text{cos.}A : \frac{\text{cos.}AC}{\text{sen.}(AC + \frac{1}{2}\delta AC)}$.

$$\delta A : \delta AC :: \text{sen.}2A : 2\ \text{cot.}AC.$$

La variazione dell' angolo
Sta alla variazione dell' ipotenusa;
Come il seno del doppio dell' angolo variabile
Sta al doppio della cotangente dell' ipotenusa.

661. $\delta A : \delta AC :: \text{cos.}C : \text{cos.}AB\ \text{cot.}AB$.

Se $C = 90°$;

Si permuterà B in C, e C in B, nelle analogie (660, 661).

RAGIONI DELLE VARIAZIONI

DEL TERZO ANGOLO, E DEL LATO OPPOSTO.

662. $\text{sen.}\frac{1}{2}\delta A : \text{sen.}\frac{1}{2}\delta BC :: \text{sen.}B\ \text{sen.}C\ \text{sen.}(BC + \frac{1}{2}\delta BC) : \text{sen.}(A + \frac{1}{2}\delta A)$.

$$\delta A : \delta BC :: \text{sen.}B\ \text{sen.}C\ \text{sen.}BC : \text{sen.}A.$$

La variazione dell' angolo
Sta alla variazione del lato opposto,
Come il prodotto del rettangolo de' seni degli angoli costanti pel seno del lato compreso
Sta al seno dell' angolo variabile.

663. $\delta A : \delta BC :: \text{sen.}AB\ \text{sen.}B : 1$, (VII. 21°).

664. $\delta A : \delta BC :: \text{sen.}AC\ \text{sen.}C : 1$, (VII. 23°).

La variazione dell' angolo
Sta alla variazione del lato opposto;
Come il prodotto del seno di un angolo costante pel seno del lato opposto all' altro angolo costante sta al raggio.

Se B $= 90°$, o se C $= 90°$;

665. $\text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta A : \text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta BC :: \frac{\cos.A}{\text{sen.}(A+\frac{1}{2}\delta A)} : \frac{\cos.BC}{\text{sen.}(BC+\frac{1}{2}\delta BC)}$.

$$\delta A : \delta BC :: \cot.A : \cot.BC.$$

Le variazioni dell'angolo e del lato opposto
Sono proporzionali alle cotangenti di essi.

RAGIONI DELLE VARIAZIONI

DEL LATO COMPRESO FRA GLI ANGOLI COSTANTI, E D'UNO DEGLI ALTRI DUE LATI.

666.* $\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}\delta BC}{\frac{1}{2}\text{sen.}\delta AC} : 1 :: \frac{1}{\text{sen.}(AC+\delta AC)} : \frac{\cos.C\,\text{sen.}AC\,\text{sen.}(BC+\frac{1}{2}\delta BC)+\cos.AC\cos.(BC+\frac{1}{2}\delta BC)}{\text{sen.}(BC+\delta BC)}$

$$\delta BC : \delta AC :: 1 : (\cos.C + \cot.AC\,\cot.BC)\,\text{sen.}^2AC.$$

667. $\text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta BC : \tfrac{1}{2}\text{sen.}\delta AC :: \frac{\text{sen.}(BC+\delta BC)}{\text{sen.}(AC+\delta AC)} : \frac{\cos.AB\,\text{sen.}(BC+\frac{1}{2}\delta BC)-\cos.AC\,\text{sen.}\frac{1}{2}\delta BC}{\text{sen.}BC}$.

$$\delta BC : \delta AC :: \text{sen.}BC : \text{sen.}AC\,\cos.AB.$$

La variazione del lato opposto all'angolo variabile
Sta alla variazione di uno degli altri due lati,
Come il seno del primo lato
Sta al prodotto del seno del secondo lato pel coseno del terzo lato.

668. $\text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta BC : \text{tang.}\tfrac{1}{2}\delta AC :: \frac{\text{sen.}^2(A+\frac{1}{2}\delta A)}{\text{sen.}A} : \frac{\text{sen.}B\,\text{sen.}(BC+\frac{1}{2}\delta BC)\,\text{sen.}AB}{\text{sen.}BC\,\text{tang.}(AB+\frac{1}{2}\delta AB)}$.

$$\delta BC : \delta AC :: \text{sen.}A : \text{sen.}B\,\cos.AB.$$

La variazione del lato opposto all'angolo variabile
Sta alla variazione di uno degli altri due lati,
Come il seno dell'angolo variabile
Sta al prodotto del seno dell'angolo costante opposto all'ultimo lato pel coseno del terzo lato.

669. $\delta BC : \delta AC :: \text{sen.}^2A : \cos.C + \cos.A\,\cos.B$, (VII. 29°).

670. $\delta BC : \delta AC :: 1 : \cos.C + \text{sen.}C\,\cos.AC\,\cot.A$, (VII. 10°).

Similmente

671.* $\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}\delta BC}{\frac{1}{2}\text{sen.}\,\delta AB} : 1 :: \frac{1}{\text{sen.}(AB + \delta AB)} : \frac{\cos.B\ \text{sen.}AB\ \text{sen.}(BC + \frac{1}{2}\delta BC) + \cos.AB \cos.(BC + \frac{1}{2}\delta BC)}{\text{sen.}(BC + \delta BC)}$.

$$\delta BC : \delta AB :: 1 : (\cos.B + \cot.AB \cot.BC)\ \text{sen.}^2 AB.$$

672. $\text{sen.}\frac{1}{2}\delta BC : \frac{1}{2}\text{sen.}\,\delta AB :: \frac{\text{sen.}(BC + \delta BC)}{\text{sen.}(AB + \delta AB)} : \frac{\cos.AC\ \text{sen.}(BC + \frac{1}{2}\delta BC) - \cos.AB\ \text{sen.}\frac{1}{2}\delta BC}{\text{sen.}BC}$.

$$\delta BC : \delta AB :: \text{sen.}BC : \text{sen.}AB \cos.AC.$$

673. $\text{sen.}\frac{1}{2}\delta BC : \text{tang.}\frac{1}{2}\delta AB :: \frac{\text{sen.}^2(A + \frac{1}{2}\delta A)}{\text{sen.}A} : \frac{\text{sen.}C\ \text{sen.}(BC + \frac{1}{2}\delta BC)\ \text{sen.}AC}{\text{sen.}BC\ \text{tang.}(AC + \frac{1}{2}\delta AC)}$.

$$\delta BC : \delta AB :: \text{sen.}A : \text{sen.}C \cos.AC.$$

674. $\delta BC : \delta AB :: \text{sen.}^2 A : \cos.B + \cos.A \cos.C.$

675. $\delta BC : \delta AB :: 1 : \cos.B + \text{sen.}B \cos.AB \cot.A.$

Se $C = 90°$;

676. $\text{sen.}\frac{1}{2}\delta BC : \frac{1}{2}\text{sen.}\,\delta AC :: \frac{\text{sen.}BC}{\cos.(BC + \frac{1}{2}\delta BC)} : \text{sen.}AC \cos.(AC + \delta AC).$

$$\delta BC : \delta AC :: 2\,\text{tang.}BC : \text{sen.}2AC.$$

La variazione del lato opposto all' angolo variabile
Sta alla variazione dell' altro lato,
Come il doppio della tangente del primo lato
Sta al seno del doppio del secondo lato.

677. $\text{sen.}\delta BC : \text{sen.}\delta AB :: \text{sen.}(BC + \delta BC) \cos.BC : \text{sen.}(AB + \delta AB) \cos.AB.$

$$\delta BC : \delta AB :: \text{sen.}2BC : \text{sen.}2AB,$$

La variazione del lato opposto all' angolo variabile
Sta alla variazione dell' ipotenusa,
Come il seno del doppio del detto lato
Sta al seno del doppio dell' ipotenusa.

678. $\text{sen.}\delta BC : \text{sen.}\delta AB :: \text{sen.}(A + \delta A) : \cos.AC.$

$$\delta BC : \delta AB :: \text{sen.}A : \cos.AC.$$

La variazione del lato opposto all' angolo variabile
Sta alla variazione dell' ipotenusa,
Come il seno dell' angolo variabile
Sta al coseno del lato adjacente.

679. $\text{sen.}\delta BC : \text{sen.}\delta AB :: \cos.B : \cos.AC \cos.(AC + \delta AC)$.

$$\delta BC : \delta AB :: \cos.B : \cos.^2 AC.$$

La variazione del lato opposto all' angolo variabile
Sta alla variazione dell' ipotenusa,
Come il coseno dell' angolo obliquo costante
Sta al quadrato del coseno del lato opposto.

Se $B = 90°$;

Si permuterà C in B, e B in C, nelle analogie (676 a 679).

Dimostrazioni delle Analogie della Tavola precedente.

680. Sia il triangolo sferico ABC convertito in ABD, conservando costanti il lato AB, e l'angolo adjacente A; e sia $CBD = \delta B$, $C - D = \delta C$, $CD = \delta AC$, e $BD - BC = \delta BC$, come si fece (251). Poste queste espressioni, s'intenderanno facilmente le dimostrazioni seguenti. Fig. 64

681. Le analogie finite (541) dipendono dalla proporzione fra i seni de' lati e i seni degli angoli opposti (448), applicata al triangolo BCD.

682. Ogni analogia infinitesimale, che in un medesimo articolo è posta immediatamente dopo un' analogia finita, s'intende dedotta da questa, con le regole usate (253, 264, 265).

Sostituendo nelle analogie (541) il valore di sen.C, (VII. 6ª), si hanno le analogie (542). Questo è il significato della citazione (VII. 6ª), che abbiamo posta (542), e così s'intenderanno tutte le altre citazioni consimili.

Quando poi la sostituzione non è fatta nell' articolo che precede immediatamente, ma in altro articolo più rimoto, allora ho citato di più l'articolo, in cui fu fatta. Così, per esempio, nelle ana-

Fig. 64 logie (543), la citazione (VII. 19ª), (541) significa che l'espressione contenuta nella formola 19ª della tavola VII è stata sostituita nelle analogie dell'articolo 541.

Fuori delle ora dette sostituzioni per gli art. 542, 543, tutte le altre indicate nel progresso della tavola s'intendono sempre fatte nelle analogie infinitesimali, e non mai nelle finite.

683. Quando $A = 90°$, allora $\text{sen.}A = 1$, e $\cos.A = 0$, (42); quindi la formola (VII. 34ª) dà $\text{tang.}AC = \text{tang.}B\ \text{sen.}AB$. Prendendo in questa equazione i differenziali finiti secondo la formola (II. 32ª), e notando che AB è costante, si ha $\frac{\text{sen.}\delta AC}{\cos.AC\ \cos.(AC + \delta AC)}$ $= \frac{\text{sen.}\delta B}{\cos.B\ \cos.(B + \delta B)} \times \text{sen.}AB$. Sostituendo in questa equazione il valore di sen.AB preso dalla precedente (il che basti accennato una volta, giacchè faremo in tal modo sparir la costante in tutte le differenziazioni consimili) si ricaverà tosto la prima analogia (544).

684. Quando $AB = 90°$, allora l'equazione (VII. 34ª) diviene $\text{tang.}AC = \frac{\text{tang.}B}{\text{sen.}A}$, la quale differenziata, facendo A costante, dà pure la prima analogia (544).

L'infinitesimale (544), dedotta come dicemmo (682), resta simplificata nella seconda ragione col mezzo della formola (I. 6ª); il che succede molte volte nel progresso della tavola, nè si avvertirà più.

685. Nel triangolo sferico BCD si ha (IX. 4ª), $\cos.\frac{1}{2}(BCD + D) : \cos.\frac{1}{2}(BCD - D) :: \text{tang.}\frac{1}{2}CD : \text{tang.}\frac{1}{2}(BD + BC)$. Ora $\cos.\frac{1}{2}(BCD + D) = \cos.\frac{1}{2}(180° - \overline{C - D}) = (5)\ \text{sen.}\frac{1}{2}(C - D)$ $= \text{sen.}\frac{1}{2}\delta C$, (680); e $\cos.\frac{1}{2}(BCD - D) = \cos.\frac{1}{2}(180° - \overline{C + D})$ $= \text{sen.}\frac{1}{2}(C + D) = \text{sen.}(C - \frac{1}{2}\delta C)$. Sostituendo questi valori nella prima ragione dell'analogia precedente, e ponendo nella seconda le espressioni (680), si troverà la prima analogia (545).

686. L'operazione precedente suppone $C > D$, vale a dire che l'angolo C diminuisca cangiandosi in D, nel mentre che il lato AC cresce. Per indicare che queste due variazioni si fanno in senso contrario,

contrario, abbiamo aggiunto il segno negativo a sen.$\frac{1}{2}\delta$C. Del resto la supposizione di C $>$ D è sempre vera quando (BC + BD) $<$ 180°, come può intendersi facilmente, applicando la regola (475) al triangolo BCD. Quando poi (BC + BD) $>$ 180°, allora tang.(BC + $\frac{1}{2}\delta$BC) divien negativa, il che rende positivo sen.$\frac{1}{2}\delta$C: di fatti in tal caso C aumenta, cioè C $<$ D. Con ragionamenti consimili, si troverà agevolmente il motivo de' segni negativi, quando gli abbiamo adottati nella prima ragione delle analogie della tavola.

687. Prendendo i differenziali finiti (II. 30ª, 31ª, 33ª) nell'equazione (VII. 17ª) espressa come segue, sen.A cot.C = sen.AC cot.AB — cos.AC cos.A, si ha, rammentando che AB e A sono costanti, $-\frac{\text{sen.}\delta\text{C sen.A}}{\text{sen.C sen.}(\text{C}-\delta\text{C})} = 2\ \text{sen.}\frac{1}{2}\delta\text{AC} \times \left(\text{cos.}\overline{\text{AC}+\frac{1}{2}\delta\text{AC}}\ \text{cot.AB} + \text{sen.}\overline{\text{AC}+\frac{1}{2}\delta\text{AC}}\ \text{cos.A}\right)$. Ponendo il valore (VII. 35ª) di cot.AB, moltiplicando l' equazione per $\frac{\text{sen.AC}}{\text{cos.A}}$, ed osservando che cos.(AC + $\frac{1}{2}\delta$AC) cos.AC + sen.(AC + $\frac{1}{2}\delta$AC) sen.AC = cos.$\frac{1}{2}\delta$AC, (II. 4ª), si troverà $-\ \text{sen.}\delta\text{C} \times \frac{\text{sen.AC tang.A}}{\text{sen.C sen.}(\text{C}-\delta\text{C})} = 2\ \text{sen.}\frac{1}{2}\delta\text{AC} \times \left(\text{tang.A cot.C cos.}\overline{\text{AC}+\frac{1}{2}\delta\text{AC}} + \text{cos.}\frac{1}{2}\delta\text{AC}\right)$. Moltiplicando questa equazione per cot.A, se ne cava poi la prima analogia (546).

Si vedrà (725) il significato dell' asterisco *.

688. Se la formola (VII. 17ª) si fosse presa nel modo seguente, tang.C sen.AC cot.AB — tang.C cos.AC cos.A = sen.A, la differenziazione non sarebbe più stata rigorosa, a motivo che nel differenziare i prodotti delle variabili, tang.C sen.AC, e tang.C cos.AC, si negligono i rettangoli de' differenziali (133), o se si vuole conservarli, si cade in un' espressione complicatissima. Parimente si può far la prova, che, se si differenziasse la formola (VII. 17ª), prendendola come sta nella tavola VII, la differenziazione non sarebbe esatta, quale riuscì (687). Si stabilisca dunque

Fig.64 che, per avere un'equazione differenziale rigorosa, bisogna 1°. che l'equazione, che vuolsi differenziare, sia composta in modo, che niun termine contenga più d'una variabile; 2°. che alcuna variabile non sia nel denominatore di un membro, mentre qualche variabile pur si trovi nel numeratore dell'altro membro. Con queste condizioni niente sarà negletto nel differenziare, (137); faremo vedere in progresso (703, &c.), con quali artifizj si possano ottenere in certi casi che, a primo aspetto, sembrano escluderle.

689. Manca l'analogia differenziale finita corrispondente all'infinitesimale (547), non avendosi, per sostituire nella prima (545), un valore esatto di sen.(C — ½δC) corrispondente a quello di sen.C che ho sostituito nella seconda. Si applicherà questo avvertimento anche agli altri casi, ove mancano nella tavola le analogie finite.

690. La prima analogia (548) per il caso di A = 90°, si cava immediatamente dalla prima (546).

Quando AB = 90°, la formola (VII. 17ª) diviene cot.C = — cos.AC cot.A. Prendendo i differenziali, e notando che verranno ad avere lo stesso segno per causa (683) della sostituzione del valore di cot.A, che è dato negativo dall'equazione precedente, si ricaverà la prima analogia (549).

Si noti l'utilità de' segni che ho inseriti nelle analogie differenziali, poichè fanno conoscere, in questo caso, che, quando AB = 90°, i cangiamenti di C e di AC non sono più in senso contrario, purchè AC e C siano della medesima specie. Questo cangiamento di segno, in confronto delle analogie precedenti, fa vedere quanto facile fosse di prendere in fallo, tanto in questo, quanto in altri casi consimili della tavola, l'incremento pel decremento, o viceversa, nell'adoprar le analogie infinitesimali, quali furono date finora, cioè senza alcuna distinzione di segni.

691. Nel triangolo BCD si ha (IX. 4ª), tang.½(BD — BC) : tang.½CD : : sen.½(BCD — D) : sen.½(BCD + D). Procedendo come si fece (685), quest'analogia si trasforma nella prima (550).

692. Prendendo i differenziali finiti nell' equazione (VII. 26ᵃ), presa con tutti i segni cangiati, onde aver positivi i differenziali de' coseni, si ha $2\,\text{sen.}\frac{1}{2}\delta BC\ \text{sen.}(BC + \frac{1}{2}\delta BC) = 2\,\text{sen.}\frac{1}{2}\delta AC$ $(\cos.AB\ \text{sen.}\overline{AC + \frac{1}{2}\delta AC} - \text{sen.}AB\ \cos.\overline{AC + \frac{1}{2}\delta AC}\ \cos.A)$. Sostituendo il valore (VII. 7ᵃ) di cos.A, e moltiplicando l'equazione per sen.AC, si troverà cos.AB moltiplicato per il valore di $\cos.\frac{1}{2}\delta AC$, enunziato (687); e si avrà tosto la prima analogia (551).

693. Nel differenziare l'equazione (VII. 26ᵃ), ho impiegato $(AC + \frac{1}{2}\delta AC)$, e non $(AC - \frac{1}{2}\delta AC)$, nel differenziale di $-$ sen.AC, il che in apparenza è contrario alla regola data (143). Ma come δAC non può essere positivo e negativo nel tempo stesso, così, avendo adottato il segno positivo per $\text{sen.}\frac{1}{2}\delta AC$, quale lo dà la differenziazione di $-$ cos.AC, ne viene in realtà, per la regola stessa, e per l' altra (154), che deve usarsi per tutto $(AC + \frac{1}{2}\delta AC)$. Se avessi adottato il segno negativo, il secondo membro dell'equazione sarebbe riuscito come segue $- 2\,\text{sen.}\frac{1}{2}\delta AC$ $(\text{sen.}AB\ \cos.\overline{AC - \frac{1}{2}\delta AC}\ \cos.A - \text{sen.}\overline{AC - \frac{1}{2}\delta AC}\ \cos.AB)$. Ho preferito il segno positivo, perchè indicato dall' analogia (550), nella quale si vede che i cangiamenti di AC e di BC si fanno nel medesimo senso, sempre che sia $(C - \frac{1}{2}\delta C) < 90°$, come si deve supporre, per regola generale (459), nella costruzion delle formole.

694. Quando $A = 90°$, l'ultimo termine dell' equazione (692) sparisce, e se in vece di cos.AB si pone in quella $\frac{\cos.BC}{\cos.AC}$, valor che si cava, in tal caso, dalla formola (VII. 26ᵃ), si deduce tosto la prima analogia (553).

Che se, in vece di A, sia $AB = 90°$, la formola citata dà $\cos.BC = \text{sen.}AC\ \cos.A$, dalla quale equazione, differenziata e ridotta come dicemmo (683), si ricava la prima analogia (554).

695. Nel triangolo BCD si ha (IX. 2ᵃ), $\text{sen.}\frac{1}{2}(BD + BC) : \text{sen.}\frac{1}{2}(BD - BC) :: \cot.\frac{1}{2}CBD : \text{tang.}\frac{1}{2}(BCD - D)$. Sostituendo

Fig. 64 le espressioni (680), ed osservando che $\text{tang.}\frac{1}{2}(BCD - D) = \text{cot.}(C - \frac{1}{2}\delta C)$, (685), e che la seconda ragione può rovesciarsi, come segue, $\text{tang.}(C - \frac{1}{2}\delta C) : \text{tang.}\frac{1}{2}\delta B$, l'analogia si converte nella prima (555).

696. La formola (VII. 31ª) può esprimersi come segue: $-\text{cot.}BC\ \text{sen.}AB = -\text{sen.}B\ \text{cot.}A - \text{cos.}B\ \text{cos.}AB$. Prendendo i differenziali finiti, si ha $\frac{\text{sen.}\delta BC\ \text{sen.}AB}{\text{sen.}BC\ \text{sen.}(BC + \delta BC)} = 2\,\text{sen.}\frac{1}{2}\delta B \times (\text{cos.}AB\ \text{sen.}\overline{B + \frac{1}{2}\delta B} - \text{cos.}\overline{B + \frac{1}{2}\delta B}\ \text{cot.}A)$. Ponendo il valore (VII. 13ª) di cot.A, moltiplicando l'equazione per $\frac{\text{sen.}B}{\text{sen.}AB}$, e osservando che $\text{sen.}(B + \frac{1}{2}\delta B)\ \text{sen.}B + \text{cos.}(B + \frac{1}{2}\delta B)\ \text{cos.}B = \text{cos.}\frac{1}{2}\delta B$, (II. 4ª), il che sia detto per l'ultima volta, si ricaverà tosto la prima analogia (556).

697. Se $A = 90°$, dalla formola (VII. 31ª) si ha $\text{cos.}B = \text{tang.}AB\ \text{cot.}BC$. Cangiando i segni, differenziando, e riducendo come si disse (683), si troverà la prima analogia (558).

Operando nel modo stesso sull'equazione $\text{tang.}A\ \text{cot.}BC = \text{sen.}B$, alla qual si riduce la formola (VII. 13ª) quando $AB = 90°$, si perviene alla prima analogia (559).

698. Nel triangolo BCD si ha (474), (P), $\text{tang.}\frac{1}{2}(BD + BC) : \text{tang.}\frac{1}{2}(BD - BC) :: \text{tang.}\frac{1}{2}(BCD + D) : \text{tang.}\frac{1}{2}(BCD - D)$, o vero (685) $:: \text{cot.}\frac{1}{2}\delta C : \text{cot.}(C - \frac{1}{2}\delta C)$, o pure $:: \text{tang.}(C - \frac{1}{2}\delta C) : \text{tang.}\frac{1}{2}\delta C$. Ponendo nella prima ragione di questa analogia le espressioni (680), si vedrà tosto come essa si riduce alla prima (560), avvertendo che $\text{tang.}\frac{1}{2}\delta C$ porta il segno negativo per la stessa causa addotta (686).

699. L'analogia (564) si cava immediatamente dalla (562). Si noti il cangiamento del segno in confronto della (563). È chiaro che, se nel caso di $AB = 90°$ i termini medj sono $-\delta C$, e $-\text{cos.}B\ \text{sen.}BC$, il loro prodotto sarà positivo, e per conseguenza δC in tal caso acquista il segno positivo.

700. Nel triangolo BCD si ha (IX. 2ª), $\text{cos.}\frac{1}{2}(BD + BC) :$

$\cos.\frac{1}{2}(BD - BC) :: \cot.\frac{1}{2}CBD : \tang.\frac{1}{2}(BCD + D)$. Trasformate queste espressioni, al solito, nasce la prima analogia (565).

Differenziando l'equazione (VII. 12ª), indi ponendo il valore (VII. 29ª) di cos.AB, e riducendo come si fece più volte, si ricaverà la prima analogia (566).

701. Dalla medesima si deduce immediatamente la prima analogia (568).

La prima (569) si ottiene, differenziando, al nostro solito, l'equazione, $\cos.C = - \cos.A \cos.B$, a cui si riduce la formola (VII. 12ª) nel caso di $AB = 90°$. I differenziali vengono ad avere lo stesso segno nell'analogia (569), per causa consimile all'accennata (690).

Fig.65.

702. Sia ora il triangolo ABC convertito in ADE, di maniera che sia $DE = BC$: sarà $DF + FE = BF + FC$, e per conseguenza $FE - BF = FC - DF$. Ne' triangoli BFE, CFD, si ha (IX. 4ª)

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}(EBF + E) : \text{sen.}\tfrac{1}{2}(EBF - E) :: \tang.\tfrac{1}{2}BE : \tang.\tfrac{1}{2}(FE - BF);$$
$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}(CDF + C) : \text{sen.}\tfrac{1}{2}(CDF - C) :: \tang.\tfrac{1}{2}CD : \tang.\tfrac{1}{2}(FC - DF).$$

Si osservi 1°. che l'ultimo termine è uguale in queste analogie, sicchè spariscono entrambi, dividendo l'una per l'altra; e resta 1 in loro vece; 2°. che $BE = \delta AB$, e $CD = - \delta AC$; 3°. che $B > E$, e $C < D$, per la stessa ragione addotta (686); donde nasce $E = B - \delta B$, e $D = C + \delta C$. Operando come si fece (685), si ha $\text{sen.}\frac{1}{2}(EBF + E) = \cos.\frac{1}{2}\delta B$, e $\text{sen.}\frac{1}{2}(EBF - E) = \cos.(B - \frac{1}{2}\delta B)$; così $\text{sen.}\frac{1}{2}(CDF + C) = \cos.\frac{1}{2}\delta C$, e $\text{sen.}\frac{1}{2}(CDF - C) = \cos.(C + \frac{1}{2}\delta C)$. Con tali sostituzioni, dalle due analogie precedenti, divise l'una per l'altra, si ricaverà la prima (570).

Si sostituisca nell'analogia (573) il valore (VII. 26ª) di cos.BC; si ponga $1 - \text{sen.}^2AC$ in vece di $\cos.^2AC$, e $1 - \text{sen.}^2AB$ in vece di $\cos.^2AB$; quindi si divida la seconda ragione per sen.^2AB sen.AC cos.AC, e si troverà l'analogia (574).

Fig. 65 703. Quando $A = 90^\circ$, si ha (VII. 26ª), $\cos.BC = \cos.AB \cos.AC$. Poichè il secondo membro di questa equazione è un prodotto di due variabili, a primo aspetto sembra impossibile averne i differenziali finiti (688). Questo è il primo caso nel quale mi accade in quest' Opera d' essere in necessità d' invocare il soccorso delle secanti. Di fatti la difficoltà sparisce facendo, per esempio, $\cos.BC \sec.AB = \cos.AC$.

Per aver l' espressione del differenziale finito di una secante, osservo che $\cos.B - \cos.A = \frac{1}{\sec.B} - \frac{1}{\sec.A} = \frac{\sec.A - \sec.B}{\sec.B \sec.A} = (\sec.A - \sec.B) \cos.B \cos.A$. Quindi (II. 23ª), $\sec.A - \sec.B = \frac{2 \text{sen.} \frac{1}{2}(A - B) \text{sen.} \frac{1}{2}(A + B)}{\cos.A \cos.B}$; donde si cava, procedendo come per gli altri differenziali (139),

$$\delta \sec.B = \frac{2 \text{sen.} \frac{1}{2}\delta B \ \text{sen.}(B + \frac{1}{2}\delta B)}{\cos.B \cos.(B + \delta B)}.$$

Ora differenziando l'equazione $\cos.AC = \cos.BC \sec.AB$, si ha dunque $-2 \text{sen.} \frac{1}{2}\delta AC \ \text{sen.}(AC - \frac{1}{2}\delta AC) = \cos.BC \times \frac{2 \text{sen.} \frac{1}{2}\delta AB}{\cos.AB} \frac{\text{sen.}(AB + \frac{1}{2}\delta AB)}{\cos.(AB + \delta AB)}$. Ponendo $\cos.AB \cos.AC$ in vece di $\cos.BC$, si ricaverà tosto l'analogia formata dalle due prime ragioni (575). Quella formata dalla prima e dalla terza ragione, si trova differenziando l'equazione $-\cos.AB = -\sec.AC \cos.BC$.

704. Quando $BC = 90^\circ$, si ha (VII. 7ª), $\cos.A = -\cot.AB \cot.AC$, o vero $\cos.A \tang.AB = -\cot.AC$. Differenziando, e osservando che uno dei differenziali diventa negativo, con la sostituzione del valor negativo di cos.A, come si disse (690), si ricaverà la prima analogia (576).

Nel caso di $BC = 90^\circ$, si ha pure $\cos.AC = \cos.B \ \text{sen.}AB$, (VII. 28ª); e per la stessa ragione, nel triangolo ADE, $\cos.AE = \cos.D \ \text{sen.}AD$, ovvero $\cos.(AB + \delta AB) = \cos.(C + \delta C) \times \text{sen.}(AC - \delta AC)$. Fatte queste sostituzioni nella prima analogia (576), si avran le due prime ragioni (577).

Nel caso stesso si ha ancora (VII. 8ª), $\cos.A = -\cos.B \cos.C = -\cos.D \cos.E = -\cos.(C + \delta C) \cos.(B - \delta B)$.

Dunque 1°. $\cos.(C + \delta C) : \cos.B :: \cos.C : \cos.(B - \delta B)$, seconda e terza ragione (577). 2°. Prendendo, nell'equazione $\cos.A = - \cos.B \cos.C$, una volta il valore di $\cos.C$, e un' altra quello di $\cos.B$, e sostituendoli alternativamente nella seconda analogia (577), si avranno le analogie (578).

705. Cangiando tutti i segni nella prima analogia (570), indi riducendola al triangolo supplementario, col metodo facile che ho suggerito (440), si considererà che, se AB diminuisce, l' angolo opposto nel triangolo supplementario deve crescere; onde in vece di $- \text{tang.}\frac{1}{2}\delta AB$ si avrà $\text{tang.}\frac{1}{2}\delta C$, e per la stessa ragione $- \text{tang.}\frac{1}{2}\delta B$ in vece di $\text{tang.}\frac{1}{2}\delta AC$. Si sa poi che il coseno di un arco e quello del suo supplemento sono dotati di segno contrario (36), e però in cambio di $- \cos.(C - \frac{1}{2}\delta C)$ si avrà $\cos.(AB + \frac{1}{2}\delta AB)$, e $\cos.(AC - \frac{1}{2}\delta AC)$ in luogo di $- \cos.(B + \frac{1}{2}\delta B)$. Ma in vece di $\cos.\frac{1}{2}\delta C$, si ha $\cos.\frac{1}{2}\delta AB$, e $\cos.\frac{1}{2}\delta AC$ in vece di $\cos.\frac{1}{2}\delta B$, senza alcuna mutazione di segno (154). Con che è dimostrata e composta la prima analogia (579).

706. Sostituito nell'analogia (582) il valore (VII. 8ª) di cos.A, si ponga $1 - \text{sen.}^2 B$ in vece di $\cos.^2 B$, e $1 - \text{sen.}^2 C$ in vece di $\cos.^2 C$; indi si divida la seconda ragione per $\text{sen.}B \cos.B \,\text{sen.}^2 C$, e si troverà l'analogia (583).

Quando $A = 90°$, si ha (VII. 25ª), $\cos.BC = \cot.B \cot.C$, o vero $\cos.BC \,\text{tang.}C = \cot.B$. Differenziando al solito (683), si trova la prima analogia (584).

Nel caso stesso, $\cos.B = \cos.AC \,\text{sen.}C$, (VII. 10ª), e per la stessa ragione $\cos.D = \cos.AE \,\text{sen.}E$, ovvero $\cos.(C + \delta C) = \cos.(AB + \delta AB) \,\text{sen.}(B - \delta B)$. Con queste sostituzioni, dalla prima analogia (584) si hanno le due prime ragioni (585). Ma (VI. 13ª), $\cos.BC = \cos.AB \cos.AC = \cos.AE \cos.AD = \cos.(AB + \delta AB) \cos.(AC - \delta AC)$. Dunque $\cos.(AB + \delta AB) : \cos.AC :: \cos.AB : \cos.(AC - \delta AC)$, seconda e terza ragione (585).

Cangiando i segni nelle analogie (575), indi impiegando il

Fig.65 triangolo supplementario, come abbiam fatto (705), si otterranno le analogie (587).

707. Prendendo i differenziali finiti nell' equazione sen.BC $\times$ sen.C $=$ sen.AB sen.A, (VII. 1ª), indi sostituendo $\frac{\text{sen.AB}}{\text{sen.C}}$ in vece della quantità costante $\frac{\text{sen.BC}}{\text{sen.A}}$, si avrà la prima analogia (588).

Le analogie (593 a 597) si ottengono, permutando B in C, e C in B nelle precedenti (588 a 592). Potevo far positive ambe le variazioni, giacchè sono nel medesimo senso, ma le ho fatte negative, per conservar l'uniformità con le analogie (570, e segg.).

I casi di $A = 90°$ e di $BC = 90°$ non porgono alcuna analogia diversa dalle precedenti (588 a 597), salva la loro simplificazione ne' modi che accennerò (728).

708. La prima analogia (598) si trova, moltiplicando insieme, termine a termine, le analogie finite (570, 593).

Mettendo in essa sen.AB : sen.C, in vece di sen.AC : sen.B, si ha la prima (599).

Posto il valore (VII. 18ª) di tang.C nell' analogia (601), si riduca la seconda ragione ad uno stesso denominatore, affine di eliminarlo; si ponga 1 — sen.²BC in vece di cos.²BC; indi si divida la detta ragione per sen.BC cos.BC cot.AB; si avrà l'analogia (602).

Sostituendo in questa il valore (VII. 31ª) di tang.BC, si farà sparir similmente il denominatore, e si porrà 1 — sen.²B in vece di cos.²B; si dividerà la seconda ragione per sen.B cos.B, si moltiplicherà la detta ragione per cos.AB tang.A; e osservando che sen.²AB + cos.²AB $= 1$, si avrà l'analogia (603).

Le analogie (604 a 609) si ottengono, permutando B in C e C in B nelle analogie (598 a 603), e cangiando i segni ai differenziali, per conservar l' uniformità come dissi (707). Lo stesso s'intenda delle analogie (611), che sono tratte dalle (610).

La prima (610) si trova differenziando, al solito nostro, l' equazione

zione cos.B = tang.AB cot.BC, che è data, nel caso di A = 90°, dalla formola (VII. 31ª).

Quando BC = 90°, dalla formola (VII. 13ª) si cava tang.A × cos.AB = — tang.B. Differenziando, e rammentando il già detto (690) circa il cangiamento del segno, si ottiene la prima analogia (612).

Permutando in essa B in C, si ha la prima (613).

709. Sia ora il triangolo ABC convertito in ABD di maniera Fig.66 che sia AD = AC : i due lati AB, AC saranno costanti, e si avrà sen.AB : sen.AC :: sen.C : sen.B :: sen.D : sen.ABD. L'ultima analogia fa veder che siccome, posti acuti tutti gli angoli al solito (459), il seno maggiore corrisponde all'angolo maggiore, il minore al minore, così se ABD > B come nella figura, deve essere D > C. Faremo dunque, per adoprare le nostre espressioni consuete, CBD = δB, ABD = B + δB, D = C + δC, CAD = — δA, (chiamando sempre A l'angolo BAC del triangolo primitivo ABC), e BD = BC — δBC, giacchè è facile conchiudere dall'equazione (VII. 26ª) che, se A diminuisce, anche la variazion di BC deve essere in meno.

710. L'ultima analogia precedente dà (II. 12ª), tang.½(ABD + B) : tang.½(ABD — B) :: tang.½(D + C) : tang.½(D — C). Sostituendo le espressioni or fissate, quest'analogia si converte nella prima (614).

Nelle analogie (615 a 618) gli stessi archi finiti, che si trovano in una, non si trovano mai tutti in un'altra. Così ebbi attenzione di fare in tutta la tavola, altrimenti avrei creduto inutile ed anzi nocevole il moltiplicare le analogie. E pure quelle date da La Caille nel caso presente sono, δB : δC :: tang.B : tang.C :: sen.AC cos.C : sen.AB cos.B :: sen.B cos.C : sen.C cos.B. Non saprei intendere a quale oggetto abbia dato le ultime due ragioni, ciascuna delle quali suppone noti gli angoli B e C, nel qual caso chi sarà il Calcolatore che non preferisca servirsi della ragione tang.B : tang.C? Più volte s'incontra questa inavvertenza nelle analogie

Fig. 66 di La Caille, nè posso dissimularla, vedendole adottate da molti.

L'essere alcuno de' lati costanti eguale a 90° non produce altre analogie oltre quelle date (614 a 618).

711. Nel triangolo BCD, si ha (IX. 2ª), sen. $\frac{1}{2}$(BC + BD) : sen. $\frac{1}{2}$(BC − BD) :: cot. $\frac{1}{2}$CBD : tang. $\frac{1}{2}$(BDC − BCD). Ma BDC − BCD = D + ADC − (ACD − C) = D + C, a causa che il triangolo CAD è isoscele. Sostituendo questo valore, e le espressioni (709), nell' analogia esposta or ora, si avrà la prima (619).

712. Poichè (VII. 9ª), sen.BC sen.AB cos.B = cos.AC − cos.BC cos.AB, invocando le cosecanti si avrà sen.AB cos.B = cos.AC cosec.BC − cot.BC cos.AB. Il differenziale finito della cosecante si deduce dalla formola (II. 22ª), operando in quel modo, che mi ha servito a trovare (703) il differenziale della secante; ed è, denotando per B un arco qualunque,

$$-\,\delta\,\text{cosec.}B = \frac{2\,\text{sen.}\frac{1}{2}\delta B\;\cos.(B + \frac{1}{2}\delta B)}{\text{sen.}B\;\text{sen.}(B + \delta B)}\,.$$

Ora differenziando la penultima equazione, dopo averne cangiati i segni onde avere δB positivo, e adottando il segno negativo per δBC, tutto ciò per conservar l'uniformità con l'analogia (619), si ha $2\,\text{sen.}\frac{1}{2}\delta B\;\text{sen.}(B + \frac{1}{2}\delta B)\;\text{sen.}AB = -\cos.AC \times \frac{-\,2\,\text{sen.}\frac{1}{2}\delta BC\;\cos.(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}{\text{sen.}BC\;\text{sen.}(BC - \delta BC)} - \frac{\text{sen.}\delta BC\;\cos.AB}{\text{sen.}BC\;\text{sen.}(BC - \delta BC)}$. Si ponga il valore (VII. 28ª) di cos.AC, $2\,\text{sen.}\frac{1}{2}\delta BC\;\cos.\frac{1}{2}\delta BC$ in cambio di $\text{sen.}\delta BC$, e $\cos.BC\;\cos.(BC - \frac{1}{2}\delta BC) + \text{sen.}BC\;\text{sen.}(BC - \frac{1}{2}\delta BC)$ in vece di $\cos.\frac{1}{2}\delta BC$, (II. 4ª): riducendo, e dividendo l'equazione per 2 sen.AB, si ricaverà la prima analogia (620).

Permutando B in C, e C in B, nelle analogie (619 a 622), si hanno le analogie (623 a 626).

713. Quando AC = 90°, si ha (VII. 9ª), cos.B = − cot.BC cot.AB. Cangiando i segni, e differenziando al solito (690), si avrà la prima analogia (627).

Quando AC = 90°, si ha pure (VII. 30ª), cos.AB = cos.C

sen.BC, o vero sen.BC $= \frac{\cos.AB}{\cos.C}$. Sostituendo questo valore nell' infinitesimale (619), si ha la (628).

714. Se poi fosse in vece BC $= 90°$, si avrebbe (VII. 11ª), $\cos.C = \frac{\cos.AB}{\text{sen}.AC}$, e (619), $- \delta BC : \delta B :: 1 : \cot.C$. Conoscendo i due lati costanti, si può dunque trovare con l' equazione l'angolo C, che serve poi a risolver l'analogia. Questo è il calcolo più spedito, al qual si riduce anche la formola complicata $\delta B : \delta BC :: \cos.AB : \sqrt{(\text{sen.}^2AC - \cos.^2AB)}$, data nell' *Almanacco astronomico* di Berlino per l' anno 1750. Vedremo per altro (764), quanto sia difettosa quest' analogia nell' uso a cui viene impiegata.

715. La prima analogia (629) si ha, differenziando l' equazione (VII. 26ª). La seconda ragione contiene quattro parti del triangolo, il che si scosta dal sistema generale della tavola; ma non è possibile simplificare maggiormente questa analogia, che è anzi una delle più utili della tavola stessa, come vedremo (Cap. XXI).

Quando uno de' lati costanti è di 90°, la formola (VII. 26ª) si riduce, $\cos.BC = \cos.A\ \text{sen}.AB$, o vero $\cos.BC = \cos.A\ \text{sen}.AC$. Differenziando l' una o l'altra di queste equazioni, si ha la prima analogia (632).

716. Quando fosse in vece BC $= 90°$, si avrebbe (VII. 11ª), $\cos.C = \frac{\cos.AB}{\text{sen}.AC}$. Dati i due lati costanti, può dunque trovarsi con questa equazione l'angolo C, che s'impiega poi a risolvere l'analogia (631), senza bisogno d' introdurre un radicale (760) sul far di quello riportato (714).

717. Dalla formola (VII. 16ª) si ha $\cot.B = \text{sen}.AB\ \cot.AC \times \text{cosec}.A - \cos.AB\ \cot.A$. Cangiando i segni, differenziando con prendere (712) il differenziale della cosecante, adottando il segno negativo per δA, ponendo $2\,\text{sen}.\frac{1}{2}\delta A\ \cos.\frac{1}{2}\delta A$ in vece di $\text{sen}.\delta A$, sostituendo il valore (VII.34ª) di cot.AC, e $\cos.A\ \cos.(A - \frac{1}{2}\delta A) + \text{sen}.A\ \text{sen}.(A - \frac{1}{2}\delta A)$ in cambio di $\cos.\frac{1}{2}\delta A$, (II. 4ª); si dedurrà la prima analogia (633).

Fig. 66 Mettendo in questa il valore (VII. 29ª) di cos.AB, riducendo l'ultimo termine dell'analogia ad uno stesso denominatore, e osservando che $\text{sen.}A \cos.(A - \frac{1}{2}\delta A) - \cos.A\ \text{sen.}(A - \frac{1}{2}\delta A) = \text{sen.}\frac{1}{2}\delta A$, (II. 2ª), si otterrà la prima analogia (634).

La prima (635) si consegnisce, dividendo l' una per l' altra le analogie differenziali finite (619, 629), e sostituendo il valore (VII. 24ª) di sen.AB. Benchè questa analogia contenga quattro parti del triangolo nella seconda ragione, pure ho stimato di non ometterla, come corrispondente ad una infinitesimale che ne ha solo tre.

Le analogie (638 a 642) si ottengono, permutando B in C, e C in B, nelle precedenti (633 a 637).

718. Quando AB = 90°, si ha (VII. 16ª), tang.B = sen.A tang.AC, e (VII. 17ª), cot.C = — cos.AC cot.A. Differenziando (683) ciascuna di queste due equazioni, si avranno le prime analogie (643, 644).

Il caso di AB = 90° dà pure (VII. 12ª), cos.C = — cos.A cos.B. Questo valore, sostituito nella prima analogia (644), rende negativo $\text{sen.}\delta A$, per il che essa diviene $-\text{sen.}\delta A : \text{sen.}\delta C :: \text{sen.}(A - \delta A) : \text{sen.}(C + \delta C) \cos.B$. Ma nel triangolo ABD si ha sen.BAD = sen.BD sen.D, (448), ovvero $\text{sen.}(A - \delta A) = \text{sen.}(BC - \delta BC)\ \text{sen.}(C + \delta C)$. Sostituendo questo valore nell' analogia precedente, se ne cava la prima (645).

Nel caso stesso di AB = 90°, il triangolo ABD dà (VII. 28ª), cos.AD = cos.ABD sen.BD, ovvero $\text{sen.}(BC - \delta BC) = \frac{\cos.AC}{\cos.(B + \delta B)}$. Ponendo questo valore nella prima analogia (645), si ha la prima (646).

719. Tutte le analogie (647 a 679) si ottengono, prendendo le parti del triangolo opposte a quelle contenute nelle analogie (614 a 646), e facendo uso del triangolo supplementario, previo il cangiamento de' segni, nel modo che si è veduto (705). Tuttavia, per minore imbarazzo rispetto ai segni, ho citato la tavola VII

per fondamento d'ogni infinitesimale, la qual può trovarsi per mezzo di sostituzioni.

Nella prima analogia (652) si osserverà che il segno negativo, che avrebbe il terzo termine, è trasportato a rendere positivo il primo termine. Lo stesso ha luogo in appresso in molte altre analogie. Nell' analogia (661) il quarto termine è quello che sarebbe negativo, se non si facesse positivo il primo.

Per avere la prima (662) non fa mestieri cangiare i segni nella prima (629).

La prima ragione dell' analogia finita (665) risulterebbe coi segni negativi. Gli ho cangiati in positivi, per conservar l'uniformità con le analogie precedenti.

Del resto quando si avesse qualche difficoltà sull' intelligenza de' segni nelle analogie (647 a 679), si potrà cercare la loro dimostrazione diretta coi metodi che ho impiegati per dimostrare le loro corrispondenti (614 a 646).

720. Finisco avvertendo che, siccome l'ultima analogia (679), che si vedrà impiegata utilmente (775), non ha bisogno che di due dati, AC e B, per far conoscere la ragione fra i due differenziali, così è preferibile a quella data da *La Caille*, che esige di più la cognizione di BC, e che viene ad essere (cangiando le lettere nell'analogia di questo Autore, giacchè egli fa A, e B costanti, e $A = 90°$), $\delta BC : \delta AB :: \text{sen.}B\ \text{sen.}BC : \frac{1}{2}\text{sen.}2AC$.

Avvertimenti per l'uso delle analogie (541 *a* 679).

721. Non sarà forse compresa, a prima vista, l'utilità delle analogie differenziali finite, a motivo della loro novità, e del loro aspetto sovente complicato. Devo però avvertire:

1°. Che queste contengono la soluzione immediata, e d'ordinario la più semplice possibile, de' problemi relativi a due triangoli obliquangoli che hanno due parti comuni o eguali, e ne' quali problemi entri la considerazione di alcune differenze delle parti di

un triangolo da quelle dell' altro : se ne vedranno diversi esempj (Cap. XXI).

2°. Le analogie differenziali finite faranno vedere al Calcolatore ciò che è negletto nelle infinitesimali corrispondenti; sicchè nel servirsi di queste saprà presso poco a qual errore si esponga, e potrà mitigarlo, od evitarlo col soccorso delle altre; avvantaggio prezioso, e sopra tutto quando i differenziali sono divisi, o moltiplicati, per quantità prossime a zero, o all' infinito, ne' quali casi le analogie infinitesimali vanno soggette ad errori enormi e perfino infinitamente grandi.

3°. L'accennato soccorso si estende anche a quelle analogie infinitesimali, ove mancano le corrispondenti finite, giacchè si può ottener queste, se non rigorose, almeno con grande approssimazione, anche quando *le differenze* fossero di alcuni gradi, procedendo come segue.

722. Vogliasi, per esempio, ottenere la più grande esattezza possibile nel caso di avere a fare uso dell' analogia infinitesimale (636). Come questa è ricavata dalla precedente, così comincio dal simplificare per approssimazione la seconda ragione dell' analogia differenziale finita (635). A ciò fare pongo per principio, che tutte le parti variabili di un triangolo qualunque ABC arrivino alla metà della loro respettiva variazione contemporaneamente, o sia che quando A, per esempio, è divenuto $(A - \frac{1}{2}\delta A)$, allora anche BC si trovi essere $(BC - \frac{1}{2}\delta BC)$, e così delle altre. Tale ipotesi non è certo rigorosa; ma in generale è sommamente prossima al vero, quando le variazioni non siano di molti gradi; e si troverà esattissima ne' casi ordinarj, ove *le differenze* rare volte arrivano ad un grado. Ciò posto, e notando che AB, AC sono le parti costanti nelle analogie che abbiamo alle mani, si avrà, per la regola (448), $\text{sen.}(BC - \frac{1}{2}\delta BC) : \text{sen.}(A - \frac{1}{2}\delta A) :: \text{sen.}AB : \text{sen.}(C + \frac{1}{2}\delta C)$. Ponendo la seconda di queste ragioni, in vece della prima, nell' analogia finita (635), e ponendo $\text{sen.}AB : \text{sen.}C$ in cambio di $\text{sen.}BC : \text{sen.}A$, la detta analogia diviene $-\text{sen.}\frac{1}{2}\delta A :$

$\text{tang.}\frac{1}{2}\delta B :: \text{sen.}(BC - \frac{1}{2}\delta BC) : \text{sen.}AC \cos.(C + \frac{1}{2}\delta C)$. Questa intanto, sotto tal forma men complicata, potrebbe più facilmente servire di norma nel fare uso dell' infinitesimale (635).

Or si sostituisca il valore di $\cos.(C + \frac{1}{2}\delta C)$ che, preso (VII. 11ª) ed espresso secondo la nostra ipotesi, è $\frac{\cos.AB - \cos.AC \cos.(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}{\text{sen.}AC\ \text{sen.}(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}$; si avrà

$$- \text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta A : \text{tang.}\tfrac{1}{2}\delta B :: 1 : \frac{\cos.AB - \cos.AC \cos.(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}{\text{sen.}^2(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}.$$

Questa è l'analogia che sarebbe da usarsi in cambio della (636), quando si volesse una grande approssimazione.

723. Per quel che spetta all' impiegare $-\delta A : \delta B$, in vece di $-\text{sen.}\frac{1}{2}\delta A : \text{tang.}\frac{1}{2}\delta B$, si potrà aver riguardo a' limiti che ho assegnati (259); ma con la pratica si vedrà che si possono spesso oltrepassare senza ribrezzo nelle analogie differenziali de' triangoli sferici, a motivo che i due primi termini sono della stessa natura; onde, impiegando gli archi in vece delle loro linee trigonometriche, i due errori si ricompensano, o il loro divario risulta ordinariamente insensibile.

724. Propongo ora, per secondo esempio, di mettere similmente sotto una forma molto prossima al giusto l' analogia (637). Questa operazione è meno facile della precedente, atteso che quest' analogia è tirata da un' altra infinitesimale (636), a cui manca la corrispondente differenziale finita, sicchè fa d' uopo rimontare alla prima (635). Profittando delle riduzioni già fatte, si sostituisca nell' analogia (722) il valore (VII. 28ª) di $\cos.AC$, preso come segue: $\cos.AC = \cos.(B + \frac{1}{2}\delta B)\,\text{sen.}(BC - \frac{1}{2}\delta BC)\ \text{sen.}AB + \cos.(BC - \frac{1}{2}\delta BC) \cos.AB$. In vece di $\cos.^2(BC - \frac{1}{2}\delta BC)$ si ponga $1 - \text{sen.}^2(BC - \frac{1}{2}\delta BC)$, si riduca, e si avrà

$$- \text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta A : \text{tang.}\tfrac{1}{2}\delta B :: 1 : \cos.AB - \frac{\text{sen.}AB \cos.(B + \frac{1}{2}\delta B)}{\text{tang.}(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}.$$

725. L' uso di considerar per ignoto uno dei differenziali contenuti nella prima ragione delle analogie infinitesimali, potrebbe

forse esser causa che alcuno si adombrasse veggendo, che spesso le mie analogie finite involvono nella seconda ragione i differenziali contenuti nella prima. Ho già dato (281, 282) due metodi per calcolare il valore di un differenziale, quantunque implicato nella seconda ragione: ma è d'uopo notare più generalmente, che le analogie finite sono rigorose, e però atte a dare il valore esatto di una qualunque delle quantità in esse contenute, e non di uno dei differenziali solamente.

Ho però segnato coll'asterisco * quelle analogie, in vece delle quali può aver luogo, e in qualche caso anche meritare la preferenza, il seguente metodo rigoroso, il qual viene somministrato dalla tavola VII. Esso è utile specialmente in otto casi (573, 574, 582, &c.), dove le analogie, segnate come dissi, sono infinitesimali, e prive delle corrispondenti finite.

Sia, per esempio, δC la quantità ignota nell' analogia (546). Poichè AB, e A sono le parti costanti relativamente a questa analogia, nella quale per altro AB non si trova, cerco nella tavola VII un valore di AB espresso per mezzo di AC, A, e C, che sono le parti contenute nella medesima analogia. La formola 35ª mi dà, per il triangolo ABC, $\text{tang.}AB = \frac{\text{sen.}AC}{\text{sen.}A \ \text{cot.}C + \text{cos.}A \ \text{cos.}AC}$, e per il triangolo ABD, $\text{tang.}AB = \frac{\text{sen.}AD}{\text{sen.}A \ \text{cot.}D + \text{cos.}A \ \text{cos.}AD}$. Ponendo in equazione questi due valori di tang.AB, e sostituendo nel secondo le espressioni (680), si ha $(\text{sen.}A \ \text{cot.}\overline{C - \delta C} + \text{cos.}A \ \text{cos.}\overline{AC + \delta AC}) \ \text{sen}\,AC = (\text{sen.}A \ \text{cot.}C + \text{cos.}A \ \text{cos.}AC) \ \text{sen.}\overline{AC + \delta AC}$. Per simplificare, si divida per cos.A, e si avrà $\text{cot.}\overline{C - \delta C} \ \text{sen.}AC \ \text{tang.}A = (\text{tang.}A \ \text{cot.}C + \text{cos.}AC) \ \text{sen.}\overline{AC + \delta AC} - \text{sen.}AC \ \text{cos.}\overline{AC + \delta AC}$; equazione che dà immediatamente il valore di $\text{cot.}(C - \delta C)$, e per conseguenza anche quello di δC.

Fig.64

Se dall' ultima equazione si volesse ricavare il valore di AC, ovvero

ovvero quello di $(AC + \delta AC)$, si ricorrerebbe al metodo (369); il che basti accennato una volta per tutti i casi consimili.

726. Si può avere inteso dalle dimostrazioni che ho dato delle analogie della tavola, quale sia l'uso che deve farsi de' segni che precedono i differenziali. Ma per ischivare ogni equivoco avverto; 1°. che nella seconda ragione delle analogie finite, fa d'uopo sempre impiegare i differenziali con quel segno che conviene al caso, che si ha tra le mani: onde, per esempio, nell' adoprare l'analogia (545) si deve impiegare tang.$(BC + \frac{1}{2}\delta BC)$ quando il lato BC variando cresce, e tang.$(BC - \frac{1}{2}\delta BC)$ se il detto lato variando cala. 2°. I segni che ho applicati ai differenziali, o alle loro linee trigonometriche, nella prima ragione delle analogie infinitesimali, o finite, servono solamente per indicare, che le variazioni si fanno ambe in crescere, o ambe in calare, se i differenziali hanno il medesimo segno; e che si fanno una in crescere, e l'altra in calare, se i differenziali hanno il segno diverso. Questa regola suppone che il risultato della seconda ragione sia positivo, e però la regola deve invertirsi, quando il risultato è negativo. Quindi nell'uso dell'accennata analogia (545) si saprà, per esempio, che AC e C variano in senso contrario, quando $(BC + \frac{1}{2}\delta BC) < 90°$; e che variano nel medesimo senso, quando $(BC + \frac{1}{2}\delta BC) > 90°$, poichè allora tang.$(BC + \frac{1}{2}\delta BC)$ essendo negativa, i due segni negativi de' termini medj danno un prodotto positivo. Questo è il frutto che deve cavarsi dai segni dei differenziali; essi sono altresì di utilità reale (730) nell' uso de' metodi (284, 285).

727. Nella mia tavola vi sono più di 70 analogie, nelle quali entrano i coseni di qualche lato, o della variazione di qualche lato, e che pur si traducono ai triangoli rettilinei, col mezzo delle regole che ho dato (425). In questo specialmente mi sembra non dispregevole l'utilità delle medesime regole, poichè in tal modo una tavola sola contiene una collezione copiosa, e completa nel suo genere, delle analogie differenziali de' triangoli sferici e rettilinei. Questi ultimi forniscono quattro sole analogie finite

(279, 10ª a 13ª) più semplici di quelle che si ricaverebbero dalle corrispondenti de' triangoli sferici (635, 640, 629).

È poi cosa chiara 1°. che le analogie, per il caso ove un lato sia di 90°, non sono di lor natura capaci d'esser tradotte ai triangoli rettilinei; mentre per tal traduzione è necessario che l'analogia sia applicabile ad un triangolo infinitamente piccolo (425): 2°. che, nel caso ove un angolo sia costante, le analogie contenenti nella prima ragione le variazioni degli altri due angoli non possono essere d'alcuna utilità per li triangoli rettilinei, dove queste due variazioni sono uguali fra esse: 3°. che, nel caso ove due angoli sono costanti, le analogie contenenti la variazione del terzo nella prima ragione ripugnano ancora alla natura de' triangoli rettilinei. Eccettuate queste tre classi d'analogie, si potranno tradurre utilmente ad uso de' triangoli rettilinei tutte le altre analogie della mia tavola, salvo una sola (573), la qual con le regole (425) si riduce a zero.

Si osservi inoltre che il primo termine del conseguente della seconda ragione dell' analogia finita (666) deve negligersi secondo le regole (425), poichè il prodotto $\text{sen.}(AC + \delta AC)\ \text{sen.}AC\ \text{sen.}(BC + \frac{1}{2}\delta BC)$ rappresenta un infinitesimo di terzo ordine. Lo stesso accade nella prima analogia (671).

Per un esempio delle traduzioni di cui trattiamo, se nella prima analogia (546) si fa $\text{sen.}\frac{1}{2}\delta AC = \frac{1}{2}\delta AC$, $\text{sen.}AC = AC$, e $\cos.\frac{1}{2}\delta AC = 1$, $\cos.(AC + \frac{1}{2}\delta AC) = 1$, a motivo che ambi questi coseni sono moltiplicati per diverse linee trigonometriche, l'analogia diviene $\delta AC : -\text{sen.}\delta C :: AC : \text{sen.}C\ \text{sen.}(C - \delta C)\ \cot.A + \text{sen.}(C - \delta C)\cos.C$. Tale in fatti si trova, per la Trigonometria rettilinea, sostituendo il valore di BC (III. 21ª) nell' analogia (279, 1ª).

728. Le analogie che ho date per il caso ove alcuna delle parti costanti sia di 90°, non voglion dir che esse siano le sole che possano usarsi in tal caso. Per esempio, le analogie (627, 628), date per il caso di $AC = 90°$, non escludono l'uso delle precedenti

(619 a 626), alcune delle quali vengono anzi simplificate nel caso stesso, per essere sen.AC = 1, cos.AC = 0, e cot.AC = 0, (42). Le analogie (627, 628) sono dunque aggiunte di più, come quelle che non si dedurrebbero immediatamente dalla simplificazione delle precedenti. Così s'intenda delle altre consimili, eccetto che delle analogie (548, 564, 568), le quali se non sono state da me pretermesse, il motivo si è, perchè servono di comparazione con le (549, 563, 569).

Si avverta che quando la seconda ragione di qualche analogia contenga la tang. dell' arco di 90°, conviene eliminare questa tangente moltiplicando la stessa ragione per la cotang. del detto arco, altrimenti l'analogia non potrà simplificarsi, nè essere di uso veruno, perchè conterrebbe espressioni di valore infinito.

729. La Caille ed altri Autori hanno dato qualche analogia infinitesimale per il caso, che alcuna delle parti variabili sia di 90°. Io mi sono appigliato a considerar di 90° solamente le parti costanti, affinchè la mia tavola somministri le analogie differenziali finite, anche pei triangoli costantemente rettangoli o rettilateri. Sebbene queste sono sovente meno comode per il calcolo numerico, di quel che siano le proporzioni (441 a 457), ad ogni modo ho stimato di non ometterle, onde servano, se non altro, d'avvertimento al Calcolatore nell'uso delle infinitesimali corrispondenti, come ho detto (721, 2°.)

La mia tavola sarebbe divenuta soverchiamente lunga, senza certezza di utilità, se avessi voluto considerar di 90° anche ognuna delle parti variabili, e dar le analogie relative a ciascuna di queste supposizioni. Mi contenterò dunque di dare un esempio, come si possa pervenire in casi simili ad espressioni molto semplici. Sia da adoprarsi la prima analogia (551), e sia BC = 90°; sarà cos. BC = 0, e sen. $(BC + \frac{1}{2}\delta BC)$ = cos.$\frac{1}{2}\delta BC$; con che l'analogia diviene sen.$\frac{1}{2}\delta AC$: sen.$\frac{1}{2}\delta BC$: : cos.$\frac{1}{2}\delta BC$ sen.AC : cos.$\frac{1}{2}\delta AC$ cos.AB. Convertendo questa analogia in equazione, e riducendo, col favor della formola (I. 6ª), se ne ricava, per prima simplificazione,

sen.δAC : sen.δBC :: sen.AC : cos.AB. Ma quando BC = 90°, cos.C = $\frac{\text{cos.AB}}{\text{sen.AC}}$, (VII. 11°). Dunque si ha pure, per altra maggior simplificazione, sen.δAC : sen.δBC :: 1 : cos.C; analogia preferibile alla prima (550), nel caso di BC = 90°.

730. Quando il triangolo variabile avrà *una sola parte costante, o nessuna*, le analogie (541 a 679) serviranno egualmente, dentro le condizioni, e seguendo le regole stesse che abbiamo insegnate (283, 284, 285) pei triangoli rettilinei.

Mi resta per ultimo da avvertire che nelle analogie infinitesimali della Trigonometria sferica non fa mai d'uopo impiegare R″, (272), atteso che le variazioni contenute nella prima ragione sono sempre della medesima natura, e tanto l'una quanto l'altra si prendono egualmente in secondi.

Esempj del calcolo delle analogie differenziali de' triangoli sferici.

Fig.48 731. Supponendo che nell'esempio III, (500), possa esservi errore di 1° nel lato BD, cioè che i mezzi impiegati per misurare quel viaggio del bastimento lascino l'incertezza di 1°, si dimanda quale sarebbe in tal caso l'errore nella longitudine calcolata, o sia nell'angolo al polo. Nel triangolo ABD si hanno allora due lati costanti AB, AD, e si cerca la variazione di A, dipendente da quella del lato opposto BD, il che forma il caso delle analogie (629), nelle quali deve solamente mutarsi C in D.

Si osservi in prima, che se non è noto in qual senso sia stato commesso l'errore δBD, non si può fare uso dell'analogia differenziale finita, nella quale conviene impiegare (BD $\pm \frac{1}{2}\delta$BD). Faccio dunque il calcolo dell'infinitesimale, come segue.

log.(δBD = 3600″) =	3,556303
log.sen.(BD = 37° 25′) =	9,783623
(500), compl. log.(sen.AB sen.AD) =	0,204796
compl.log.sen.(A = 27° 8′) =	0,340975
log.δA =	3,885697

E però 1° di errore nel lato BD ne produce uno di circa 2° 8', nel medesimo senso (726), nell' angolo A.

732. Prima che si conoscessero le analogie infinitesimali, avremmo dovuto, per giungere a questo risultato, far due volte il calcolo dell'esempio III, (500); cioè una volta, facendo BD = 36° 25', e un'altra, facendo BD = 38° 25'; indi prender la metà della differenza dei valori di A, dati dai due calcoli. Preziose sono dunque le analogie infinitesimali, allor quando si ignora, se la variazione data sia positiva, o negativa. Ma all' incontro se ciò è noto, come succede nella massima parte degli usi, in cui furono fino ad ora impiegate, questo stesso esempio ci farà conoscere la loro imperfezione, e per conseguenza l' utilità delle analogie finite che vengono da me proposte.

733. Pongasi che l' errore δBD sia in più. Impiegando nel calcolo (731), sen.(BD + $\frac{1}{2}\delta$BD) = sen.37°55', in vece di sen.BD, e sen.(A + $\frac{1}{2}\delta$A) = sen.28° 12' in vece di sen.A, come prescrive l'analogia finita, si trova δA = 2° 5' 2". L'uso dell' analogia infitesimale in tal caso porterebbe dunque 3' circa d' errore nel valore di δA.

Se questo valore si volesse con ogni esattezza, s' impiegherebbe poi ora nel calcolo precedente sen. 28° 10'$\frac{1}{2}$ in vece di sen.28° 12', e si troverebbe δA = 2° 5' 8".

Quanto all' impiegare gli archi in vece de' seni nella prima ragione dell' analogia, si può veder con la prova, che la differenza è insensibile, come ho avanzato (723).

734. Cogli stessi dati nel triangolo ABD, suppongo al presente che i valori di AB e di BD si tengano per buoni, ma che vi sia l' incertezza di 1° sul lato AD, cioè nel prender la latitudine in cui si trova il naviglio; per il che dimando l' errore che ne nascerà nella longitudine, o sia nel valore di A. Si hanno dunque due lati costanti AB, BD, e si cerca la variazione dell'angolo opposto a BD, dipendente da quella del terzo lato. Permutando B in A, A in B, e D in C, affine di poter comparare il triangolo BAD

della fig. al triangolo ABC della tavola, osservo che questo è il caso delle analogie (619 a 622). Ma perchè i nostri dati sono $B = 27°8'$, $AB = 71°30'$, $AC = 37°25'$, $BC = 41°9'$, e $\delta BC = 1°$, si riconoscerà che con questi conviene ricorrere alle analogie (620). Prendo l'infinitesimale, e faccio il calcolo, come segue.

log.(δBC = 3600″) =	3,556303	. . . .	3,556303
compl.log.sen.B =	0,340975	log.cot.B =	0,290340
log.cot.AB =	9,524520	log.— cot.BC =	0,058541
	3,421798		— 3,905184

Questi due log. corrispondono a $44'1''$, 2 ed a $-2°13'58''$,7; e però si ha $\delta B = -1°\,29'\,57''\frac{1}{2}$. In questo caso le variazioni δBC e δB si fanno nel medesimo senso, poichè hanno il segno diverso nell' analogia, mentre il risultato della seconda ragione è negativo, (726).

Ho dato il segno negativo al logaritmo, 3,905184, non perchè questo sia realmente un logaritmo negativo (164), ma per indicare che esso corrisponde ad una quantità negativa. Così farò quindi innanzi più volte.

735. Or si cerchi qual sia l'errore della formola infinitesimale, di cui ci siamo serviti; supponendo noto che la variazione di BC sia in meno, e facendo uso della seconda ragione dell' analogia finita (620). Farò il calcolo supponendo affatto ignoto il valor di δB, per dare un esempio del metodo additato (281).

log.(δBC = 3600″) =	3,556303	. . . .	3,556303
log.cot.AB =	9,524520	log.— cos.B =	9,949364
log.sen.(BC — $\frac{1}{2}\delta$BC) =	9,813872	. . log.cos.	9,880072
compl.log.sen.(BC—δBC) =	0,190581	. . . .	0,190581
log.costante	3,085276	log.cost.—	3,576320
compl.log.sen.B =	0,340975	. . . .	0,340975
	3,426251		— 3,917295

Da questi logaritmi si ha, per valor prossimo, $\delta B = 44' 28'' - 2^\circ 17' 46'' = -1^\circ 33' 18''$. Questo risultato essendo negativo, la variazione di B è nel medesimo senso che quella di BC, per le ragioni già dette. Ai logaritmi costanti, trovati quì sopra, deve dunque aggiungersi compl.log.sen.$(B - \frac{1}{2}\delta B = 26^\circ 21')$, e si trova, per valore più prossimo, $\delta B = 45' 42'' - 2^\circ 21' 33'' = -1^\circ 35' 51''$. Laonde impiegando infine sen.$(B - \frac{1}{2}\delta B = 26^\circ 20')$, si ha, per valore esatto, $\delta B = -1^\circ 35' 55''$.

Con che si vede che l'analogia infinitesimale sarebbe in errore di $6'$ in questo esempio. Più gravi errori delle analogie infinitesimali, le sole usate finora, si scorgeranno (760, 764).

736. Se il valor di δB, qualunque sia la sua grandezza, si volesse cavare direttamente con un calcolo solo, si svilupperebbe sen.$(B + \frac{1}{2}\delta B)$, come dissi (282), ovvero si porrebbe $\frac{1}{2}$cos.B — $\frac{1}{2}$cos.$(B + \delta B)$ in vece di sen.$(B + \frac{1}{2}\delta B)$ sen.$\frac{1}{2}\delta B$, (II. 16ª). Allora, chiamando p il prodotto del primo e del quarto termine dell' analogia, si avrebbe cos.$(B + \delta B) =$ cos.B $- 2p$. Se nel calcolo precedente si pone sen.$(\frac{1}{2}\delta BC = 30')$ in vece di δBC, si trova $p = -0{,}0061882$, facendo astrazione dal segno negativo di sen. $\frac{1}{2}\delta BC$, il qual segno non deve servire che per avvertimento, come dissi (726). Ma facendo uso de' seni naturali, cos.B $= 0{,}8899476$: dunque cos.$(B + \delta B) = 0{,}8899476 + 0{,}0123764 = 0{,}9023240 =$ cos.$25^\circ 32' 5''$. Ora $B = 27^\circ 8'$; dunque $\delta B = -1^\circ 35' 55''$.

Se si volesse direttamente il valore finito di δBC, l'operazione sarebbe più complicata : si capiterebbe ad una equazione, la qual conterrebbe sen. δBC e cos. δBC; e il modo più pronto per risolverla sarebbe quello che ho suggerito (369). Ma il caso presente è un di quelli, ne' quali giova meglio, per avere il valore di δBC, ricorrere al metodo (725).

CAPITOLO XX.

Sommario per l'applicazione della Trigonometria alla risoluzion de' problemi.

737. Dato un problema, il qual non esiga che triangoli per esser risolto, se ne cercherà la soluzione in questo Trattato nella maniera seguente. 1°. Se i dati ed il quesito appartengono ad un triangolo solo, la soluzione si troverà in un de' Capitoli VIII, IX, XV, XVI, XVIII. 2°. Se i dati e il quesito son distribuiti in due triangoli, se ne avrà la soluzione nei Capitoli X, o XIX, o pure imitando i metodi (322, 323, 342), o vero ricorrendo alle formole (441 a 457), secondo i casi. 3°. Se i dati ed il quesito sono sparsi in più di due triangoli, si considereranno due triangoli alla volta, cercando le soluzioni ove dissi or ora, e legandole insieme, come il caso permetterà, a fine di avere la soluzione finale cercata.

738. Questi avvertimenti sembreranno, a primo aspetto, per lo meno inutili: e pur si vedrà nel Capitolo seguente, quanto semplici, esatte, e facili mi siano riuscite le soluzioni della maggior parte de' problemi dell' Astronomia, sì per averne considerate le condizioni nel modo facile indicato or ora, sì per avere avuto alla mano una gran quantità di formole, non ancora comparse ne' Trattati di Trigonometria per mancanza di espressioni comode delle differenze finite delle linee trigonometriche. Questo esperimento sull'Astronomia mi fa credere, che non debbano esser frequenti i problemi anche in altre Scienze od Arti, sottoposte al calcolo, dei quali non trovisi pronta la soluzione in questo Trattato, purchè possano esser risolti per mezzo di triangoli puramente.

CAPITOLO

CAPITOLO XXI.

Applicazioni della Trigonometria all' Astronomia.

739. Sebbene questo Capitolo supponga il Lettore iniziato nell' Astronomia, non appartenendo al presente Trattato l'insegnarne gli elementi, ad ogni modo potrà esser letto da ognuno, il qual voglia fare astrazione dalle teorie e dalle denominazioni, e limitarsi ad osservare le operazioni analitiche, delle quali si può aver bisogno in ogni altra parte delle Matematiche. Seguirò, per quanto mi sarà possibile, l'ordine de' problemi contenuti nell' insigne Astronomia del Sig. de la Lande, e citerò sovente quest' Opera, già tanto nota ed applaudita, che non ardisco limitarne il merito con le mie lodi. Ometterò i problemi di minore importanza: riserbo ad un' altra occasione quelli che riguardano la determinazione degli elementi dell' orbita di un pianeta, o di una cometa: nè ripeterò le soluzioni di quelli del più corto crepuscolo, e del massimo lume di Venere, che ho date nell' *Enciclopedia Metodica* che si stampa attualmente in Parigi.

740. *Conoscendo l'ascensione retta e la declinazione di un astro, e l'obliquità dell'eclittica, trovare la longitudine e la latitudine dell' astro medesimo.*

Sia P il polo boreale dell' equatore LQ, E il polo boreale dell' eclittica LT, L il primo punto d'Ariete, S l'astro, che suppongo situato in latitudine boreale, e nel primo quarto dell' equatore e dell' eclittica; in queste circostanze dovendo indagarsi la soluzione generale de' problemi, giacchè il cangiamento conveniente de' segni alle linee trigonometriche sodisfa poi ad ogni altra posizione. Si ha quindi PL $= 90° =$ EL, (382), e LPE $= 90° =$ LEP, (390). Ora LM, o LPM (386), è l'ascensione retta data; dunque SPE $= 90° +$ *asc. r.* La declinazione data è SM, e però PS $=$ Fig. 67

Fig.67 90° — *decl.* L'obliquità dell'eclittica è TLQ = PE, (391). Si conoscono dunque tre parti del triangolo PES, cioè PS, PE e SPE. Si cercano 1°. la longitudine LN o LEN, che può sapersi per mezzo dell'angolo PES = 90° — *long.*; 2°. la latitudine SN, che si troverà per mezzo di ES = 90° — *lat.* Per conseguenza il problema non esige, se non se la risoluzione del solo triangolo PES.

Dati due lati PS, PE, e l'angolo compreso SPE, per trovar l'angolo PES, si hanno quattro maniere (470 e segg.). La seconda è la più breve: la quarta è poco più laboriosa, ma ha il vantaggio di far conoscere ad un tempo anche l'angolo di posizione PSE. Se non si cura quest'angolo, io preferisco quella che in apparenza è la più lunga, cioè la prima; poichè non esige altra attenzione che ai segni (42, 744); laddove le altre tre possono indurre in errore, in molti casi, qualora non si abbia sott'occhio una figura alquanto esatta. Applicando la prima soluzione al triangolo PES, si ha dunque $\text{tang.PES} = \frac{\text{sen.SPE}}{\text{sen.PE cot.PS} - \text{cos.PE cos.SPE}}$, ovvero $\text{cot.PES} = \frac{\text{sen.PE cot.PS}}{\text{sen.SPE}} - \text{cos.PE cot.SPE}$. Sostituendo in questa equazione le denominazioni, o sia i valori di PES, PE, &c. dati quì sopra, e notando che $\text{cot.SPE} = -\text{cot.}(90^\circ + asc.r.)$, (36), si ha

$$\text{tang.}long. = \frac{\text{sen.}obl.\ \text{tang.}decl.}{\text{cos.}asc.r.} + \text{cos.}obl.\ \text{tang.}asc.r.$$

ovvero, per più comodo del calcolo,

$$\text{tang.}long. = \text{cos.}obl.\ \text{tang.}asc.r. \left(\frac{\text{tang.}obl.\ \text{tang.}decl.}{\text{sen.}asc.r.} + 1\right).$$

Osservando le regole de' segni (42, 744), si avrà sempre la longitudine in quel quarto dell'eclittica, a cui l'astro corrisponde; notando solo che, se l'ascensione retta è nel primo o nell'ultimo quarto, la longitudine non può mai essere nel secondo o nel terzo, e che, se l'ascensione retta è nel secondo o nel terzo quarto, la longitudine non può mai essere nel primo o nell'ultimo.

741. Se nella formola precedente non piace l'aver da cercare i

logaritmi in due tavole, si potrà fare uso delle sole trigonometriche, dividendo il calcolo in due equazioni, come segue, formate coi metodi (198, 203, 202):

$$\text{tang.B} = \sqrt{\frac{\text{tang.}\,obl.\ \text{tang.}\,decl.}{\text{sen.}\,asc.\,r.}};$$

$$\text{tang.}\,long. = \frac{\text{cos.}\,obl.\ \text{tang.}\,asc.\,r.}{\text{cos.}^2\text{B}}.$$

Quando la quantità sotto il vincolo radicale sia negativa, in vece di queste formole si ricorrerà alle seguenti:

Se $-\frac{\text{tang.}\,obl.\ \text{tang.}\,decl.}{\text{sen.}\,asc.\,r.} < 1$, si ha

$$\text{cos.B} = \sqrt{-\frac{\text{tang.}\,obl.\ \text{tang.}\,decl.}{\text{sen.}\,asc.\,r.}},$$

$$\text{tang.}\,long. = \text{cos.}\,obl.\ \text{tang.}\,asc.\,r.\ \text{sen.}^2\,\text{B}.$$

Se $-\frac{\text{tang.}\,obl.\ \text{tang.}\,decl.}{\text{sen.}\,asc.\,r.} > 1$, si ha

$$\frac{1}{\text{cos.B}} = \sqrt{-\frac{\text{tang.}\,obl.\ \text{tang.}\,decl.}{\text{sen.}\,asc.\,r.}},$$

$$\text{tang.}\,long. = -\,\text{cos.}\,obl.\ \text{tang.}\,asc.\,r.\ \text{tang.}^2\text{B}.$$

Si avverta che, per passare da una linea trigonometrica all'altra dell'angolo ausiliario B, non y'è bisogno di calcolarlo in gradi, minuti, &c. come ho fatto vedere (200).

742. Per *trovare la latitudine*, che è la seconda parte del problema (740), preferendo pure la prima soluzione (476), tanto più che i logaritmi, salvo uno solo, sono comuni al calcolo della longitudine, si ha cos.SE = cos.PE cos.PS + sen.PE sen.PS × cos.SPE, e sostituendo le denominazioni (740),

$$\text{sen.}\,lat. = \text{cos.}\,obl.\ \text{sen.}\,decl. - \text{sen.}\,obl.\ \text{cos.}\,decl.\ \text{sen.}\,asc.\,r.$$

ovvero, per più comodo del calcolo,

$$\text{sen.}\,lat. = \text{cos.}\,obl.\,\text{sen.}\,decl.(1 - \text{tang.}\,obl.\ \text{cot.}\,decl.\ \text{sen.}\,asc.\,r.).$$

Fig. 67 743. Quindi, ad imitazione di quel che feci (741),

Se tang. *obl.* cot. *decl.* sen. *asc. r.* $<$ 1, si ha

$$\cos.C = \sqrt{\text{tang.} \, obl. \; \text{cot.} \, decl. \; \text{sen.} \, asc. \, r.}$$

$$\text{sen.} \, lat. = \cos. \, obl. \; \text{sen.} \, decl. \; \text{sen.}^2 C.$$

Se tang. *obl.* cot. *decl.* sen. *asc. r.* $>$ 1, si ha

$$\frac{1}{\cos.C} = \sqrt{\text{tang.} \, obl. \; \text{cot.} \, decl. \; \text{sen.} \, asc. \, r.}$$

$$\text{sen.} \, lat. = - \cos. \, obl. \; \text{sen.} \, decl. \; \text{tang.}^2 C.$$

Quando la quantità sotto il vincolo radicale sia negativa, in vece delle formole precedenti si avrà

$$\text{tang.}C = \sqrt{- \, \text{tang.} \, obl. \; \text{cot.} \, decl. \; \text{sen.} \, asc. \, r.}$$

$$\text{sen.} \, lat. = \frac{\cos. \, obl. \; \text{sen.} \, decl.}{\cos.^2 C}.$$

Le soluzioni, che ho date, del problema (740) obbligano a cercare dodici logaritmi, cioè uno solo di più, in confronto delle soluzioni (472, 477): ma due o tre dei detti logaritmi non variano, quando si hanno da far più calcoli per una stessa epoca. Dodici logaritmi esigono parimente le soluzioni date dal Sig. de la Lande (*Astr.* 900).

744. Nelle formole precedenti, e in tutte quelle del presente Capitolo, si osserverà che, per la *declinazione australe*, sen. *decl.* è *negativo*, giacchè sen. *decl.* sta in vece di cos. PS, e allora PS $> 90°$. La stessa regola ha luogo per tang. *decl.* e cot. *decl.* Ma cos. *decl.* è sempre *positivo*, giacchè sta in luogo di sen. PS, nè può mai essere PS $> 180°$.

Si osserveranno le stesse regole per le linee trigonometriche della *latitudine*.

745. *Conoscendo la longitudine e la latitudine di un astro, con l'obliquità dell'eclittica, trovar l'ascensione retta, e la declinazione.*

Facendo (VII. 13', 28'), A = P, B = E, C = S, si ha,

nel triangolo PES, $\cot.P = \frac{\text{sen.PE cot.ES} - \text{cos.PE cos.E}}{\text{sen.E}}$, e $\cos.PS =$ $\cos.E\ \text{sen.ES sen.PE} + \cos.ES\ \cos.PE$. Sostituendo le denominazioni (740), e cangiando i segni nella prima di queste formole, si ha

$$\text{tang.}\mathit{asc.r.} = \text{tang.}\mathit{long.}\ \cos.\mathit{obl.} - \frac{\text{tang.}\mathit{lat.}\ \text{sen.}\mathit{obl.}}{\cos.\mathit{long.}}.$$

$$\text{sen.}\mathit{decl.} = \text{sen.}\mathit{long.}\ \cos.\mathit{lat.}\ \text{sen.}\mathit{obl.} + \text{sen.}\mathit{lat.}\ \cos.\mathit{obl.}$$

Essendo molto più raro l'uso di questo problema, che dell'inverso (740), lascio a chi ne abbia bisogno il compor le trasformazioni analoghe a quelle (741, 743).

746. *Date le differenze di ascensione retta e di declinazione fra due astri*, la cui distanza reciproca sia un arco sensibilmente rettilineo, *trovare le differenze di longitudine e di latitudine.*

I metodi, che ho veduto finora, per la soluzione di questo problema, l'uso del quale è continuo ed importante, sono tutti soggetti ad errore di alcuni secondi, più o meno, a tenor de' casi.

Siano L, S, i centri di due astri, la cui distanza LS sia un piccolo arco sensibilmente rettilineo (per esempio, la differenza dall' arco di $1° 20'$ alla corda non è (152) che $0'', 1$); e sia LQ un parallelo all' equatore, e P il suo polo, LT un parallelo all' eclittica, ed E il suo polo. La differenza data di ascensione retta è LPS, SM quella di declinazione; le differenze cercate di longitudine e di latitudine sono LES, e SN.

Siccome, moltiplicando LPS per sen.PL, si ha l'arco di parallelo LM, (394), così, trovato che fosse il valor di LN, dividendolo per sen.EL, si avrebbe quello di LES. Il problema può dunque risolversi col mezzo de' triangoletti SML, SNL, i quali contengono LM, LN, SM, SN. Questo è in fatti il metodo più usitato, considerando i detti triangoli come rettilinei rettangoli, e supponendo noto *l'angolo di posizione* PSE = NSH, e di più NSH $= 90° -$ NHS = MLN. Da questa ultima supposizione, e da quella degli angoli retti, nasce l'errore che ho dimostrato (534 a 539).

Fig. 67. Osservando che i triangoli LMS, LNS hanno due parti comuni, o eguali, cioè l'ipotenusa e l'angolo retto, posto $M = 90° = N$, si trovano pronte (270, 271) le soluzioni del problema. Facendo ivi $C = L$, $B = S$, $D = N$, $A = M$, si ha, per tutti i casi, $LN = LM \times \cos.MLN \pm SM \times \text{sen}.MLN$, e $SN = SM \times \cos.MLN \mp LM \times \text{sen}.MLN$; ovvero

$$\delta\,long. = \frac{1}{\cos.lat.}(\delta\,asc.r.\ \cos.decl.\ \cos.ang.posiz. \pm \delta\,decl.\ \text{sen}.ang.posiz.),$$

$$\delta\,lat. = \delta\,decl.\ \cos.ang.posiz. \mp \delta\,asc.r.\ \cos.decl.\ \text{sen}.ang.posiz.$$

Esaminando i diversi casi, trovo che i segni inferiori hanno luogo in due circostanze, purchè non siano per altro congiunte insieme: 1°. ne' *segni discendenti*, cioè quando gli astri corrispondono al secondo o al terzo quarto dell'eclittica; 2°. quando l'astro il più avanzato in ascensione retta è anche il più lontano dal polo boreale dell' equatore. Negli altri casi, o se queste due circostanze si trovano insieme, avranno luogo i segni superiori.

Quando poi la prima formola desse negativo il valor di $\delta\,long.$, sarà segno che in tal caso l'astro più avanzato in ascensione retta è il meno avanzato in longitudine. E quando l'altra formola desse negativo il valore di $\delta\,lat.$, sarà segno che in tal caso l'astro più vicino al polo boreale dell' equatore è il più lontano dal polo boreale dell' eclittica.

747. Per verificare le formole precedenti, sia L il centro della Luna, S il centro del Sole, onde $ES = 90°$; e sia $LS = 32'$, $MS = 16' = \delta\,decl.$ ☉☾, $PE = 23°\ 28'$, $PS = 67°$, e per conseguenza $PM = 67°\ 16' = PL$.

Nel triangolo rettilatero PES, dati i lati PE, PS, si trovano (440) *l'ang. di posiz.* del Sole, $PSE = 4°\ 47'\ 18'',7$; l'angolo $SPE = 167°\ 53'\ 57'',3$, onde *asc.r.*☉ $= 77°\ 53'\ 57'',3$; e l'angolo $PES = 11°7'33'',5$, che dà *long.*☉ $= 78°52'26'',5$. Risolvendo il triangolo PLS, nel qual sono dati i tre lati, si trova $PSL = 119°\ 54'\ 8'',6$, e $SPL = 30'\ 4'',6 = \delta\,asc.r.$ ☉☾. Finalmente

nel triangolo rettilatero LES, conoscendo LS, ed ESL = PSL — PSE = 115°6′49″, 8, si trova SEL = 28′58″, 5 = ☊*long.* ⊙☾, ed EL = 90° 13′ 34″, 9, che dà ☊*lat.* ⊙☾, ovvero *lat. austr.* ☾ = 13′ 34″, 9. Questi elementi, tutti determinati con calcolo scrupoloso, serviranno di comparazione.

748. Impiegando *decl.* ☾ nelle formole (746), come indica la fig., e potendosi far senza errore cos. *lat.* ☾ = 1, si ha ☊*long.* ⊙☾ = 30′ 4″, 6 cos. 22° 44′ cos. 4° 47′ + 16′ sen. 4° 47′ 20″ = 27′ 38″, 6 + 1′ 20″, 1 = 28′ 58″, 7 : l'errore di questo risultato potrebbe ben perdonarsi. Gli stessi logaritmi impiegati nel calcolo della prima formola servono a calcolar la seconda, e si trova ☊*lat.* ⊙☾ = 13′37″, 7; cioè 2″, 8 di più del giusto.

749. Questo errore proviene dalla causa esposta (539). In fatti ogni errore sparisce, se si ricorre alle correzioni che ho quivi suggerite. La tavola (536) fa conoscere che l'errore sull' angolo retto N è affatto insensibile, per essere NE poco differente da 90°; e per conseguenza si deve impiegare ne' calcoli (748) l'angolo di posizione NSH *aumentato* della quantità dell' errore dell' angolo retto M.

Questo errore, alla distanza MP, o 67° 16′, dal polo, è, giusto la detta tavola, 0′, 209 × ML = 0′, 209 × 30 cos. 22° 44′ = 5′, 78 = 5′ 47″. Devesi pure, a tenor della formola (537), impiegare ML *diminuito* della quantità 0″, 01745 × SM × 5,78 : ma, essendo più comodo l'applicar questa correzione all' angolo al polo MPL, convien dividere la detta quantità per cos. 22°44′, o pure in vece di 5′, 78, impiegare, nel calcolarla, 0′, 209 × MPL = 0, 209 × 30, con che si ha 0″, 01745 × 16 × 6, 27 = 1″, 75.

Si ponga pertanto nel calcolo (748), ☊*asc. r.* = 30′ 2″, 85, e *ang. posiz.* = 4° 53′ 6″, e si troverà ☊*long.* ⊙☾ = 28′ 58″, 5, e *lat. austr.* ☾ = 13′ 34″, 9; in perfetta conformità ai risultati del calcolo rigoroso (747).

750. Se i punti S, L denotano l' uno il centro di un astro, e

Fig.67 l'altro una *macchia* sul disco del medesimo, è chiaro che le stesse formole (746), calcolate con le correzioni (749) qualor le distanze dall' astro ai due poli siano sensibilmente diverse, daranno la soluzione esatta del problema.

751. Per trovare le differenze di longitudine e di latitudine fra il Sole e la Luna, sono state date da Mayer le due formole seguenti, che prendo dal Sig. Trembley (*Essai de Trigon. sphérique*, Chap. IX): $\delta\,long. = \delta\,asc.r.\ \cos.obl. + \delta\,decl.\ \text{sen}.obl. \times \cos.asc.r.\odot$, e $\delta\,lat. = \frac{\delta\,decl.\ \cos.obl.}{\cos.decl.\odot} - \delta\,asc.r.\ \text{sen}.obl. \times \cos.long.\odot$. Calcolando queste formole cogli elementi (747), risulta $\delta\,long. \doteq 28'\,55'',5$, e $\delta\,lat. = 13'\,38''$. L'errore è di 3″ tanto nell' uno quanto nell'altro di questi valori. Dette formole sono dunque inferiori alla esattezza, cui aspirano oggidì gli Astronomi.

752. *Date le differenze di altezza e di azzimutto fra due astri, trovare le differenze di ascensione retta e di declinazione.*

Se nella soluzione (746) si considera che P sia il zenit, E il polo dell' equatore, quelle formole danno (753)

$$\delta\,asc.r. = \frac{1}{\cos.decl.}(\delta\,azzim.\ \cos.alt.\ \cos.ang.\ variaz. \pm \delta\,alt.\ \text{sen}.ang.\ variaz.)$$

$$\delta\,decl. = \delta\,altezza\ \cos.ang.\ variaz. \mp \delta\,azzim.\ \cos.alt.\ \text{sen}.ang.\ variaz.$$

I segni inferiori hanno luogo, quando l'astro più basso ha minore azzimutto orientale, o maggiore azzimutto occidentale. Già s'intende per azzimutto il supplemento dell' angolo SPE.

753. Per distinguere l'uno dall'altro i due angoli, a ciascuno de' quali ho veduto accordare il nome di *angolo parallattico*, chiamerò sempre con questo nome l'angolo del verticale col circolo di latitudine; e chiamo *angolo di variazione* quello del verticale col circolo di declinazione, per contrapposto all' *angolo di posizione* che gli è contiguo; giacchè quello cangia ad ogni momento, nel mentre che questo rimane sensibilmente costante per tutte le stelle.

754. Le formole (746) si riducono pur facilmente a risolvere il seguente problema e l'inverso. *Date le differenze di altezza e di azzimutto, trovare le differenze di longitudine e di latitudine.* Ometto queste riduzioni, perchè le regole de' segni divengono più complicate, perchè la formazione dell' angolo parallattico ne esige molte altre, e perchè questi problemi sono stati risolti, con altro metodo e con le più minute spiegazioni, dal Sig. de la Lande (*Astr.* 2125 a 2129; e 1883 e segg.). Avverto solo che, tanto in questi problemi, come nell' altro (752), le mie correzioni (539) divengono più importanti, quanto è maggiore l'altezza degli astri sull'orizzonte. Esse per altro non sono necessarie nel bel metodo del Sig. *de la Lande* per il calcolo degli ecclissi, atteso che in quello i presenti problemi si risolvono successivamente, l'uno rispetto al luogo vero degli astri, l'altro rispetto al luogo apparente, e gli errori delle due operazioni si ricompensano, come ne ho fatto più volte esperienza.

755. *Trovare un metodo spedito per calcolare una tavola degli azzimutti, delle distanze al zenit, e degli angoli di variazione* (753), *per una data latitudine terrestre, presi per argomenti la declinazione e l' angolo orario.*

Una tavola simile è di grande utilità, per puntare, di giorno, il cannocchiale d'un quadrante sopra un astro che non si vede coll' occhio nudo, e di notte, sopra gli astri di poca luce; per calcolare l'effetto della refrazione in ascensione retta ed in declinazione; e per altre continue occasioni. Ogni paese, dove sia un Osservatorio attivo, dovrebbe averne una calcolata in minuti, a similitudine di quella che per Parigi si trova nella Conoscenza de' Tempi del 1782. Il Sig. *Prevost*, che è uno de' benemeriti autori di questa tavola, mi ha detto d'aver computato gli azzimutti e le distanze al zenit con diligenza, per via delle formole (VIII. 7ª, 8ª). Col metodo che sono per indicare, egli avrebbe ottenuto, senza maggior fatica, anche gli *angoli di variazione*, che furono calcolati dopo dal laboriosissimo Sig. *Lévêque*.

Fig. 68 Sia P il polo dell'equatore, Z il zenit, S un astro situato in qualunque parte del cielo visibile. Dati i lati PZ, PS, e l'angolo compreso P, si trovano ad un tratto con la bella soluzione di Neper (IX. 2ª) *l'azzimutto*, e *l'angolo di variazione*. Tenendo ferma la declinazione, non si ha da cangiare che il solo log. cot. $\frac{1}{2}$ *ang. orario*, per trovar successivamente i detti angoli, corrispondenti ad ogni angolo orario della tavola. Lo stesso si farà per ogni differente declinazione. Quindi, avendosi sen.S : sen.PZ :: sen.P : sen.ZS, siccome in questa analogia PZ è sempre costante, così tenendo fermo un angolo orario, non si avran da cercare che due logaritmi, per conoscer *la distanza al zenit*, corrispondente ad ogni declinazione. Lo stesso si farà per ogni differente angolo orario. E però in generale, con questo metodo, per determinare tre quantità, non si hanno da cercare che quattro logaritmi.

756. *Data l'altezza del polo, e osservate in un medesimo verticale due stelle, di cui si conoscono le declinazioni e le ascensioni rette, e per conseguenza i momenti de' loro passaggi al meridiano, trovar che ora fosse quando fu fatta l'osservazione.*

Fig. 69 Sia P il polo dell'equatore, Z il zenit, T, S le due stelle. Le cose note sono PZ, PT, PS, e TPS differenza delle ascensioni rette. Si cerca l'angolo TPZ.

Osservo che i triangoli PTZ, PTS hanno comuni le linee trigonometriche dell'angolo T; per il che, se si trova con la tavola VII che una di queste linee possa essere espressa, in ciascuno dei due triangoli, con le linee trigonometriche delle parti note e della cercata, il problema sarà risolto. In fatti ponendo A = T, B = P, C = Z, si ha (VII. 13ª), $\text{tang. PTZ} = \frac{\text{sen.TPZ}}{\text{sen.PT cot.PZ} - \text{cos.PT cos.TPZ}}$; e facendo C = S, $-\text{ tang.PTS} = \frac{\text{sen.TPS}}{\text{sen.PT cot.PS} - \text{cos.PT cos.TPS}}$. Posti in equazione questi due valori di tang.T, tolte le frazioni, e divisa l'equazione per cos.PT, risulta $\text{sen.TPS cos.TPZ} + (\text{cos.TPS} - \text{tang.PT cot.PS})\ \text{sen.TPZ} = \text{tang.PT cot.PZ sen.TPS}$. E però (369)

$$\text{tang.B} = \text{cot.TPS}\left(1 - \frac{\text{tang.PT cot.PS}}{\text{cos.TPS}}\right), \text{ e}$$

$$\text{cos.(TPZ} \backsim \text{B)} = \text{tang.PT cot.PZ cos.B.}$$

Per comodo del Calcolatore aggiungo :

TPS = differenza d'*ascensione retta* fra le due stelle, presa dalla parte ove sia minore di 180°.

PT = *distanza al polo*, della stella più alta.

PS = *distanza al polo*, della stella più bassa.

PZ = *distanza dal polo al zenit.*

TPZ = *angolo orario* cercato della stella più alta.

Quando fosse TPZ > 90°, si farà negativo il secondo membro di ognuna delle due formole, e si avrà il supplemento del valore cercato di TPZ.

757. *Determinare di quanto tempo la refrazione accelera il levare, o ritarda il tramontare degli astri.*

Sia P il polo dell'equatore, Z il zenit, OR l'orizzonte, T un astro, che innalzato dalla refrazione, della quantità TL determinata dagli Astronomi di 33′$\frac{1}{2}$ circa, apparisce levarsi al punto L. Senza questo innalzamento apparente, non si vedrebbe l'astro levarsi, se non quando giunge al punto S, posto PS = PT. Il suo nascere è dunque accelerato (e per la stessa ragione il suo tramontare ritardato) della quantità di tempo misurata dall'angoletto TPS. Fig.79

Osservo che i triangoli PZS, PTZ hanno due lati comuni, o eguali, cioè PZ, e PS = PT; e che, dato il valore di TL = ZT — ZS = ∂ZS, si tratta di dedurne il valore di TPS = ∂ZPS che nomino ∂P.

Ricorrendo alle analogie differenziali corrispondenti a questo caso, trovo (629) che, facendo A = P, B = Z, C = S, si ha sen.$\frac{1}{2}$∂ZS : sen.$\frac{1}{2}$∂P :: sen.PZ sen.PS sen.(P + $\frac{1}{2}$∂P) : sen.(ZS + $\frac{1}{2}$∂ZS). Ma, per esser ZS = 90°, sen.(ZS + $\frac{1}{2}$∂ZS) = cos.$\frac{1}{2}$∂ZS. Dunque (I. 6°)

(A)... sen.∂ZS : 2 sen.$\frac{1}{2}$∂P :: sen.PZ sen.PS sen.(P + $\frac{1}{2}$∂P) : 1;

Fig.70 ovvero (723), chiamando anche t il tempo cercato,

$$(B)\ldots\ \textit{Tempo cercato} = \frac{\textit{refrazione orizzontale}}{15\ \text{cos.}\textit{lat.}\ \text{cos.}\textit{decl.}\ \text{sen.}(\textit{ang.or.} + \tfrac{15}{2}t)}.$$

Come il valor di t si conosce sempre presso poco, così sarà raro il caso di dover calcolare questa formola più d'una volta col metodo (281). Se poi si vuole fare uso dell' altro (282), si osserverà che $2\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta_1 P\ \text{sen.}(P + \tfrac{1}{2}\delta_1 P) = \text{cos.}P - \text{cos.}(P + \delta_1 P)$, (II. 16ª); e l'analogia (A) darà

$$(C)\ldots\ \text{cos.}(P + \delta_1 P) = \text{cos.}P\left(1 - \frac{\text{sen.}\,\delta_1 ZS}{\text{sen.}PZ\ \text{sen.}PS\ \text{cos.}P}\right);\ \text{ovvero}$$

$$(D)\ldots\ \text{cos.}(\textit{ang.or.} + 15\,t) = \text{cos.}\,\textit{ang.or.}\left(1 - \frac{\text{sen.}\,\textit{refr. oriz.}}{\text{cos.}\textit{lat.}\ \text{cos.}\textit{decl.}\ \text{cos.}\textit{ang.or.}}\right)$$

758. Nelle formole precedenti, per P, o per *l'angolo orario*, s'intende l'angolo ZPS, cioè l'angolo orario dell'astro considerato nel piano dell' orizzonte. Questo angolo si ha facilmente, giacchè il triangolo rettilatero PZS dà (VII. 7ª), $\text{cos.}P = -\text{cot.}PZ\ \text{cot.}PS$, ovvero

$$\text{cos.}\,\textit{ang. or.} = -\ \text{tang.}\,\textit{lat.}\ \ \text{tang.}\,\textit{decl.}$$

Questa equazione fa vedere che, a declinazione uguale, l'angolo orario corrispondente alla boreale è ottuso, ed è il supplemento dell'angolo orario corrispondente alla declinazione australe. Ma quando P è ottuso, $\text{sen.}(P + \tfrac{1}{2}\delta_1 P) < \text{sen.}P$, e quando P è acuto, $\text{sen.}(P + \tfrac{1}{2}\delta_1 P) > \text{sen.}P$. L'analogia (A) fa dunque conoscere che, a declinazione uguale, l'effetto della refrazione non può esser lo stesso per la boreale e per l' australe, e che per conseguenza le tavole date fin'oggi sono in errore su questo punto.

Devo al Sig. Abate Pieracchi, Internunzio Pontifizio in Parigi, e distinto amator dell'Astronomia, la prima notizia di questo errore, ch' egli ha scoperto, risolvendo i triangoli pei tre lati onde avere il valore degli angoli al polo nei due casi, prima che io pensassi ad applicare le mie analogie differenziali finite al problema (757). Or conviene mostrare che l'accennato errore è assai grave in certi casi.

759. Sia $PZ = 30°$: facendo $PS = 61°$, si ha dalla formola (758), $P = 163° 45' 31''$; e facendo $PS = 119°$, $P = 16°.14' 29''$. Con questi elementi, e posto $\delta ZS = 33' 30''$, la formola (C) dà, per il caso della declinazione boreale, $P + \delta P = 169° 13' 36''$, e per conseguenza l'effetto della refrazione $\delta P = 5° 28' 5''$; e per il caso della declinazione australe, $P + \delta P = 20° 18' 48''$, onde allora $\delta P = 4° 4' 19''$. Il primo valor di δP ridotto in tempo è $21' 52''$, per la declinazione boreale; il secondo valore è di $16' 17''$, per la declinazione australe. La differenza è di $5' 35''$ di tempo. Dunque v'è quasi un errore di $6'$ di tempo, se si impiega per la declinazione boreale la quantità di $16' 9''$, che viene assegnata nella tavola della *Connoiss. des Temps*, 1782, pag. 302, per la declinazione di 29° e la latitudine di 60°. La tavola, che vien dopo, degli archi semidiurni apparenti per la latitudine di Parigi, sembra essere stata composta rigorosamente, con calcolo separato per le declinazioni boreali, e per le australi.

760. Se il valor di δP si calcolasse nell' esempio (759) col mezzo dell' analogia adottata da molti, $\delta P : \delta ZS :: 1 : \sqrt{(\text{sen.}^2 PS - \cos.^2 PZ)}$, la quale si risolve facilmente col metodo (716), si troverebbe $\delta P = 4° 33' 54''$; e per conseguenza l'errore dell'analogia infinitesimale sarebbe di $54'$ per la declinazione boreale, e di $30'$ per l'australe. Donde si vede l'utilità delle mie analogie differenziali finite, dalle quali è nata anche la formola (C), che stimo più pronta della risoluzione del triangolo pei tre lati, massime perchè serve alla declinazione boreale, ed all'australe, col solo cangiamento di un segno. Se poi si conosce all'incirca il valor di δP, o di $15\,t$, come succede nel calcolo di una tavola, mi lusingo che le soluzioni (A), (B) appariranno preferibili ad ogni altro metodo usato fin' ora.

761. Se in vece della refrazione orizzontale si pone il diametro del Sole, le formole (757) faranno conoscere *il tempo che il disco del Sole impiega a levarsi o a tramontare.*

E se, in vece della refrazione orizzontale, si pone la depres-

Fig.70 sione del circolo crepuscolare, che fu adottata di 18°, si avrà dalla formola (D) *la durata del crepuscolo*.

762. *Trovare il cangiamento d' amplitudine prodotto dalla refrazione sopra un astro che si leva o che tramonta.*

Ferme le denominazioni (757), l'arco SL dell' orizzonte, o sia l'angoletto LZS, che al solito chiameremo δZ, è quello di cui si cerca il valore.

La prima analogia (620) si riduce in questo caso, col metodo (282), ad espressione molto semplice; ma più speditamente si ottiene tale espressione, nel caso stesso, col metodo (725). Denotando per Z l'angolo PZS, e osservando che $PT = PS$, e che $TZ = 90^\circ + \delta ZS$, il triangolo PTZ dà (VII. 28°), $\cos.PT = \cos.(Z - \delta Z)\cos.\delta ZS \,\text{sen}.PZ - \text{sen}.\delta ZS \cos.PZ = \cos.PS$, e nel triangolo rettilatero PZS si ha $\cos.PS = \cos.Z \,\text{sen}.PZ$. Uguagliando i due valori di cos.PS, si ricava $\cos.(Z - \delta Z) = \text{tang}.\delta ZS \cot.PZ + \frac{\cos.Z}{\cos.\delta ZS}$. Le due ultime equazioni si riducono alle seguenti, chiamando *amplitudine vera* il complemento dell' angolo PZS, e *amplitudine apparente* il complemento di PZT:

$$\text{sen}.\,ampl.\,v. = \frac{\text{sen}.\,decl.}{\cos.\,lat.}.$$

$$\text{sen}.\,ampl.\,ap. = \frac{\text{sen}.\,ampl.v.}{\cos.\,refr.\,oriz.}\left(1 + \frac{\text{sen}.refr.\,oriz.\ \text{tang}.\,lat.}{\text{sen}.ampl.v.}\right).$$

La differenza dall' amplitudine vera all' apparente è ciò che si cerca. Un esempio sarà utile a più fini.

763. Sia $PZ = 41^\circ\,12'\,20''$, $PS = 51^\circ\,25'\,20''$, e $\delta ZS = 33' = refr.oriz.$ Col mezzo delle formole precedenti si troverà $ampl.v. = 71^\circ\,11'\,21''$, e $ampl.ap. = 73^\circ\,15'\,17''$. E però l'effetto della refrazione sull' amplitudine in questo caso è $2^\circ\,4'$.

764. Se, cogli stessi elementi, s'impiega, in vece delle mie formole rigorose, l'analogia (714), $\delta Z : \delta ZS :: \cos.PZ : \sqrt{(\text{sen}.^2 PS - \cos.^2 PZ)}$, si troverà $\delta Z = 1^\circ\,57'$. Un errore di $7'$, su tal quantità, fa vedere con quanto ritegno si debba fare uso delle analogie infinitesimali.

765. Se nell'esempio (763) si fa $\delta ZS = 32''$, le mie formole danno $\delta Z = 2^{\circ}\,0'$. Dunque la variazione di $1''$ nella refrazione orizzontale produce in questo caso un cangiamento di $4'$ nell'amplitudine apparente, e per conseguenza di $8'$ se si prende la somma de' cangiamenti tra l'amplitudine ortiva e l'occasa. Conviene dunque attribuire a qualche svista di calcolo ciò che fu detto, che $1''$ di variazione nella refrazione orizzontale, alla latitudine data (763), produce un cangiamento di $29'$ sull'amplitudine ortiva ed occasa della Lira.

766. *Trovare l'elongazione di un pianeta, al tempo della sua stazione apparente.*

Considereremo il pianeta nel piano dell'eclittica, e le orbite del pianeta e della Terra circolari. L'error della prima ipotesi è tenue; daremo un modo facile per riparare all' errore della seconda.

Sia p l'angolo al pianeta, o la *parallasse annua*; e l'angolo alla Terra, o l'*elongazione*. Nella supposizione delle orbite circolari, i lati opposti a questi angoli sono costanti, il che dà (614), $\delta p : \delta e :: \text{tang.} p : \text{tang.} e$. Se si chiama $\odot$ la longitudine del Sole, g la longitudine geocentrica del pianeta, h l'eliocentrica, si ha (*Astr.* de M. de la Lande, 1142, 1141), $g = \odot - e$, $p = h \backsim g$. Ora un pianeta si dice *stazionario*, quando la sua longitudine geocentrica non varia. Le ultime equazioni danno dunque in tal caso $\delta\odot = \delta e$, e $\delta p = \delta h$; laonde $\delta h : \delta\odot :: \text{tang.} p : \text{tang.} e$. Ma i moti simultanei, δh, $\delta\odot$, del pianeta e della Terra, sono in ragione inversa delle loro rivoluzioni periodiche, giacchè il moto angolare tanto è maggiore, quanto è più breve il tempo della rivoluzione. Chiamando R la rivoluzione periodica della Terra, r quella del pianeta, si ha dunque $\delta h : \delta\odot :: R : r$, e per conseguenza $R : r :: \text{tang.} p : \text{tang.} e$. Ma, secondo la legge di Keplero, $R^2 : r^2 :: D^3 : d^3$, nominando D la distanza media del Sole alla Terra, d quella del Sole al pianeta. Dunque $D^3 : d^3 :: \text{tang.}^2 p : \text{tang.}^2 e$, ovvero (9), $\frac{D^2}{d} : \frac{d^2}{D} :: \frac{\text{sen.}^2 p}{\text{cos.}^2 p} : \frac{\text{sen.}^2 e}{\text{cos.}^2 e}$. Ma i

numeratori contengono la proporzione notissima fra i lati e i seni degli angoli opposti. Dunque anche i denominatori sono in proporzione (13). L'analogia de' numeratori dà $\text{sen.}^2 p = \frac{D^2 \text{ sen.}^2 e}{d^2}$; quella dei denominatori $\cos.^2 p = \frac{d \cos.^2 e}{D}$. Ma $\text{sen.}^2 p + \cos.^2 p = \text{sen.}^2 e + \cos.^2 e$, (28). Dunque $\frac{D^2 \text{ sen.}^2 e}{d^2} + \frac{d \cos.^2 e}{D} = \text{sen.}^2 e + \cos.^2 e$; dalla quale equazione si cava

$$\text{tang.}\, e = \frac{d}{\sqrt{(D^2 + Dd)}} = \frac{d}{D} \times \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{d}{D}\right)}}.$$

E facendo $D = 1$, come è solito,

$$(\text{E})\ldots\ \text{tang.}\, elong. = \frac{\textit{dist. med.}\ \text{pianeta}}{\sqrt{(1 + \textit{dist. med.}\ \text{pian.})}}.$$

La dimostrazione di questa formola semplicissima è tratta in gran parte dalle Istituzioni Astronomiche del celebre Sig. *le Monnier.*

Per render più esatto e più comodo il calcolo, se si fa $\text{tang.}\, x = \sqrt{\frac{d}{D}}$, si avrà (198), $\text{tang.}\, e = \frac{d}{D} \times \cos.\, x = \text{tang.}^2 x \cos.\, x$: quindi, ponendo i raggi vettori attuali in vece delle distanze medie, il che renderà insensibile l'errore dell'ipotesi delle orbite circolari,

$$\text{tang.}\, x = \sqrt{\frac{\textit{rag. vet.}\ \text{pianeta}}{\textit{rag. vet.}\ \text{Terra}}},$$

$$\text{tang.}\, elong. = \text{sen.}\, x\ \text{tang.}\, x.$$

Conosciuto prossimamente il tempo della stazione, impiegando in un primo calcolo le distanze medie, si potranno poi surrogare ad esse i raggi vettori dati dalle tavole per quel tempo, e si perverrà a determinarlo con molto maggior precisione.

767. *La teoria del moto ellittico de' pianeti* dà le sei equazioni seguenti, la dimostrazion delle quali non appartiene alla Trigonometria pura, poichè dipendono dall' osservazione, dalla legge delle aree proporzionali ai tempi, e dalle proprietà dell' ellissi. Sia a il

a il semiasse maggiore dell' orbita di un pianeta,

b il semiasse minore, u l'anomalia vera,

e l'eccentricità, x l'anomalia eccentrica,

r il raggio vettore del pianeta, z l' anomalia media.

Si ha, riportandomi alle dimostrazioni, che dà il Sig. de la Lande nella *seconda Edizione* della sua Astronomia, che è quella che cito sempre,

1ª EQUAZIONE... $z = x + \frac{e}{a} \times \text{sen.}x$, (*Astr.* 1241);

2ª $r = a + e \cos.x$, (*Astr.* 3270);

3ª $r = \frac{bb}{a - e \cos.u}$, (*Astr.* 3279);

4ª $r = b \times \frac{\text{sen.}x}{\text{sen.}u}$, (*Astr.* 1245);

5ª $\text{tang.}\frac{1}{2}u = \text{tang.}\frac{1}{2}x \sqrt{\frac{a-e}{a+e}}$, (*Astr.* 1240).

La ragione fra le quantità costanti a, b, e, si ha dall'equazione seguente:

6ª $aa = bb + ee$, (*Astr.* 3269).

Per simplificare le operazioni, si fa ordinariamente $a = 1$. Allora conviene impiegare ne' calcoli numerici i valori di b, e, r, proporzionali al valore di $a = 1$. Per esempio, le tavole di Mercurio del Sig. de la Lande danno $a = 38709{,}88$; $e = 7960$. Se si fa $= 1$, il valore di e sarà $\frac{7960}{38709{,}88}$.

Dalle equazioni precedenti si ricavano le otto seguenti che sono molto utili, e delle quali darò la dimostrazione subito dopo.

7ª $\delta x = \frac{\delta z}{1 + \frac{e}{a} \times \cos.x}$;

8ª $\delta r = -\delta z \times \frac{ae}{bR''} \times \text{sen.}u$;

9ª $\delta u = \delta x \times \frac{\text{sen.}u}{\text{sen.}x}$;

10ª $\delta u = \delta z \times \frac{ab}{rr}$.

Queste quattro equazioni non sono esatte, se non quando i differenziali siano infinitamente piccoli. Per gli altri casi, propongo in vece le seguenti, come molto più prossime al giusto.

$$11^a \quad \delta x = \frac{\delta z}{1 + \frac{e}{a} \times \cos.(x + \frac{1}{2}\delta x)};$$

$$12^a \quad \delta r = - \delta z \times \frac{ae}{bR''} \times \text{sen.}(u + \tfrac{1}{2}\delta u);$$

$$13^a \quad \delta u = \delta x \times \frac{\text{sen.}(u + \frac{1}{2}\delta u)}{\text{sen.}(x + \frac{1}{2}\delta x)};$$

$$14^a \quad \delta u = \delta z \times \frac{ab}{(r - \frac{1}{2}\delta r)^2}.$$

768. Dimostrazione delle equazioni 7^a..... 14^a.

Prendendo i differenziali finiti nell' equazione 1^a, si ha $\delta z = \delta x + \frac{e}{a} \times 2\ \text{sen.}\frac{1}{2}\delta x\ \cos.(x + \frac{1}{2}\delta x)$, (II. 30^a). Ponendo δx in vece di $2\ \text{sen.}\frac{1}{2}\delta x$, (259), ne risulta l'equazione 11^a. Se δx è infinitamente piccolo, questa si trasforma (140) nella 7^a.

Operando similmente sull' equazione 2^a, si ha, cangiando i segni, $-\delta r = \frac{\delta x}{R''} \times e\ \text{sen.}(x + \frac{1}{2}\delta x)$: δx deve esser diviso per R'', (262), a motivo che r e x non sono quantità della stessa natura (730). Si sostituisca al numeratore δx il suo valore, preso dall' equazione 11^a, e si avrà $-\delta r = \delta z \times \frac{ae}{R''} \times \frac{\text{sen.}(x + \frac{1}{2}\delta x)}{a + e \cos.(x + \frac{1}{2}\delta x)}$. Supponiamo per approssimazione (722), che r, x, e u arrivino alla metà della loro variazione contemporaneamente; l'ultimo denominatore si ridurrà, in virtù della 2^a equazione, a $(r - \frac{1}{2}\delta r)$; e la 4^a darà $\text{sen.}(x + \frac{1}{2}\delta x) = \frac{(r - \frac{1}{2}\delta r)\,\text{sen.}(u + \frac{1}{2}\delta u)}{b}$. Facendo queste sostituzioni nell' equazione precedente, si avrà la 12^a. Questa poi si riduce alla 8^a, per le variazioni infinitesime.

Differenziando l'equazione 5^a, si ha (132), $\frac{\frac{1}{2}\delta u}{\cos.\frac{1}{2}u\ \cos.(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\delta u)} : \frac{\frac{1}{2}\delta x}{\cos.\frac{1}{2}x\ \cos.(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\delta x)} :: \text{tang.}\frac{1}{2}u : \text{tang.}\frac{1}{2}x$. Donde si cava $\delta u =$

$\delta x \times \frac{\text{sen.}\frac{1}{2}u\ \cos.\frac{1}{2}(u + \delta u)}{\text{sen.}\frac{1}{2}x\ \cos.\frac{1}{2}(x + \delta x)}$. Da questa equazione, se si suppone, per approssimazione, $\frac{\cos.\frac{1}{2}(u + \delta u)}{\cos.\frac{1}{2}(x + \delta x)} = \frac{\cos.\frac{1}{2}u}{\cos.\frac{1}{2}x}$, si ha l'equazione 9ª. Ma perchè in vece si può suppor con egual ragione $\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}u}{\text{sen.}\frac{1}{2}x} = \frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(u + \delta u)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(x + \delta x)}$, il che darebbe $\delta u = \delta x \times \frac{\text{sen.}(u + \delta u)}{\text{sen.}(x + \delta x)}$; si avrà dunque in generale un'espressione più esatta nell'equazione 13ª, che tiene il mezzo fra quest'ultima e la 9ª.

Abbiamo assunto $r - \frac{1}{2}\delta r$ in vece di $a + e\cos.(x + \frac{1}{2}\delta x)$. Per tal modo la 11ª diviene, $\delta x = \frac{a\delta z}{r - \frac{1}{2}\delta r}$. Ponendo questo valore nella 13ª, come pur quello di sen. $(x + \frac{1}{2}\delta x)$ usato quì sopra, ne risulta la 14ª; che poi si riduce alla 10ª.

Le formole fondamentali, che per comodo degli Astronomi ho raccolte insieme (767), mi serviranno ora utilmente alla risoluzione di diversi problemi, ne' quali suppongo sempre note le quantità a, b, e.

769. Problema di Keplero. *Data l'anomalia media, trovar l'anomalia vera.*

Soluzione I. Tutta la difficoltà consiste nel trovar l'anomalia eccentrica, giacchè, conoscendosi questa, l'equazione 5ª risolve tosto il problema. Ci restringeremo dunque a cercare x col mezzo dell'equazione 1ª; per risolver la quale non essendovi metodo rigoroso, quello generale di approssimazione, che ho proposto (364), mi sembra il più spedito finora.

Imponendo a x un valore arbitrario, l'equazione 1ª darà un errore sul valore di z. Con questo errore, chiamato δz, si troverà poi, per mezzo della 11ª, la correzione δx, che deve farsi al valore supposto di x, per averlo giusto. Qualche esempio farà veder l'esattezza e celerità di questa operazione.

Sia $z = 90°$, e si cerchi x nell'orbita di Mercurio. Per dare a x un valore molto prossimo al giusto, osservo primieramente nell'equazione 1ª, che quando $x < 180°$, cioè ne' primi sei segni

dell' anomalia media, è sempre $z > x$, e che viceversa $z < x$ negli ultimi sei segni di detta anomalia, poichè allora sen.x è negativo, (42). Nel caso proposto devo dunque supporre $x < z$. Secondariamente comincio il calcolo dell' equazione 1ª dal ridurre in gradi il valore di $\frac{e}{a}$. Prendendo gli elementi nelle tavole del Sig. de la Lande, si ha

$$\begin{aligned} \log.e &= 3,9009131 \\ \text{compl.}\log.a &= 5,4121781 \\ \log.\tfrac{e}{a} &= 9,3130912 \\ (262),\ \log.R^{\circ} &= 1,7581226 \\ \log.\text{costante} &\quad\ 1,0712138 \end{aligned}$$

E però $\frac{e}{a} \times R^{\circ} = 12^{\circ}$ circa. Per terminare il calcolo dell' equazione 1ª, si tratta di prendere il seno di un arco x, il qual seno, moltiplicato per 12°, dia un prodotto eguale a $z - x$, ovvero a $90^{\circ} - x$ nel caso presente. Passando solamente coll'occhio sulle tavole de' seni naturali, facilmente si scorge che sen. 79° sarebbe troppo grande, e sen. 78° troppo piccolo. Faccio dunque $x = 78^{\circ}30'$, e riducendo in secondi il valore di $\frac{e}{a} \times R^{\circ}$ col moltiplicarlo per 3600, finisco il calcolo come segue:

$$\begin{aligned} \log.\text{costante} &\quad\ 1,0712138 \\ \log.3600 &= 3,5563025 \\ \log.\text{sen}.78^{\circ}\,30' &= 9,9911927 \\ \text{Somma} &\quad\ 4,6187090 \\ \text{Dunque}\ \tfrac{e}{a} \times R'' \times \text{sen}.78^{\circ}\,30' &= 41563'',20 \\ \text{Ma}\ z - x = 11^{\circ}\,30' &= 41400'',00 \\ \text{Dunque l'errore}\ \delta z &= \quad 163'',2 \end{aligned}$$

Suppongo per approssimazione $\delta x = \delta z$, il che dà $\frac{1}{2}\delta x =$

1′ 22″ circa; e osservando che il valore di z dato da questo calcolo è maggiore del giusto, onde la correzione δx deve essere negativa, faccio il calcolo dell'equazione 11ª, come segue:

$$\log.\tfrac{e}{a} \text{ preso quì sopra } = 9,31309$$
$$\log.\cos.(x - \tfrac{1}{2}\delta x = 78^\circ\, 28'\, 40'') = 9,30048$$
$$\text{Somma} \quad \overline{8,61357}$$
$$\text{E però } \tfrac{e}{a} \times \cos.(x - \tfrac{1}{2}\delta x) = 0,041075$$
$$\text{compl.}\log.\, 1,041075 = 9,98252$$
$$\log.(\delta z = 163'',2) = 2,21272$$
$$\log.\delta x = \overline{2,19524}$$

Per il che $\delta x = -156'',76 = -2'\, 36'',76$; e per conseguenza $x = 78^\circ\, 27'\, 23'',24$. Questo valore non è fallace nè meno di $\frac{1}{100}$ di secondo, come si può vedere calcolando con esso l'equazione 1ª.

770. Per un esempio più convincente della generale utilità del mio metodo, sia ora $z = 180^\circ\, 12'\, 27'',83$, e si cerchi x nell'orbita della cometa del 1759, impiegando gli elementi dati dal Sig. de la Lande (*Astr.* 3097).

$$\log.(e = 17,492225) = 1,2428457$$
$$\text{compl.}\log.(a = 18,07575) = 8,7429037$$
$$\log.\tfrac{e}{a} = \overline{9,9857494}$$
$$\log.R^\circ = 1,7581226$$
$$\log.\text{costante} \quad \overline{1,7438720}$$

Laonde $\frac{e}{a} \times R^\circ = 55^\circ$ circa. Conviene trovare il seno di un arco x, il qual seno moltiplicato per 55° dia un prodotto eguale a $z - x$. Negligendo in questa ricerca i 180° nell'una e nell'altra anomalia, il prodotto, preso col segno positivo, deve essere uguale a $x - 13'$. Con pochi esperimenti sulle tavole de' seni, trovo che

sen. $5° 10' = 0,09$ potrebbe fare al caso, giacchè $55° \times 0,09 = 4°,95 = 4° 57' = 5° 10' - 13'$. Faccio dunque $x = 185° 10'$.

$$\begin{array}{rl} \text{log. costante} & 1,7438720 \\ \text{log. } 3600 = & 3,5563025 \\ \text{log.} - \text{sen. } 185° 10' = & 8,9544991 \\ \hline \text{Somma} - & 4,2546736 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{E per conseguenza } \frac{e}{a} \times R'' \times \text{sen. } 185° 10' = & -\ 17975'',195 \\ \text{Ma } z - x = 180° 12' 27'',83 - 185° 10' = & -\ 17852\ \ ,170 \\ \hline \text{Dunque l'errore } \delta z = & 123'',025 \end{array}$$

Questo calcolo dà il valore di z troppo piccolo: δx sarà dunque additivo. Per le comete non può supporsi $\delta x = \delta z$; e però nel calcolo dell'equazione 11ª conviene impiegare, per prima approssimazione, cos. x in vece di cos. $(x + \frac{1}{2} \delta x)$.

$$\begin{array}{rl} \text{log. } \frac{e}{a} \text{ preso qui sopra} = & 9,98575 \\ \text{log.} - \text{cos.} (x = 185° 10') = & 9,99823 \\ \hline \text{Somma} - & 9,98398 \\ \text{E però } \frac{e}{a} \times \text{cos. } x = - & 0,9638 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{compl. log.} (1 - \frac{e}{a} \text{cos. } x = 0,0362) = & 1,44129 \\ \text{log.} (\delta z = 123'',025) = & 2,09000 \\ \hline \text{log. } \delta x = & 3,53129 \end{array}$$

Onde, per prima approssimazione, si ha $\delta x = 56' 39''$. Questa correzione essendo alquanto grande, giova meglio servirsene per ricominciare il calcolo, se si vuole ottenere un risultato sommamente esatto. Trovo allora

$$\begin{array}{rl} \frac{e}{a} \times R'' \times \text{sen. } 186° 6' 40'' = & -\ 21249'',478 \\ z - x = 180° 12' 27'',83 - 186° 6' 40'' = & -\ 21252\ \ ,170 \\ \hline \text{Dunque l'errore } \delta z = & 2'',692 \end{array}$$

Quindi $\frac{e}{a}$ cos. $(x = 186° 6' 40'') = -0,96222$, impiegando ora i logaritmi con sei decimali, e $\delta x = \frac{2'', 692}{0, 03778} = 1' 11'', 255$. Questa correzione δx è quì sottrattiva. Per averla più esatta, si ponga ora cos. $(x - \frac{1}{2}\delta x = 186° 6' 4'')$, in vece di cos. x, nell'ultimo calcolo, come prescrive l'equazione 11ª, e si troverà $\delta x = - 1' 11'', 29$: correzione esattissima, poichè se si calcola l'equazione 1ª, facendo $x = 186° 5' 28'', 71$, si trova appunto $z = 180° 12' 27'', 83$.

Siccome le comete non sono visibili se non che nelle vicinanze del perielio, così da questo sogliono contarsi le loro anomalie. Bisogna però ridurle, come contate dall' afelio, quando si voglia fare uso delle equazioni (767), che sono costrutte su questa ipotesi. Per ciò le anomalie date si aumenteranno di 180° dopo il passaggio al perielio, e si prenderà il loro supplemento a 180° avanti il passaggio.

771. Soluzione II. Se si spingono fino alla nona potenza dell' eccentricità le operazioni del. Sig. de la Lande (3335), nelle quali $a = 1$, si trova

$$z =$$

$$u + 2e \text{ sen.} u + (\tfrac{3}{4} e^2 + \tfrac{1}{8} e^4 + \tfrac{3}{64} e^6 + \tfrac{3}{128} e^8) \text{ sen.} 2u$$
$$+ (\tfrac{1}{3} e^3 + \tfrac{1}{8} e^5 + \tfrac{1}{16} e^7 + \tfrac{7}{192} e^9) \text{ sen.} 3u + (\tfrac{5}{32} e^4 + \tfrac{3}{32} e^6 + \tfrac{15}{256} e^8) \text{ sen.} 4u$$
$$+ (\tfrac{3}{40} e^5 + \tfrac{1}{16} e^7 + \tfrac{3}{64} e^9) \text{ sen.} 5u + (\tfrac{7}{192} e^6 + \tfrac{5}{128} e^8) \text{ sen.} 6u$$
$$+ (\tfrac{1}{56} e^7 + \tfrac{3}{128} e^9) \text{ sen.} 7u + \tfrac{9}{1024} e^8 \text{ sen.} 8u + \tfrac{5}{1152} e^9 \text{ sen.} 9u.$$

Questa serie, convertita col metodo che ho proposto (371, 372), mi ha dato la seguente, che risolve il problema :

$$u =$$

$$z - (2e - \tfrac{1}{4} e^3 + \tfrac{5}{96} e^5 + \tfrac{107}{4608} e^7 + \tfrac{6217}{368640} e^9) \text{ sen.} z +$$
$$(\tfrac{5}{4} e^2 - \tfrac{11}{24} e^4 + \tfrac{17}{192} e^6 + \tfrac{43}{5760} e^8) \text{ sen.} 2z - (\tfrac{13}{12} e^3 - \tfrac{43}{64} e^5 + \tfrac{95}{512} e^7 - \tfrac{973}{61440} e^9) \text{ sen.} 3z$$
$$+ (\tfrac{103}{96} e^4 - \tfrac{451}{480} e^6 + \tfrac{4123}{11520} e^8) \text{ sen.} 4z - (\tfrac{1097}{960} e^5 - \tfrac{5957}{4608} e^7 + \tfrac{164921}{258048} e^9) \text{ sen.} 5z$$
$$+ (\tfrac{1223}{960} e^6 - \tfrac{7913}{4480} e^8) \text{ sen.} 6z - (\tfrac{47273}{32256} e^7 - \tfrac{1173271}{737280} e^9) \text{ sen.} 7z$$
$$+ \tfrac{556403}{322560} e^8 \text{ sen.} 8z - \tfrac{10661993}{5160960} e^9 \text{ sen.} 9z.$$

Colgo questa occasione per rendere omaggio all' insigne Geometra Sig. Ab. Bossut, il quale ha dato (*Mémoires des Prix*, 1766) un metodo molto semplice ed elegante, e, per esperienza fatta, non più laborioso del mio, per ottenere questa ultima serie. Ma come il mio metodo è puramente trigonometrico, così ho creduto dover preferirlo in questo Trattato. Bensì avendo io trovato, per ambi i metodi, gli stessi coefficienti numerici fino alla 8ª potenza dell'eccentricità inclusivamente (ho calcolato quei della 9ª per il mio metodo solamente), ho tutta la ragione di crederli esenti da ogni errore.

Il Sig. Jeaurat (*Mémoires présentés à l'Acad.* Tom. IV, p. 605) ha dato una serie, spinta fino ad e^8, la qual serve a trovar similmente il raggio vettore, per mezzo dell' anomalia media.

772. *Trovare un metodo spedito per calcolare le tavole dell'equazione del centro, e del raggio vettore di un pianeta.*

Le formole (767, 12ª, 14ª) possono servire a questi calcoli con somma brevità, senza nuocere all'esattezza che può desiderarsi. Se ne dia un esempio sull'orbita più ellittica, cercando l'equazione del centro e il raggio vettore di Mercurio, per 1° di anomalia media.

Partendo da $z = 0$, dove $r = a + e$, sarà $\delta z = 1°$. Calcolando l' equazione 14ª cogli elementi dell' orbita, del Sig. *de la Lande*, e impiegando nel primo calcolo r in vece di $(r - \frac{1}{2}\delta r)$, a cagione che δr non è noto ancora, si ha

$$\begin{array}{rcl} \log.(\delta z = 3600'') & = & 3,5563025 \\ \log. a & = & 4,5878219 \\ \log. b & = & \underline{4,5784400} \\ \log.\text{costante} & & 2,7225644 \\ \text{compl.}\log. rr & = & \underline{0,6619268} \\ \log.\delta u & = & 3,384491 \end{array}$$

E però $\delta u = 40' \, 23''$, 77 prossimamente.

Chiamando q l' equazione del centro, si sa che $z - u = q$, il che

che dà $\delta z - \delta u = \delta q$. Dunque, nel nostro esempio, $\delta q = 60' - 40' \, 24'' = 19' \, 36''$. Questa è la differenza dell' equazione del centro, da $z = 0$ a $z = 1°$. Ma è noto che quando $z = 0$, anche $u = 0$, e per conseguenza $q = 0$. Dunque, per il caso di $z = 1°$, si ha $u = 40' \, 24''$, e $q = 19' \, 36''$. Questa è appunto l'equazione del centro di Mercurio, a 1° di anomalia media, nelle tavole del Sig. *de la Lande*.

Passando al calcolo del raggio vettore, giova ridur l'equazione 12ª a dar le differenze de' logaritmi, giacchè questi sono quelli che pongonsi nelle tavole. Prendendo il primo termine della serie (G), (175), che è molto più esatto del primo termine della serie (E), si ha $-\delta \log. r = - M \times \frac{\delta r}{r - \frac{1}{2} \delta r}$; e sostituendo il valore di δr, (767, 12ª),

$$- \delta \log. r = \frac{M a e \, \delta z}{b R''} \times \frac{\text{sen.}(u + \frac{1}{2} \delta u)}{r - \frac{1}{2} \delta r},$$

la quale equazione si calcola come segue:

$$
\begin{aligned}
(177), \log. M &= 9,6377843 \\
\log. a &= 4,5878219 \\
\log. e &= 3,9009131 \\
\log. \delta z &= 3,5563025 \\
\text{compl.} \log. b &= 5,4215600 \\
(262), \text{compl.} \log. R'' &= 4,6855749 \\
\hline
\log. \text{costante} &\quad 1,789957 \\
\log. \text{sen.} (u + \tfrac{1}{2} \delta u = 0° \, 20' \, 12'') &= 7,769075 \\
\text{compl.} \log. (r = a + e) &= 5,330963 \\
\hline
\log. (- \delta \log. r) &= 4,889995 \\
\text{Questo logaritmo dà } \delta \log. r &= -0,0000078 \\
\text{Ma } \log. r &= 4,6690366 \\
\hline
\text{Somma} &\quad 4,6690288
\end{aligned}
$$

Questo logaritmo conviene con quello del raggio vettore di Mercurio, a 1° d'anomalia media, nelle tavole del Sig. *de la Lande*.

Il valore trovato di $\delta \log. r$ serve a correggere i due calcoli fatti, dove bisognava impiegare $\log.(r - \frac{1}{2}\delta r)$ in vece di $\log. r$. Tal correzione si riduce, ad aggiunger 4 all' ultima nota di $\log.(-\delta \log. r)$, il che non altera punto in questo caso il valore di $\delta \log. r$; e ad aggiunger 8 all' ultima nota di $\log. \delta u$, il che dà più esattamente $\delta u = 40' \, 23'', 81$.

Facendo $z = 1°$, si troveranno nel modo stesso i valori di u, e di q, corrispondenti a $z = 2°$; e così si procederà di grado in grado. Per conoscere la celerità di queste operazioni, si osservi 1°. che l' andamento de' valori successivi di $\delta \log. r$ avverte il Calcolatore, qual sia il valore del tutto prossimo di $\log.(r - \frac{1}{2}\delta r)$, che impiegar deve in ogni calcolo, onde cessa la molestia delle correzioni susseguenti; 2°. che, in grazia de' logaritmi costanti, i due calcoli insieme, dell' equazion del centro, e del raggio vettore, non costano altra fatica, che di cercare tre logaritmi, per ogni grado di anomalia media.

Dubitar si potrebbe che, facendo uso di formole bensì prossimamente giuste, ma non affatto rigorose, l' accumulazion degli errori diventi alla lunga non dispregevole. È facile uscir d' apprensione, facendo i calcoli qualche volta per mezzo delle equazioni (767, 1ª, 2ª, 5ª), e cercando x per il metodo (769). Per esempio, suppongo che questi calcoli più sicuri si facciano ad ogni 30° di anomalia media. Quindi per fare con ogni cautela i calcoli intermedj, col mezzo delle mie formole differenziali, 1°. si terrà conto delle centesime di secondo nel formare i valori successivi di u e q; 2°. si formeranno i logaritmi successivi del raggio vettore con una decimale almeno di più di quelle che voglionsi mettere nella tavola; 3°. si partirà da 0° d' anomalia media per montar fino a 15°, e si partirà da 30° per discendere fino a 15°; e così sia detto degli altri intervalli.

Si osservi perfine che le equazioni 12ª, 14ª, ed anche in vece di queste la 8ª e la 10ª, sono mirabilmente adattate a somministrare con gran precisione le parti proporzionali nell' uso delle tavole

già fatte, quando la desiderata esattezza non possa ottenersi, col mezzo della consueta regola del tre, a cagion delle variazioni troppo ineguali dell'equazione del centro, e del logaritmo del raggio vettore.

773. *Trovar la più grande equazione del centro di un pianeta.*

Al punto del valor massimo di q, si ha $\delta q = 0$, (141); per conseguenza l'equazione (772), $\delta q = \delta z - \delta u$, dà, in tal caso, $\delta z = \delta u$. Dunque allora $ab = rr$, (767, 10°), ovvero $r = \sqrt{ab} = \frac{bb}{a - e \cos. u}$, (767, 3°). Dall'ultima equazione si cava

$$\cos. u = \frac{a - b\sqrt{\frac{b}{a}}}{e}.$$

Questa formola è semplice e forse nuova; ma perchè la tenue differenza, che passa ordinariamente fra i due termini del numeratore, può nuocere all'esattezza de' minuti secondi nel valore di u, trasformo l'equazione, ed ho (I. 42°),

$$\tang. \tfrac{1}{2} u = \sqrt{\frac{b\sqrt{\frac{b}{a}} - (a - e)}{a + e - b\sqrt{\frac{b}{a}}}}$$

Ma $(a - e)(a + e) = bb$, (767, 6°). Prendendo in questa equazione il valore di $a - e$, e quello di $a + e$, sostituendoli nella precedente, e dividendo la frazione per $b\sqrt{\frac{b}{a}}$, ottengo un'altra espressione che può esser più comoda all'uso de' logaritmi, cioè

$$\tang. \tfrac{1}{2} u = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{ab}}{a + e}}{\frac{\sqrt{ab}}{a - e} - 1}}$$

L'una o l'altra delle due ultime formole farà conoscer con precisione l'anomalia vera, che corrisponde alla più grande equazione del centro. Il valore trovato di $\tang. \frac{1}{2} u$ sarà quindi opportuno al

calcolo dell'equazione 5ª (767), che farà conoscere l'anomalia eccentrica, dalla qual poi si dedurrà l'anomalia media, col mezzo dell'equazione 1ª. Finalmente il valor massimo cercato si avrà dalla seguente : $q = z - u$.

774. *Trovare un metodo espeditivo per calcolare la tavola generale del moto delle comete in un' orbita parabolica.*

Chiamando t il tempo (contato in giorni e decimali di giorno) scorso dopo il passaggio al perielio, della cometa di 109 giorni (così appellasi la cometa, il cui raggio vettore nel perielio sarebbe uguale alla distanza media del Sole alla Terra, perchè tal cometa partendo dal perielio trascorrerebbe 90° d'anomalia vera in 109 giorni), si ha (*Astr.* la Lande, 3034),

$$(F) \ldots\ldots \operatorname{tang.}^3 \tfrac{1}{2} u + 3 \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} u = \frac{4t}{109,6154};$$

E differenziando, $\frac{3\,\delta u \operatorname{tang.}^2 \frac{1}{2} u}{2 \cos.^2 \frac{1}{2} u} + \frac{3\,\delta u}{2 \cos.^2 \frac{1}{2} u} = \frac{4\,\delta t}{109,6154} = \frac{3\,\delta u}{2 \cos.^2 \frac{1}{2} u}(1 + \operatorname{tang.}^2 \tfrac{1}{2} u) = \frac{3\,\delta u}{2 \cos.^4 \frac{1}{2} u}$, (I. 19ª). Pongo, per maggiore esattezza, $\cos. \frac{1}{2}(u + \frac{1}{2}\delta u)$ in vece di $\cos. \frac{1}{2} u$, come apprendo, per analogia, dai differenziali finiti delle linee trigonometriche; ed ho

$$(G) \ldots\ldots \delta u = \frac{4 R'' \delta t}{164,4231} \times \cos.^4 \tfrac{1}{2}(u + \tfrac{1}{2}\delta u).$$

Il fattore R'' è necessario per ottenere δu in secondi.

È chiaro che, la frazione $\frac{4 R'' \delta t}{164,4231}$ essendo una quantità costante nel calcolo di una tavola, questo deve riuscire, col mezzo della mia formola, sommamente rapido. Sarà pure esattissimo, qualora si tenga conto delle centesime di secondo nel formare i valori successivi di u, come dissi (772), e qualora, per ovviare all'accumulazione de' piccoli errori, si risolva di tratto in tratto l'equazione (F), impiegando il valore di u trovato col mezzo della (G), e cercando quello di t. Con l'errore, che si scoprisse in questo, è facile correggere l'errore di u, col mezzo della stessa formola (G).

La tavola generale del moto delle comete è stata ricalcolata ed

ampliata con gran diligenza dal *P. Pingré* nella sua bella Cometografia. Ad ogni modo le formole (F), (G) si potranno applicare utilmente alla verificazione di quella, o di qualunque altra tavola simile, e ad ottenere le parti proporzionali, o sia le quantità intermedie, con somma precisione.

775. *Trovare il moto orario di un pianeta in longitudine.*

Chiamando δz il moto orario medio in longitudine, δu il moto orario vero sull' orbita (giacchè questi moti in un' ora di tempo sono sensibilmente uguali a quelli corrispondenti d'anomalia), la formola (767, 14°) risolve questo problema colla maggior precisione, quanta se ne può bramare in un passaggio di Mercurio o di Venere dinanzi al disco del Sole: quando poi non si esiga l'estremo scrupolo, basterà la 10°.

Se vuolsi il moto orario ridotto al piano dell' eclittica, si consideri che questo moto sia AE, e che il moto corrispondente sull' orbita sia CD. Poichè $A = 90° = E$, gli angoli A e B sono costanti, per il che permutando C in A e A in C nell' analogia infinitesimale (679) si ha $\delta AB : \delta BC :: \cos.B : \cos.^2 AC$. Ma AC è la latitudine eliocentrica del pianeta, B l' inclinazione dell' orbita, $\delta BC = CD = \delta u$. Dunque, facendo AE o $\delta AB = \delta u'$, e ponendo nella analogia il valore (767, 10°) di δu, si avrà

Fig. 52

$$\delta u' = \delta z \times \frac{ab}{rr} \times \frac{\cos.incl.}{\cos.^2 lat.}.$$

776. *Trovare il moto orario di un pianeta in latitudine.*

La distanza di un pianeta dal suo nodo ascendente, contata sull' orbita andando sempre dal nodo al pianeta, ma secondo l'ordine de' segni, si chiama *argomento di latitudine.* E come il moto del nodo è insensibile in un' ora di tempo, si ha $\delta arg.lat. = \delta long.$ pian. $= \delta u$, (775). Ciò posto, prendo l'equazione (*Astr.* la Lande, 1129), $sen.lat. = sen.incl.\ sen.arg.lat. = sen.incl.\ sen.dist.☊$, e differenziando ho, $\delta lat.\ cos.lat. = \delta u \cos.dist.☊\ sen.incl. = \delta u\ sen.lat.\ cot.dist.☊$. Sostituendo il valore di δu

(767, 10°), e intendendo ancora per δz il moto orario medio in longitudine, ottengo

$$\delta lat. = \delta z \times \frac{ab}{rr} \times \text{tang.} lat. \ \text{cot.} dist. ☊.$$

777. *Trovare il moto de' nodi delle orbite de' pianeti, sopra l'eclittica, prodotto dalle attrazioni reciproche.*

Fig. 71 Sia AB l'eclittica, supponendo che i segni procedano da B in A; AC l'orbita di un pianeta che nomino P, BC l'orbita di un altro pianeta p. Considero in prima l'effetto dell' attrazione del pianeta p, il qual fa ritrocedere sull' orbita propria BC il nodo C delle due orbite, sicchè l'orbita perturbata AC vien trasportata, per esempio, nella situazione ac. È visibile che questa perturbazione non altera l'angolo B. L'alterazione, che nasce nell' angolo C dell' inclinazione scambievole delle due orbite, è, per le osservazioni, talmente piccola, che relativamente al moto de' nodi si può considerar come quantità d'ordine secondario, e negligersi senza scrupolo supponendo $C = c$. Il triangolo ABC convertendosi in aBc conserva dunque costanti gli angoli B e C; e però si ha (675),

$$(\text{H}) \ldots\ldots \ \delta BC : \delta AB :: 1 : \cos.B + \text{sen.}B \ \cos.AB \ \cot.A.$$

Ora δBC è il moto retrogrado Cc dell' orbita perturbata, sopra quella del pianeta perturbatore, e la quantità di questo moto è determinata dalla teoría dell' attrazione: δAB è il moto cercato, del nodo A dell' orbita perturbata, sopra l'eclittica: B, o CBA, è l'inclinazione dell' orbita perturbatrice: A, o BAC, il supplemento dell' inclinazione dell' orbita perturbata: AB la distanza fra i nodi de' due pianeti sopra l'eclittica. Le tre ultime quantità sono sempre note; e però la mia analogia (H) ha il vantaggio di risolvere immediatamente il problema, senza bisogno di rintracciare con calcolo anticipato il valore d'alcuna altra parte del triangolo ABC.

Or passiamo a cercare il moto del nodo del pianeta p, prodotto Fig. 72 dall' attrazione del pianeta P. Si chiami BC l'orbita di questo, AC quella dell' altro, la quale viene trasportata in ac: e l'analogia (H)

servirà anche a questo caso, osservando soltanto che quì B è il supplemento dell'inclinazione dell'orbita perturbatrice, e BAC l'inclinazione stessa dell'orbita perturbata.

Dunque chiamando *PP* il pianeta perturbatore, *pp* il pianeta perturbato, *m* il moto dell'orbita perturbata, su quella del pianeta perturbatore, e osservando che in vece dell'angolo d'inclinazione di quello de' due pianeti, che ha il nodo più avanzato in longitudine, si deve impiegare il supplemento dell'angolo stesso, l'analogia (H) dà generalmente

(K)... *Moto del nodo* $= m$ (cos.*incl.PP* + sen.*incl.PP* cos.*dist.nodi* cot.*incl.pp*).

778. La fig. 71 suppone *retrogrado* il moto A*a* del nodo A sopra l'eclittica: la fig. 72 lo suppone *diretto*. Sarebbe tutto il contrario, se *ca* tagliasse CA fra i punti A e C, come pur succede. Importa dunque cercare una regola generale che additi, quando il moto cercato sia *diretto*, e quando *retrogrado*. I segni, che ho avuto cura di applicare ai differenziali nella costruzione delle mie analogie, dispensano da ogni studio per tale ricerca. Poichè δBC e δAB hanno il medesimo segno nell'analogia (H), ne segue (726) che queste variazioni si fanno nel medesimo senso, quando il quarto termine dell'analogia sia positivo; e in senso contrario, quando sia negativo. Ora, nel sistema dell'attrazione, il moto C*c* è sempre *retrogrado;* laonde BC diminuisce, e δBC è *negativo*. La diminuzione di AB denota poi moto retrogrado nel caso della fig. 71, e diretto nel caso della fig. 72. Dunque *il moto del nodo ascendente del pianeta perturbato è* $\left\{\begin{matrix}\text{diretto}\\ \text{retrogrado}\end{matrix}\right\}$ *quando il nodo ascendente del pianeta perturbatore è* $\left\{\begin{matrix}\text{più}\\ \text{meno}\end{matrix}\right\}$ *avanzato in longitudine, di quello del pianeta perturbato.* Questa regola suppone positivo il fattore binomio di *m* nell'equazione (K): quando sia negativo, si porrà nella regola stessa *meno* in vece di *più*, e *più* in vece di *meno*. In questo modo non si avrà mai bisogno d'avere una figura sott'occhio per guidare il calcolo.

779. Applichiamo la nostra soluzione e le nostre regole ad un esempio, nel qual faremo astrazione, per brevità, dal valore assoluto di ☊BC e di ☊AB. La longitudine del nodo di Saturno è attualmente $3^s\,22^\circ$, quella del nodo di Marte $1^s\,18^\circ$. Dunque la distanza de' nodi è di $2^s\,4^\circ = 64^\circ$. L'inclinazione dell'orbita di Saturno è $2^\circ 30'$, quella di Marte $1^\circ 51'$. Se si cerca l'effetto dell'attrazione di Marte, sul nodo di Saturno, si ha log.cos.*incl.PP* = log.cos. $1^\circ 51' = 9,9998$; e log. (sen. *incl.PP* cos.*dist. nodi* cot. *incl. pp*) = log. (sen. $1^\circ 51'$ cos. 64° cot. $177^\circ 30'$) = $-9,5107$, logaritmo di una quantità negativa (734). Come poi questo logaritmo è più piccolo del precedente, ne segue che il fattore binomio di m è una quantità positiva; e poichè il nodo di Marte, o sia del pianeta perturbatore, è *meno* avanzato in longitudine di quel che sia il nodo di Saturno, sarà dunque moto *retrogrado* quello del nodo di Saturno, in virtù dell'attrazione di Marte.

Se poi si cerca l'effetto dell'attrazione di Saturno, sul nodo di Marte, si ha log. cos. *incl. PP* = log. cos. $177^\circ 30' = -9,9996$; e log. (sen. *incl. PP* cos.*dist. nodi* cot. *incl. pp*) = log. (sen. $177^\circ 30'$ cos. 64° cot. $1^\circ 51'$) = $9,7723$. In tal caso il fattore di m risulta negativo, e però, permutando il *meno* col *più* nella regola, sarà il *più* corrispondente a *retrogrado*. Ma il nodo di Saturno, o sia del pianeta perturbatore, è il *più* avanzato in longitudine. Dunque anche l'attrazion di Saturno produce moto *retrogrado* nel nodo di Marte.

780. *Trovare il* maximum *del moto del nodo di un satellite sull' orbita di Giove, dipendentemente dall' attrazione di un altro satellite.*

Fig. 71 Sia BA l'orbita di Giove, BC quella del satellite perturbatore, AC quella del satellite perturbato. Le continuate perturbazioni fanno sì che i nodi A e C, a forza di ritrocedere in a e in c, e così successivamente, si confondono finalmente col nodo B. Di là l'orbita Fig. 72 perturbata AC passa e procede dall' altra parte del nodo B, fin a tanto

tanto che il nodo A arrivi ad una distanza dal nodo B, che è la massima possibile. Allora l'orbita AC ritrocede, i nodi A e C tornano infine a confondersi col nodo B; indi il nodo A si slontana da B, fin a tanto che la distanza AB sia la massima possibile. In questa guisa il nodo A del satellite perturbato va e viene periodicamente da una parte e dall'altra del nodo B del satellite perturbatore. Quel che si cerca nel presente problema, è il valor massimo di AB. Fig.72

Quando un triangolo ha due parti costanti, le questioni de' *massimi* e *minimi* delle parti variabili si risolvono immediatamente per la Trigonometria, senza bisogno di affaticarsi nelle operazioni del calcolo differenziale, dipendenti dalla regola (141). Se ne vedranno altri esempj (831, 832).

In fatti nel triangolo ABC si ha sen.B : sen.C :: sen.AC : sen.AB. Ma gli angoli B e C sono costanti, (777). È dunque evidente, per le tavole de' seni, che sen.AB sarà il più grande possibile quando $AC = 90°$; e che, se allora $AB < 90°$, quello sarà pure il momento della grandezza massima di AB. Ma quando $AC = 90°$, in primo luogo non può essere $AB = 90°$, poichè (417) ne risulterebbe $B = 90°$, il che è troppo lontano dalla verità: secondariamente non può essere $AB > 90°$, poichè avendosi (VII. 16°), per motivo di $AC = 90°$, $\cot.B = -\cos.AB \cot.A$, ovvero $\cos.AB = -\tan g.A \cot.B$, e i due angoli A, B del triangolo ABC essendo necessariamente ed evidentemente di specie diversa, ne segue che cos.AB è sempre positivo. Dunque la distanza massima fra i nodi di due satelliti, per effetto dell' attrazione dell' uno (astrazion fatta dalla reazione del satellite perturbato), ha luogo allor quando l'intersezione comune delle loro orbite è distante 90° dal nodo del satellite perturbato. Questo massimo valore di AB si può dunque conoscere facilmente per mezzo dell' ultima equazione, $\cos.AB = -\tan g.A \cot.B$.

781. Il Sig. de la Lande è stato il primo a scoprire, che *le perturbazioni devono alterare l'inclinazione delle orbite planetarie so-*

pra l'eclittica : scoperta molto importante, massime per la sua applicazione ai cangiamenti d'inclinazione delle orbite de' satelliti sull' orbita di Giove. Come non saprei che aggiungere alla formola ed alla regola date dal celebre Autore (*Astr.* 1377 a 1381) per determinare questa specie di cangiamenti, così mi basta indicare al lettore ove possa rinvenirle.

782. *Trovare il cangiamento dell' ascensione retta, della longitudine, della latitudine e dell'angolo di posizione degli astri, e quello dell'obliquità dell'eclittica, per causa dell' attrazion de' pianeti.*

Fig. 72 Sia AC l' eclittica, l'ordine de' segni di A in C, AB l'equatore, A il primo punto d'ariete, BC l'orbita di un pianeta, il quale, attirando la Terra, trasporta l'eclittica in *ac*. Gli angoli B, C essendo costanti (777), e la quantità C*c*, che abbiamo chiamata *m*, essendo nota per la teoria dell'attrazione, si dimanda in prima il valore di A*a*, variazione di AB, o dell'ascensione retta degli astri che si conta dal punto A, e il valor di (CAB — *ca*B), variazione dell' angolo A, o dell' obliquità dell' eclittica. Ora (673, 664), δBC : δAB : : sen. A : sen. C cos. AC, e δBC : δA : : 1 : sen. AC sen. C. Dunque, nominando *PP* il pianeta perturbatore, ☊ la longitudine del suo nodo ascendente, e notando che δBC è negativo (778), il che porta diminuzione di AB e di A, quando cos. AC e sen. AC siano respettivamente positivi (42), si ha

(K)... dimin. *asc. r.* $= m$ cos. ☊ $\times \dfrac{\text{sen.}\,incl.\,PP}{\text{sen.}\,obliq.}$.

(L)... dimin. *obliq.* $= m$ sen. ☊ sen. *incl. PP.*

La *diminuzione* diventa *aumentazione* in queste formole quando il secondo membro sia negativo.

Applicandole a ciascun de' pianeti uno dopo l' altro, e prendendo la somma de' risultati d'ogni formola, si ha l'effetto totale delle perturbazioni planetarie sopra l' ascensione retta degli astri, e sopra l'obliquità dell' eclittica.

Fig. 73 Or sia P il polo del mondo, E quello dell' eclittica, S il luogo di

un astro, L la nuova situazione del polo dell' eclittica perturbata dalla somma delle attrazioni de' pianeti. Si conoscono, per le formole precedenti, l' angoletto EPL, che è la diminuzione dell' ascensione retta, comune a tutti gli astri, e (PE — PL), che è la diminuzione dell' obliquità : si dimanda la variazione che, per motivo di queste diminuzioni, succede nell' angolo E, o sia nelle longitudini degli astri, nel lato ES, o sia nelle loro latitudini, e nell' angolo S di posizione.

Il triangolo PES, convertendosi in PLS, conserva costante il solo lato PS (donde si scorga così di passaggio che le declinazioni degli astri non sono punto alterate dalle perturbazioni planetarie). Dunque, procedendo col metodo che ho additato (284), suppongo in prima costante anche l' angolo EPS, e facendo $P = A$, $S = B$, $E = C$, le analogie infinitesimali (545, 550, 541) mi danno, cangiando i segni nella prima ragione,

$$\delta E : -\delta PE :: \text{sen.}E : \text{tang.}ES$$
$$-\delta ES : -\delta PE :: \text{cos.}E : 1$$
$$-\delta S : -\delta PE :: \text{sen.}E : \text{sen.}ES.$$

Or facendo costante PE, insieme con PS, ho (642, 631, 635)

$$\delta E : -\delta P :: \text{cos.}PE - \text{sen.}PE\ \text{cos.}E\ \text{cot.}ES : 1$$
$$-\delta ES : -\delta P :: \text{sen.}PE\ \text{sen.}E : 1$$
$$\delta S : -\delta P :: \text{sen.}PE\ \text{cos.}E : \text{sen.}ES.$$

Prendendo le somme dei due valori parziali di δE, di δES, e di δS, dati da queste sei analogie, trovo

$$\delta E = -\delta PE\ \text{sen.}E\ \text{cot.}ES - \delta P(\text{cos.}PE - \text{sen.}PE\ \text{cos.}E\ \text{cot.}ES),$$
$$-\delta ES = -\delta PE\ \text{cos.}E - \delta P\ \text{sen.}PE\ \text{sen.}E,$$
$$-\delta S = -\frac{\delta PE\ \text{sen.}E - \delta P\ \text{sen.}PE\ \text{cos.}E}{\text{sen.}ES}.$$

La diminuzione della longitudine, corrispondente alla quantità

Fig. 73 — $\delta P \cos. PE$, è comune a tutti gli astri; onde qui può negligersi, lasciandola confusa con la precession degli equinozj (784); giacchè l'oggetto delle formole precedenti si è di conoscere la variazione speciale e distinta che nasce sulla posizione di un astro dato, per motivo delle perturbazioni. Ciò posto, consideriamo (740) che $E = 90° - long.$, $ES = 90° - lat.$, $P = 90° + asc.r.$, $PE = obl.$; donde si ha $\delta E = -\delta long. = -$ var.*long.*, $\delta ES = -\delta lat. = -$ var.*lat.*, $\delta P = \delta asc.r. = -$ dim.*asc.r.*, e $\delta PE = \delta obl. = -$ dim.*obl.* (Do il segno negativo a dim.*asc.r.*, ed a dim.*obl.*, perchè i loro valori si avrebbero negativi dalle equazioni (K), (L), se si facesse in quelle m negativo, quale è in realtà). Si sostituiscano queste denominazioni, o valori, nelle tre equazioni precedenti, e si avrà

$$\text{var.}long. = -\text{tang.}lat.(\text{dim.}obl.\ \cos.long. - \text{dim.}asc.r.\ \text{sen.}obl.\ \text{sen.}long.)$$
$$\text{var.}lat. = \text{dim.}obl.\ \text{sen.}long. + \text{dim.}asc.r.\ \text{sen.}obl.\ \cos.long.$$
$$\text{var.}ang.posiz. = -\frac{1}{\cos.lat.}(\text{dim.}obl.\ \cos.long. - \text{dim.}asc.r.\ \text{sen.}obl.\ \text{sen.}long.)$$

Quando si hanno in numeri i coefficienti di sen.*long.* e di cos.*long.*, il secondo membro di ognuna di queste equazioni si riduce ad un solo termine, col metodo (369).

Se la latitudine è australe, si farà negativo il secondo membro della penultima equazione; poichè allora $+\delta ES = +$ var.*lat.*

Se l'astro è nel secondo o nel terzo quarto dell'eclittica, si muti il segno al secondo membro dell' ultima equazione; giacchè l'angolo di posizione passa per zero a 90° della longitudine, e diventa poi negativo (16), onde anche la sua variazione deve cangiare di segno.

783. *Trovare la correzione dell' ascensione retta e della declinazione d'ogni punto dell' eclittica, relativamente alla diminuzione dell' obliquità.*

Fig. 55 Sia BC un arco dell' eclittica, al qual corrisponde l'arco AB

dell'equatore quando l'obliquità è ABC, e l'arco BD dell'equatore se l'obliquità divien CBD. Il lato BC e l'angolo retto opposto essendo costanti, si ha (610, 593), $dAB : -dB :: \text{sen.}2AB : 2\cot.B$, e $-dAC : -dB :: \text{tang.}AC : \text{tang.}B$. Dunque

$$\text{incremento } asc.r. = \tfrac{1}{2}\,\text{dim.}obl.\ \cot.obl.\ \text{sen.}2\,asc.r.$$

$$\text{dim.}decl. = \text{dim.}obl.\ \cot.obl.\ \text{tang.}decl.$$

La prima di queste formole è più comoda di quella che trovasi nella *Conn. des Temps* per l'anno 1766, pag. 188, sopra tutto per calcolare una tavola simile alla XIX. del Sig. de la Lande (*Astr.* Tom. I).

784. *Trovare i cangiamenti dell'ascensione retta, della declinazione, e dell'angolo di posizione degli astri, per causa della precessione degli equinozj*, o sia per causa delle attrazioni del Sole e della Luna sulla sferoide terrestre.

Sia S un astro, E il polo dell'eclittica, P il polo dell'equatore, il qual, per cagione delle attrazioni solari e lunari, cangia di sito, e passa in L, e così successivamente, compiendo una rivoluzione intorno al polo E, nel giro d'anni 25750 circa. È visibile che il lato ES, e per conseguenza la latitudine dell'astro, non soffre alterazione. Ma in questo problema si guarda come costante anche il lato PE, o come uguale a LE, poichè l'alterazione, che soffre l'obliquità PE dell'eclittica, dipende unicamente dalle ineguaglianze periodiche dell'attrazione lunare, e si considera separatamente nel problema (785). Però nel triangolo PES, il qual si converte in ELS, e serba costanti i lati EL, ES, conoscendosi PEL, o sia la precessione in longitudine, si dimanda la variazione corrispondente degli angoli P, S, e del lato PS. Facendo E = A, S = B, P = C, si ha (642, 631, 635) Fig. 74

$$dP : -dE :: \cos.PE - \text{sen.}PE\ \cos.P\ \cot.PS : 1,$$

$$-dPS : -dE :: \text{sen.}PE\ \text{sen.}P : 1,$$

$$dS : -dE :: \text{sen.}PE\ \cos.P : \text{sen.}PS.$$

Fig. 74 Ma (740), $E = 90° - long.$, $P = 90° + asc.r.$, $PS = 90° - decl.$; e per conseguenza $-\delta E = +\delta long. = +$ preces.*long.*, $\delta P = +$ preces.*asc.r.*, $\cos.P = -$ sen.*asc.r.*, e $-\delta PS = +$ preces.*decl.* Di più, procedendo col metodo (722), si trova che, per aver le precessioni con grande esattezza, conviene impiegare, nella seconda ragione delle analogie precedenti, $P + \frac{1}{2}\delta P$ in vece di P, e $PS - \frac{1}{2}\delta PS$ in vece di PS; il che importa specialmente quando si cerca il moto di precessione per un intervallo di molti anni. Però chiamando *asc.r. intermedia, decl.intermedia*, l'ascensione retta, e la declinazione dell' astro, nell' anno che tiene il mezzo fra gli anni estremi abbracciati dal calcolo, si ha

$$\text{prec.}asc.r. = \text{prec.}long. \,(\cos.obl. + \text{sen.}obl.\ \text{sen.}asc.r.int.\ \text{tang.}decl.int.)$$

$$\text{prec.}decl. = \text{prec.}long.\ \text{sen.}obl.\ \cos.asc.r.interm.$$

$$\text{prec.}ang.posiz. = -\text{prec.}long.\ \text{sen.}obl. \times \frac{\text{sen. }asc.r.\ interm.}{\cos.\ decl.\ interm.}$$

Se la declinazione è australe, si farà negativo il secondo membro della penultima equazione; giacchè allora $-\delta PS = -$ prec.*decl.*

Se l'astro è ne' segni discendenti, si farà positivo il secondo membro dell' ultima equazione; giacchè allora $-\delta E = -$ prec.*long.*

785. *Trovare i cangiamenti dell' ascensione retta e della declinazione di un astro, prodotti dalla nutazione dell' asse terrestre.*

Nel problema precedente abbiamo supposto costante l'obliquità dell'eclittica, il che non è esattamente vero, poichè le osservazioni hanno palesato al sagace Bradleyo, che i notabili cangiamenti d'inclinazione dell'orbita della Luna sull'equatore, a cagione del rapido moto del suo nodo sopra l'eclittica, rendono periodicamente inegnali gli effetti della sua attrazione, come appunto lo esigeva la teoria Neutoniana. L'inegnaglianza consiste in questo. Il polo P, in vece di restar sempre ad egual distanza dal polo E,

descrive nel corso d'anni $18\frac{1}{2}$ circa un'ellissi, il cui asse maggiore è di $18''$, il minore di $13''$, 4. La direzione dell' asse maggiore è verso il polo dell' eclittica, e però la màssima variazione dell' obliquità, per causa di questo moto del polo P, il qual moto si chiama *nutazione*, va a $9''$ in più e $9''$ in meno. Le variazioni intermedie sono proporzionali al coseno della longitudine del nodo della Luna, come dimostra il Sig. de la Lande (*Astr.* 2861); e in generale la correzione dell' obliquità media, o uniformemente decrescente (782), per aver l'obliquità apparente in un dato tempo, si ha dalla formola seguente:

$$\text{nut.}obl. = 9'' \cos. ☊$$

Si supponga che la nutazione porti il polo da L in P, e che sia PES > LES e PE > EL, come succede nel primo quarto della longitudine del nodo. Il triangolo ELS, cangiandosi in PES, conserva costante il solo lato ES. La variazione del lato PE si ha dalla formola precedente: quella dell' angolo E dalla seguente, (*Astr.* la Lande, 2863, 2874)

$$\text{nut.}long. = -\frac{6'',7}{\text{sen.}obl.} \times \text{sen.}☊ = -16'',8\ \text{sen.}☊.$$

Ora, date due variazioni, divien facile trovar le altre col metodo (284). Suppongo in prima costante, oltre il lato ES, anche l'angolo E, ed ho (545, 550), facendo A = E, B = S, C = L,

$$-\delta L : \delta EL :: \text{sen.}L : \text{tang.}SL;$$
$$\delta SL : \delta EL :: \cos.L : 1.$$

Poi, facendo costante, oltre il lato ES, anche il lato EL, ho (642, 631), cangiando i segni nella prima ragione, a fine di avere δE positivo conformemente alla figura,

$$-\delta L : \delta E :: \cos.EL - \text{sen.}EL \cos.L \cot.SL : 1,$$
$$\delta SL : \delta E :: \text{sen.}EL\ \text{sen.}L : 1.$$

Fig. 74 Quindi, sommando insieme i due valori di δL, e di δSL,

$$-\delta L = \delta EL \,\text{sen.}\, L \,\text{cot.}\, SL + \delta E (\text{cos.}\, EL - \text{sen.}\, EL \,\text{cos.}\, L \,\text{cot.}\, SL);$$
$$\delta SL = \delta EL \,\text{cos.}\, L + \delta E \,\text{sen.}\, EL \,\text{sen.}\, L.$$

Ma $-\delta L = -\delta\, asc.\, r. = -$ nut. *asc. r.*, $\delta SL = -$ nut. *decl.*, $\delta EL =$ nut. *obl.* $= 9''\,\text{cos.}\,☊$, e $\delta E = -$ nut. *long.* $= \frac{6'',7}{\text{sen.}\,obl.} \times \text{sen.}\,☊$. Ponendo questi valori nelle equazioni precedenti, osservando che $\delta E \,\text{cos.}\, EL = 6'',7 \,\text{cot.}\, 23^\circ 28' \,\text{sen.}\,☊ = 15'',4 \,\text{sen.}\,☊$, e rammentando che $\text{cos.}\, L = -\,\text{sen.}\, asc. r$, la prima delle due equazioni dà nut. *asc. r.* $= -\,\text{tang.}\, decl.\ (9''\,\text{cos.}\,☊\ \text{cos.}\, asc. r. + 6'',7\ \text{sen.}\,☊\ \text{sen.}\, asc. r.) - 15'',4\ \text{sen.}\,☊$. Ma (II. 17², 16²), $9''\,\text{cos.}\,☊\ \text{cos.}\, asc. r. + 6'',7\ \text{sen.}\,☊\ \text{sen.}\, asc. r. = 4'',5\,\text{cos.}(☊ + asc. r.) + 4'',5\,\text{cos.}(☊ \backsim asc. r.) - 3'',35\,\text{cos.}(☊ + asc. r.) + 3'',35\,\text{cos.}(☊ \backsim asc. r.)$. Dunque

$$\text{nut.}\, asc. r. = -15'',4\ \text{sen.}\,☊ - \text{tang.}\, declinazione \times (7'',85\ \text{cos.}\,\overline{asc. r. \backsim ☊} + 1'',15\ \text{cos.}\,\overline{asc. r. + ☊}).$$

Trattando nel modo stesso la seconda equazione, si ha

$$\text{nut.}\, decl. = 7'',85\ \text{sen.}(asc. r. - ☊) + 1'',15\ \text{sen.}(asc. r. + ☊).$$

Se la declinazione è australe, si farà negativo il secondo membro di questa formola; poichè allora $+\delta SL = +$ nut. *decl.*

Le tavole comodissime di Lambert, per la nutazione in ascensione retta e in declinazione, appariscono costrutte sulle due ultime formole. Tanto queste, come quella della nutazione in longitudine, servono a convertire in apparente la posizione media dell'astro.

786. *Trovare l'effetto dell'aberrazione della luce sull'ascensione retta, e sulla declinazione delle stelle fisse.*

Se si chiama ✱ la longitudine di una stella, ⊙ la longitudine del

del Sole, dimostra con facilità e chiarezza il Sig. de la Lande (*Astr.* 2818, 2823) che

$$\text{aber.}long. = -\frac{20'' \cos.(\bigstar - \odot)}{\cos.lat.},$$

$$\text{aber.}lat. = 20'' \,\text{sen.}(\ast - \odot)\ \text{sen.}lat.$$

Quest'ultima formola esige che sen.*lat.* si faccia positivo in tutti i casi.

Conoscendo, col mezzo di queste equazioni, i cangiamenti della longitudine e della latitudine di una stella, prodotti dall'aberrazione, si troveranno facilmente, col metodo (284), quelli dell'ascensione retta, e della declinazione.

Sia P il polo del mondo, E quello dell'eclittica; S un astro, il qual si vede in T per effetto dell'aberrazione della luce, scoperta dall'immortale Bradlejo. Le formole precedenti danno la variazione dell'angolo E, e quella del lato ES: si cerca la variazione dell'angolo P, e quella del lato PS. Il triangolo PES, convertendosi in PTE, conserva costante il solo lato PE. Dunque, se si suppone costante anche il lato ES, si ha (635, 631), facendo A = E, B = P, C = S, e cangiando i segni nella prima ragione, come indica la figura, che è relativa a ciò che succede nel primo quarto dell'argomento ($\ast - \odot$) delle formole precedenti, Fig. 75

$$-\,\delta P : \delta E :: \text{sen.ES}\cos.\text{S} : \text{sen.PS},$$

$$\delta PS : \delta E :: \text{sen.ES}\,\text{sen.S} : 1.$$

E supponendo costante l'angolo E, insieme col lato PE, si ha (541, 550)

$$-\,\delta P : -\,\delta ES :: \text{sen.S} : \text{sen.PS},$$

$$-\,\delta PS : -\,\delta ES :: \cos.\text{S} : 1.$$

Quindi, sommando insieme i due valori di δP, e di δPS,

$$-\,\delta P = \frac{\delta E\ \text{sen.ES}\cos.\text{S} - \delta ES\ \text{sen.S}}{\text{sen.PS}},$$

$$-\,\delta PS = -\,\delta E\ \text{sen.ES}\ \text{sen.S} - \delta ES\cos.\text{S}.$$

Fig.75 Ma $-\ \delta P = -\ \delta asc.r. = -$ aber.*asc.r.*, $-\ \delta PS =$ aber.*decl.*, $\delta E = -$ aber.*long.* $= \frac{20'' \cos.(\star - \odot)}{\cos.lat.}$, e $-\ \delta ES$ $=$ aber.*lat.* $= 20'' \text{sen.}(\ast - \odot)\ \text{sen.}lat.$ Ponendo questi valori nelle equazioni precedenti, e chiamando p l'angolo di posizione, d la declinazione, e l la latitudine dell' astro, si ha

$$(M)\ldots\ \text{aber.}asc.r. = \frac{-20'' \cos.(\star - \odot)\cos.p - 20'' \text{sen.}(\star - \odot)\ \text{sen.}p\ \text{sen.}l}{\cos.d}$$

$$(N)\ldots\ \text{aber.}decl. = -20'' \cos.(\ast - \odot)\text{sen.}p + 20'' \text{sen.}(\ast - \odot)\cos.p\ \text{sen.}l$$

Quando la declinazione sarà australe, si cangieranno i segni ai due termini del secondo membro dell'equazione (N), giacchè allora $-\ \delta PS = -$ aber.*decl.* Del resto, nel calcolar le due formole (M), (N), si osserveranno le regole de' segni (42, 744): ma si noterà di più che sen.p è negativo (154) nel secondo e nel terzo quarto dell'ascensione retta, a cagione che allora l'angolo di posizione è negativo (782).

787. Le formole (M), (N), che servono a convertire in apparente la posizione media di una stella, si rendono molto comode al calcolo, introducendovi l'aberrazione massima respettiva, la qual facilmente si trova col mezzo della regola (141). Differenziando, in primo luogo, l'equazione (M), in cui $\odot$, o sia la longitudine del Sole, è la sola quantità variabile, indi moltiplicando l'equazione differenziale per cos. d, si ha $0 = -20''\ \text{sen.}(\ast - \odot)\cos.p\ \delta\odot + 20''\ \cos.(\ast - \odot)\ \text{sen.}p\ \text{sen.}l\ \delta\odot$. Dividendo per $20'' \cos.(\ast - \odot) \cos.p\ \delta\odot$, si ricava

$$(P)\ldots\ \text{tang.}(\ast - \odot') = \text{sen.}lat.\ \text{tang.}ang.posiz.$$

Chiamo $\odot'$ la *longitudine del Sole* al tempo dell' *aberrazione massima in ascensione retta*; e come $(\ast - \odot)$ è l' *elongazione* della stella in un tempo qualunque, così questa formola dà l'elongazione della stella, e per conseguenza la longitudine del Sole, nel tempo dell' aberrazione massima sottrattiva in ascensione retta. Dico *sottrattiva*, perchè tale è in fatti nel tempo dell' elongazione

data dalla formola (P), come si vedrà dal segno negativo della seguente (Q).

È necessario avvertire, nell' uso della formola (P), 1°. che tang. *ang. posiz.* è negativa nel secondo e nel terzo quarto della longitudine, come abbiamo veduto (786) per il seno; 2°. che quando tang. $(✱ - ⊙')$ risulterà negativa, bisognerà convertirla sempre in positiva, scrivendo in vece tang. $(⊙' - ✱)$, (154); 3°. che ferma la regola di mutare il segno di tang. *ang. posiz.* quando questo angolo sarà ottuso, converrà, in questo caso, per avere il luogo cercato del Sole, aggiungere 180° al luogo trovato con la formola.

Se si pone ⊙' in vece di ⊙ nell' equazione (M), essa darà il valore dell' aberrazione massima in ascensione retta. Ma detta equazione può simplificarsi molto in tal caso, col mezzo della (P). Questa dà sen. p sen. $l = \frac{\text{sen.}(★ - ⊙')\ \text{cos.}p}{\text{cos.}(★ - ⊙')}$. Ponendo nell' equazione (M) questo valore di sen. p sen. l, riducendo i due termini del secondo membro allo stesso denominatore cos. d cos. $(✱ - ⊙')$, ed osservando che cos.$^2(✱ - ⊙')$ + sen.$^2(✱ - ⊙') = 1$, (28), si troverà

$$\text{(Q)} \ldots \text{ aber. mass. } asc.r. = - \frac{20''\ \text{cos.}p}{\text{cos.}d\ \text{cos.}(★ - ⊙')}.$$

Or chiamando a il valore in secondi dell' aberrazione massima in ascensione retta, preso col segno positivo, questa formola dà $\frac{20''}{\text{cos.}\,d} = \frac{a\ \text{cos}(★ - ⊙')}{\text{cos.}p}$. Ponendo questo valore di $\frac{20''}{\text{cos.}\,d}$ nella formola (M), si ha, per l'aberrazione ad un tempo qualunque, aber. *asc. r.* $= - a$ cos. $(✱ - ⊙)$ cos. $(✱ - ⊙') - a$ sen. $(✱ - ⊙)$ tang. p sen. l cos. $(✱ - ⊙')$. Ma, per la (P), tang. p sen. l = tang. $(✱ - ⊙')$. Dunque aber. *asc. r.* $= - a$ cos. $(✱ - ⊙)$ cos. $(✱ - ⊙') - a$ sen. $(✱ - ⊙)$ sen. $(✱ - ⊙')$. E però (II. 4°)

(R)... aber. *asc. r.* = — aber. mass. *asc. r.* cos. $(⊙' \backsim ⊙)$.

Determinata l'aberrazione massima, e la longitudine corrispondente del Sole, per via delle formole (Q), (P), è dunque facile il trovare, con l'ultima (R), l'aberrazione per un dato momento. La differenza ($\odot' \backsim \odot$), fra la longitudine del Sole in un dato tempo e quella corrispondente alla massima aberrazione, si chiama *l'argomento annuo* di aberrazione.

La tavola XIX data da La Caille nell' immortale Opera intitolata *Astronomiae fundamenta* è costrutta sopra la formola speditissima (R), ed è singolarmente utile per comporre le tavole particolari di aberrazione.

788. Il calcolo della formola (P) facilmente si risparmia. Di fatti sia LQ l'equatore, e P il suo polo, TL l'eclittica, ed E il suo polo, S la stella, H il Sole. Nel triangolo SNH, rettangolo in N, si ha (VI. 11ª), tang.NH = sen.NS tang.NSH. Ma NH è l'elongazione, NS la latitudine, NSH l'angolo di posizione della stella: e però l'ultima equazione è la stessa che la (P). Dunque al momento dell'aberrazione massima in ascensione retta, la stella ed il Sole hanno la medesima ascensione retta: per il che la longitudine del Sole in quel tempo si ha da ogni Efemeride, o vero da una tavola di riduzione dell'equatore all'eclittica, qual è la XV di La Caille, che fu copiata da molti, e che non costerebbe due ore di tempo per essere calcolata senza errori di 4'. Del resto può servire allo stesso uso una tavola di riduzione dell' eclittica all' equatore, qual è la XVIII del Sig. de la Lande (*Astr.* T. I), purchè si prenda per argomento l'ascensione retta della stella, accresciuta di 90°.

Fig. 67

789. Trattando la formola (N) come facemmo della (M), si troverà, chiamando $\odot''$ la longitudine del Sole al tempo dell'aberrazione massima *sottrattiva* in declinazione,

(S)... $\text{tang.}(\odot'' - *) = \text{sen.}\,lat.\ \text{cot.}\,ang.posiz.$

(T)... $\text{aber. mass. } decl. = - \dfrac{20''\ \text{sen.}p}{\text{cos.}(\odot'' \backsim \star)}.$

(U)... $\text{aber.}\,decl. = -\,\text{aber.mass.}\,decl.\ \text{cos.}(\odot'' \backsim \odot).$

La differenziazione della formola (N) dà negativo il valore di tang.$(\ast - \odot'')$. Ma $-$ tang.$(\ast - \odot'') = +$ tang.$(\odot'' - \ast)$, (154). Fatto questo cangiamento, se si vuol pervenire alle formole (T), (U), convien per la stessa ragione (154) mettere $-$ sen.$(\odot'' - \ast)$, in vece di sen.$(\ast - \odot'')$, nella formola (N).

Si noti che la cotangente ed il seno dell'angolo di posizione sono negativi nel secondo e nel terzo quarto della longitudine, (786, 787).

Se l'angolo di posizione è ottuso, sempre si deve mutare il segno della cotangente. Di più, in questo caso, ed in quello che la stella sia posta fra l'equatore e l'eclittica, conviene aumentare di 180° l'arco $(\odot'' - \ast)$ dato dalla formola (S). Finalmente qualunque volta tang.$(\odot'' - \ast)$ risulti negativa, sarà l'arco $(\odot'' - \ast) >$ 90°, conforme al solito.

Se la declinazione è australe, si cangierà il segno al secondo membro dell'equazione (T), come abbiam detto (786) per la (N).

790. Il Sig. Ab. *de Lambre*, abilissimo e zelantissimo cultore dell'Astronomia, ha composto tre Tavole generali, che compariscono or ora ad uso publico (*Conn. des Temps*, 1788, pag. 226), con le quali basta conoscere il luogo del Sole, e l'ascensione retta e la declinazione di una stella, per tirarne l'aberrazione in ascensione retta e in declinazione della medesima stella. Egli è in fatti molto conveniente e comodo, quando si cercano correzioni, il poterle ottenere senz'altri dati che quelli di cui si cercano le correzioni. Nelle formole date da La Caille e usitate generalmente, questo vantaggio è quasi perduto, a cagione della complicazione e moltiplicità delle regole e delle operazioni. Le formole precedenti (P), (Q), &c. sono veramente speditissime per calcolare le tavole particolari di aberrazione; ma perchè esigono che si conosca la longitudine, la latitudine, e l'angolo di posizione, i quali elementi non sempre si trovano ne'Cataloghi delle stelle, stimo ben fatto

l'investigare, come si possa trasmutar facilmente le dette formole in quelle che hanno servito alla costruzion delle nuove Tavole del Sig. Ab. *de Lambre.*

Fig.67 Abbiamo veduto (788) che H è il luogo del Sole al tempo dell'aberrazione massima in ascensione retta della stella S. Ora il triangolo LMH rettangolo in M dà (VI. 10ᵉ), cot.LH = cos.MLH cot.ML, o vero

(A)... cot.⊙′ = cos.*obl.* cot.*asc.r.* della stella.

Questa formola dà la longitudine del Sole, al tempo dell'aberrazione massima sottrattiva in ascensione retta.

Il triangolo LMH dà ancora (VI. 6ᵉ), $\text{sen.H} = \frac{\text{sen.ML}}{\text{sen.LH}}$, e dal triangolo SNH rettangolo in N si ha (VI. 9ᵉ), $\text{sen.H} = \frac{\text{cos.NSH}}{\text{cos.NH}}$. Ma NSH è l'angolo di posizione della stella, e NH è l'elongazione. Dunque $\frac{\cos.p}{\cos.(\star - \odot')} = \frac{\text{sen.ML}}{\text{sen.LH}} = \frac{\text{sen.}asc.r.}{\text{sen.}\odot'}$. Sostituendo questo valore nella formola (Q), si ha

$$(B)\ldots\ \text{aber. mass.}asc.r. = -\frac{20''\ \text{sen.}asc.r.}{\cos.decl.\ \text{sen}\ \odot'}.$$

Questo valore, preso col segno positivo, come facemmo (787), e posto nella formola (R), dà $\text{aber.}asc.r. = -\frac{20''}{\cos.decl.} \times \frac{\text{sen.}asc.r.\ \cos.(\odot' \backsim \odot)}{\text{sen.}\odot'}$. Ma $\frac{\cos.(\odot' \backsim \odot)}{\text{sen.}\odot'} = \cot.\odot'\cos.\odot + \text{sen.}\odot$, (II. 4ᵉ). Si prenda il valore di cot.⊙′ dalla formola (A), e si avrà $\text{aber.}asc.r. = -\frac{1}{\cos.decl.} \times (20''\ \cos.obl.\ \cos.asc.r.\ \cos.\odot + 20''\ \text{sen.}asc.r.\ \text{sen.}\odot)$. Ma $20''\ \cos.obl. = 18'',346$: Dunque, procedendo come abbiam fatto (785) per arrivare alla formola della nutazione in ascensione retta, e chiamando A l'ascensione retta della stella, si avrà

$$(C)\ldots\ \text{aber.}asc.r. = -\frac{19'',17\ \cos.(A \backsim \odot) - 0'',83\ \cos.(A + \odot)}{\cos.decl.}.$$

791. Passiamo ora a cercare le formole corrispondenti, per l'aber-

razione in declinazione. S'innalzi dal punto S un arco STQ perpendicolare sopra PM; il che dà $QS = 90° = QM$, e $Q = SM$, (390, 386): onde Q è la declinazione della stella S, e $QL = 90° + ML = 90° + asc.r.$ Or si osservi che il triangolo TNS, rettangolo in N, dà (VI. 11ª), $\text{tang.}TN = \text{sen.}SN \ \text{tang.}TSN$. Ma SN è la latitudine della stella, e $TSN = 90° - NSH$ è il complemento dell'angolo di posizione. Dunque $\text{tang.}TN = \text{tang.}(\odot'' - *)$, secondo la formola (S); e però T è il luogo del Sole al tempo dell'aberrazione massima sottrattiva in declinazione. Per conoscere la longitudine del Sole in quel tempo, convien dunque trovare l'arco LT. Ora il triangolo TLQ dà (VII. 31ª), $\text{cot.}TL = \frac{\text{sen.}TLQ \ \text{cot.}Q + \text{cos.}TLQ \ \text{cos.}QL}{\text{sen.}QL}$. E però $\text{cot.}\odot'' = \frac{\text{sen.}obl. \ \text{cot.}decl. - \text{cos.}obl \ \text{sen.}asc.r.}{\text{cos.}asc.r.}$, ovvero, per più comodo del calcolo,

$$(D)\ldots \ \text{cot.}\odot'' = \text{cos.}obl. \ \text{tang.}asc.r. \left(\frac{\text{tang.}obl. \ \text{cot.}decl.}{\text{sen.}asc.r.} - 1\right),$$

la qual formola può calcolarsi con le sole tavole trigonometriche in logaritmi, nella maniera da me usata (741).

Osservando le regole de' segni; se $\text{cot.}\odot''$ risulta positiva, il Sole sarà nel primo o nel terzo quarto dell'eclittica; nel secondo o nel quarto, se $\text{cot.}\odot''$ risulta negativa. Quello dei due quarti che deve scegliersi è determinato dalla regola seguente. *La longitudine del Sole è nel primo o nel secondo quarto, se l'ascensione retta della stella è nel primo o nell'ultimo: la longitudine del Sole è nel terzo o nell'ultimo quarto, se l'ascensione retta della stella è nel secondo o nel terzo.* La ragione di questa regola s'intenderà dalla formola (E), che è destinata a dare il valore dell'aberrazione massima *sottrattiva*, onde questo valore deve sempre essere negativo, e però in detta formola il coseno dell'ascensione retta della stella e il seno della longitudine del Sole devono avere il medesimo segno. Questa regola unica, e l'unica formola (D), mi sembrano preferibili alle moltiplici regole e formole usate finora.

Fig.67 Avverto che il Sig. de la Lande ha dato nel settimo Volume delle Efemeridi di Parigi una Tavola molto ampia per trovare il luogo del Sole al tempo dell'aberrazione massima in declinazione. La XVII di La Caille era troppo ristretta, e spesse volte le parti proporzionali vanno soggette ad errori sensibili.

Il triangolo TLQ dà $\text{sen.T} = \frac{\text{sen.LQ sen.Q}}{\text{sen.TL}} = \frac{\text{cos.}\mathit{asc.r.}\ \text{sen.}\mathit{decl.}}{\text{sen.}\odot''}$. Il triangolo TNS, rettangolo in N, dà (VI. 9ª), $\text{sen.T} = \frac{\text{cos.TSN}}{\text{cos.TN}}$. Ma TSN è il complemento dell' angolo di posizione, e TN è l'elongazione. Dunque $\frac{\text{sen.}p}{\text{cos.}(\odot'' \backsim \star)} = \frac{\text{cos.}\mathit{asc.r.}\ \text{sen.}\mathit{decl.}}{\text{sen.}\odot''}$. Sostituendo questo valore nella formola (T), (789), si ha

$$\text{(E)... aber. mass. } \mathit{decl.} = -\frac{20''\ \text{cos.}\mathit{asc.r.}\ \text{sen}\ \mathit{decl.}}{\text{sen.}\odot''}.$$

Quando la declinazione è australe, si dovrebbe cangiare il segno al secondo membro di questa equazione, per la stessa ragione già resa per la (N): ma come in tal caso sen.*decl.* sarebbe negativo, così tanto vale, ed è più breve, lasciar il segno negativo al secondo membro, e far positivo sen.*decl.* in tutti i casi.

Or si ponga il valore (E) dell' aberrazione massima in declinazione, preso col segno positivo al solito, nella formola (U); si sviluppi $\text{cos.}(\odot'' \backsim \odot)$, (II. 4ª), indi si sostituisca il valore di $\text{cot.}\odot''$ preso dalla formola (D); si troverà $\text{aber.}\mathit{decl.} = -20''\ \text{sen.}\mathit{obl.}\ \text{cos.}\odot\ \text{cos.}\mathit{decl.} + \text{sen.}\mathit{decl.}(20''\ \text{cos.}\mathit{obl.}\ \text{sen.A cos.}\odot - 20''\ \text{cos.A sen.}\odot) = -7'',96\ \text{cos.}\odot\ \text{cos.}\mathit{decl.} + \text{sen.}\mathit{decl.}(18'',346\ \text{sen.A cos.}\odot - 20''\text{cos.A sen.}\odot)$. Questo valore, col mezzo delle formole (II. 17ª, 14ª, 15ª), si riduce come segue, chiamando D la declinazione della stella;

$$\text{aber.}\mathit{decl.} = \text{sen.D}(19'',17\ \text{sen.}\overline{A - \odot} - 0'',83\ \text{sen.}\overline{A + \odot}) - 3'',98\ (\text{cos.}\overline{\odot + D} + \text{cos.}\overline{\odot \backsim D}).$$

Quando la declinazione è australe, convien far positivo il fattore 3'', 98, per il motivo più volte addotto; il qual motivo non influisce

fluisce sul fattore binomio di sen.D, purchè si faccia sen.D sempre positivo.

Su questa formola e sopra la (C) sono costrutte le Tavole del Sig. Ab. de Lambre. Se non si facessero Tavole, ma si avesse da calcolare l'aberrazione per un dato tempo, in vece dell'ultimo termine — $3''$, 98, &c. sarebbe più comodo impiegare — $7''$, 96 cos.⊙ cos.D.

Il valentissimo Astronomo, ora nominato, ha pur dato, nel Tom. VIII delle Efemeridi Parigine del Sig. de la Lande, certe Tavole nuove molto esatte dell'*aberrazione de'pianeti in longitudine.*

792. Con que' modi, co' quali ho valutato gli effetti della nutazione e dell'aberrazione sull'ascensione retta e sulla declinazione, si troverebbero i cangiamenti dell'*angolo di posizione* provenienti dalle medesime cause. Ho omesso questa ricerca, non sapendo che vi sia mai bisogno di adoperare l'angolo di posizione apparente, o sia corretto dalle piccole variazioni periodiche dipendenti dalla nutazione e dall'aberrazione. Nell'uso stesso delle formole (786 a 789) non v'è ragione d'impiegare l'angolo di posizione apparente piuttosto che il vero (quando anche una tal distinzione non fosse affatto insensibile), poichè quelle formole sono fondate sul calcolo infinitesimale, nel qual si confonde perpetuamente il valor primitivo d'ogni variabile col suo valore dopo la variazione.

793. *Determinare le dimensioni della Terra, supponendola di figura ellittica.*

La ragione fra i due assi della Terra si determina con la misura di due gradi. Chiamando g un grado di latitudine, l la latitudine del punto della Terra posto nel mezzo di esso grado, G un altro grado di latitudine, L la latitudine del suo punto di mezzo, b il semiasse minore terrestre, e facendo eguale all'unità il semiasse maggiore, cioè il semidiametro dell'equatore, si ha, per mezzo

delle Sezioni coniche, la seguente analogia d'approssimazione (*Astr.* la Lande, 2676):

$$g^{\frac{2}{3}} : G^{\frac{2}{3}} :: 1 - \text{sen.}^2 L\,(1 - bb) : 1 - \text{sen.}^2 l\,(1 - bb),$$

dalla quale si cava

$$1 - bb = \frac{1 - \left(\frac{g}{G}\right)^{\frac{2}{3}}}{\text{sen.}^2 L - \left(\frac{g}{G}\right)^{\frac{2}{3}} \text{sen.}^2 l}.$$

Questo è il valore del quadrato dell'eccentricità, o sia di ee, (767, 6°).

Or si chiami c lo schiacciamento della Terra, o sia la differenza dei due semiassi; sarà $b = 1 - c$, $bb = 1 - 2c + cc$, e $\frac{1}{2}(1 - bb) = c - \frac{1}{2}cc = c\,(1 - \frac{1}{2}c)$. Laonde

$$(F)\ldots\ c\,(1 - \tfrac{1}{2}c) = \tfrac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{g}{G}\right)^{\frac{2}{3}}}{\text{sen.}^2 L - \left(\frac{g}{G}\right)^{\frac{2}{3}} \text{sen.}^2 l}.$$

Il secondo membro di questa equazione dà un valore di c assai più prossimo di quel che possa sperarsi dalla esattezza e concordia delle misure de' gradi; per il che può negligersi senza scrupolo in questa ricerca il fattore $(1 - \frac{1}{2}c)$.

794. Se g è un grado diviso per mezzo dall' equatore, sicchè sia $l = 0$, allora sen. $l = 0$, e per conseguenza

$$(H)\ldots\ c\,(1 - \tfrac{1}{2}c) = \frac{1 - \left(\frac{g}{G}\right)^{\frac{2}{3}}}{2\,\text{sen.}^2 L}.$$

In vece di questa equazione, si è adottata la seguente che è più comoda, ma un pochetto meno esatta, come vedremo ben tosto.

$$(K)\ldots\ c = \frac{G - g}{3g\ \text{sen.}^2 L}.$$

Ne fu dedotto, che gli accrescimenti de' gradi, rappresentati da $G - g$, sono prossimamente proporzionali ai quadrati de' seni delle latitudini.

Quando con molte comparazioni di gradi misurati, presi a due a due, si è determinato il valore di c, col mezzo delle formole (F) o (H), poco costa il formare con esattezza una tavola de' gradi di latitudine, espressi, per esempio, in tese. Sia, per brevità, $c(1 - \frac{1}{2}c) = m$, l' equazione (H) dà $G = g(1 - 2m \text{ sen.}^2 L)^{-\frac{3}{2}} = g(1 + 3m \text{ sen.}^2 L + \frac{15}{2} m^2 \text{ sen.}^4 L + \&c.)$. I termini ulteriori della serie si possono trascurar senza errore di mezzo piede, e però

$$(\text{M})\ldots \; G - g = 3mg \text{ sen.}^2 L + \tfrac{15}{2} m^2 g \text{ sen.}^4 L.$$

Se, nel secondo membro, si neglige il secondo termine, e si pone c in vece di m, si ha l' equazione (K).

L' error massimo dell' equazione (K) è di $6\frac{1}{2}$ tese, ed ha luogo per $L = 90°$. Di fatti sia $g = 56700$ tese, come nelle Tavole Astronomiche di Berlino (Tom. III. pag. 168), e sia, secondo la teoria Neutoniana, $c = \frac{1}{230}$, che è il valore adottato comunemente, giacchè le discrepanze de' gradi misurati, e l' incertezza sull' omogeneità della Terra non permettono fin' ad ora di ripudiarlo. Calcolando l' equazione (M), si ha $m = c(1 - \frac{1}{2}c) = \frac{459}{105800}$: quindi la quantità costante $3mg = 737,96$, e l' altra quantità costante $\frac{15}{2} m^2 g = 8,00$. Dunque il grado di latitudine sotto il polo è più lungo di quello sotto l' equatore di 746 tese. Tale è nella tavola di Berlino la differenza fra i gradi estremi; donde si vede che il Sig. Schulze non si è contentato della formola (K), che dà in questo caso $G - g = 3cg = 739\frac{1}{2}$ tese.

Se si fa $L = 45°$, si ha $\text{sen.}^2 45° = \frac{1}{2}$, e però $737,96 \text{ sen.}^2 45° = 368,98$, e $8 \text{ sen.}^4 45° = 2$. Quindi $G = g + 371 = 57071$. Questa quantità corrisponde a $L = 44° 30'$ nella tavola di Berlino; ma come questa tavola non dà alcun valore del grado di latitudine per $L = 90°$, ne inferisco che il Sig. Schulze abbia inteso che il grado di 56700 tese, dal quale è partito, non sia quello tagliato per mezzo dall' equatore, ma quello che va da 0° a 1° di latitudine, e così degli altri successivamente; sicchè il valore che

dà la sua tavola, per $L = 44^\circ\,30'$, corrisponda al grado che da $44^\circ\,30'$ va a $45^\circ\,30'$, in perfetta conformità col mio calcolo: le quali cose ho individuate, perchè mi sembra che siano sfuggite allà penetrazione del Sig. Trembley (*Essai de Trigonom. sphér.* pag. 226).

Fig. 76 796. Or sia NS l'asse della Terra, C il centro, AD il diametro dell'equatore, ANDS il meridiano ellittico di un luogo qualunque B, per il quale la tangente BT è l'orizzonte sensibile: VBR perpendicolare a BT è la linea verticale, BC la distanza al centro, o il raggio della Terra, BW = CE il raggio del parallelo, CBL l'angolo della linea verticale col raggio della Terra, BLA la latitudine, BCA l'angolo al centro.

Quando si conosce la ragione fra gli assi, la prima cosa che importa determinare è l'angolo CBL, che si chiama *l'angolo della verticale*. Ora CBL = BLE — BCE, e ne' triangoli rettangoli CEB, LEB, che hanno comune il lato BE, si ha (450, 425), CE : LE :: tang.BLE : tang.BCE. Di più CE è l'ascissa, LE la sunormale, e nelle Sezioni coniche si dimostra che CE : LE :: $a^2 : b^2$. Dunque

$$(N)\ldots\ \text{tang.}\,ang.\,al\ centro = \frac{b^2}{a^2} \times \text{tang.}\,latit.$$

La differenza fra la latitudine e l'angolo al centro è l'angolo cercato.

Per averlo più direttamente; sia L la latitudine, v l'angolo della verticale, e $a = 1$, la formola (N) dà $1 : b^2 :: \text{tang.}L : \text{tang.}(L - v)$, e per conseguenza $1 : 1 - b^2 :: \text{tang.}L : \text{tang.}L - \text{tang.}(L - v) :: \text{tang.}L : \frac{\text{sen.}v}{\cos.L\ \cos.(L - v)}$, (II. 24^2). Ma $1 - b^2 = e^2$. Dunque $\text{sen.}v = e^2\,\text{sen.}L\,\cos.(L - v)$, o *ang. della verticale* = R$''$ × *eccentr.*^{2} sen.*lat.* cos.(*lat.* — *ang. della vertic.*). Con questa formola ho calcolato gli angoli della verticale della tavola (807), dai quali si può vedere che l'errore della formola adoperata comunemente, $v = c\,R''\,\text{sen.}2L$, va a $4''$.

Questo errore è affatto tenue, in confronto dell' incertezza in cui siamo ancora circa l' omogeneità, e l' esatta quantità dello schiacciamento della Terra; pur sembra conveniente che i calcoli siano conformi al sistema che si adotta.

797. Descrivasi il semicircolo AFD, e si nomini x l' angolo FCE, come nella teoria de' pianeti (767); sarà, per le Sezioni coniche, tang.$x = \frac{a}{b} \times$ tang.*ang.al centro.* Ponendo il valore (N); si ha

(O)... tang.$x = \frac{b}{a} \times$ tang.*lat.*

La cognizione dell' angolo x giova per risolvere con grandissima celerità tutte le seguenti equazioni, che non hanno bisogno di dimostrazione, e per mezzo delle quali e delle precedenti (M), (N), si hanno tutte le quantità contenute nella tavola del benemerito Sig. Schulze.

(P)... *raggio del parallelo* $= a$ cos.x = CE.

(Q)... *grado di longitudine* $= \frac{a \text{ cos.} x}{R'}$, (262).

(R)... *raggio della Terra* $= \frac{a \text{ cos.} x}{\text{cos.} \textit{ang.al centro}}$ = BC.

(S)... BT $= \frac{a \text{ cos.} x}{\text{sen.} \textit{lat.}}$.

(T)... BR $= \frac{a \text{ cos } x}{\text{cos.} \textit{lat.}}$.

(U)... BQ = BC $\times$ cos.*ang.della verticale.*

(Y)... CQ = BC $\times$ sen.*ang.della verticale.*

798. Il raggio BC della Terra si può aver facilmente in un altro modo, con maggior numero di note esatte di quel che possano dare le tavole ordinarie de' logaritmi per mezzo della formola (R). Questa dà, fatto $a = 1$, BC $= \frac{\text{cos.} x}{\text{cos} (L - v)} = \sqrt{\frac{1 + \text{tang.}^2 (L - v)}{1 + \text{tang.}^2 x}}$, (I. 19'). Sostituendo i valori di tang.$(L - v)$ e di tang.x, dati dalle formole (N), (O), si ha BC $= \sqrt{\frac{1 + b^4 \text{ tang.}^2 L}{1 + b^2 \text{ tang.}^2 L}}$. Ma $b^2 =$

Fig. 76 $1 - e^2$, e $b^4 = 1 - 2e^2 + e^4$. Surrogando questi valori, quindi moltiplicando la frazione per cos.$^2 L$, si troverà BC $= \sqrt{\frac{1 - e^2 \text{sen.}^2 L - e^2 \text{sen.}^2 L (1 - e^2)}{1 - e^2 \text{sen.}^2 L}} = \sqrt{\left(1 - \frac{e^2 b^2 \text{sen.}^2 L}{1 - e^2 \text{sen.}^2 L}\right)}$. Riducendo in serie questo binomio, negligendo la sesta potenza e le ulteriori dell'eccentricità, ed eseguendo le divisioni, si ha

$$(Z)\dots \quad BC = 1 - \tfrac{1}{2} e^2 b^2 \text{sen.}^2 L - \tfrac{5}{8} e^4 \text{sen.}^4 L.$$

I due ultimi termini danno con breve calcolo la differenza dal raggio dell'equatore a quello d'ogni latitudine. Volendola in tese, basta moltiplicarla pel raggio dell'equatore, espresso in tese. Se si vuole la differenza de' logaritmi, si moltiplicherà la somma dei detti due termini per $\frac{M}{BC + \frac{1}{2}\delta BC}$, come prescrive il primo termine della serie (F), (175): questa è la via più sicura e più pronta che ho eletto per calcolare i logaritmi della tavola (807).

Negligendo, come molto piccolo, l'ultimo termine del secondo membro dell'equazione (Z), risulta che le diminuzioni de' raggi della Terra sono prossimamente proporzionali ai quadrati de' seni delle latitudini, e per conseguenza agli accrescimenti in lunghezza de' gradi di latitudine (794).

799. Per dar qualche esempio della celerità ed esattezza de' calcoli, usando le nostre formole (N), (O), &c., sia *lat.* $= 46°$, $\frac{b}{a} = \frac{229}{230}$, e sia $a = 3277123$ tese, come nelle tavole di Berlino.

Si avrà, per la formola (O), tang.$x = \frac{229}{230}$ tang.$46°$; il che dà $x = 45° 52' 30''$, 85.

Fatto questo calcolo, nulla più costa quello della formola (N), la qual si riduce alla seguente: tang.*ang. al centro* $= \frac{229}{230}$ tang.x, il che dà *ang. al centro* $= 45° 45' 1''$, 66.

Quindi *ang. della verticale* $=$ (*lat.* $-$ *ang. al centro*) $= 14' 58''$, 3. Le tavole di Berlino pongono in fatti $14' 58''$; dunque il Sig. Schulze non ha adoperato la formola più usitata (796), $v = c R''$ sen.$2L$, ovvero sen.$v = c$ sen.$2L$, la quale dà $2''$ di meno

in questo caso. Per errore il Sig. Trembley l'ha creduta giusta, giacchè il logaritmo da lui trovato è quello di sen. 14′ 56″, 3, e non quello di sen. 14′ 58″, come egli dice. Ma il Sig. Schulze non si è servito nè pure della formola rigorosa (N), poichè ad altre latitudini gli angoli della sua tavola differiscono fino di 5″ da quelli della mia (807).

Or, calcolando la formola (P), si ha a cos.x = 3277123 cos.45° 52′ 30″, 85 = 2281609. Tale è nella tavola di Berlino il valore del raggio del parallelo di 46°. Il Sig. Trembley trova 32 tese di meno, perchè ricava questo raggio dal grado di longitudine, cioè la quantità grande dalla piccola, onde nasce ciò che ho avvertito (279). Il grado di longitudine impiegato dal Sig. Trembley non ha altro errore che di $\frac{3}{5}$ di tesa, come vedremo or ora; e questo tenuissimo errore ne produce uno di 32 tese sul raggio del parallelo.

Noi, dividendo per R° (262) la quantità trovata a cos.x, abbiamo esattamente, per la formola (Q), *il grado di longitudine* = 39821, 6. Il Sig. Trembley ha impiegato 39821, nel calcolare il raggio del parallelo.

Senza che maggiormente ci dilunghiamo, è visibile quanta brevità introduca nel calcolo delle formole (797) la quantità costante a cos.x. Passo a far vedere che i valori di BR, BQ, CQ, dati dalle ultime tre, e destinati dal Sig. Schulze alla correzione delle parallassi per causa dello schiacciamento della Terra, possono trascurarsi utilmente, giacchè v'è un modo diretto per calcolare il luogo apparente degli astri, senza impiegar quelle correzioni, e senza che quella, che basta sola a rimpiazzarle tutte, costi alcuna fatica.

800. Tenendo ferme le spiegazioni (796) della fig. 76, sia BM il prolungamento del raggio CB della Terra, ☾ un astro, la cui posizione è data dalle tavole astronomiche, come se fosse veduto dal centro C della Terra. Immaginiamoci una linea retta C☾;

Fig.76 questa linea indicherà il punto del Cielo, in cui trovasi l'astro, secondo le tavole.

L'angolo B☾C, che forma la linea immaginata C☾ con la linea B☾, sulla direzion della quale l'Osservator posto in B vede l'astro, si chiama la *parallasse*: quest'angolo è la differenza dalla posizione osservata alla posizione calcolata. Per comparare il calcolo con l'osservazione, fa d'uopo correggere l'uno o l'altra, della quantità della parallasse. Si usa per ciò ridurre la distanza vera dell'astro al polo, o sia l'angolo NC☾, all'angolo NR☾ che farebbe una linea immaginata R☾ con l'asse NS della Terra. Avuta così la posizione dell'astro sulla linea R☾, si ha poi quella cercata sulla linea B☾, riducendo, col mezzo della parallasse di altezza, presa BR per parallasse orizzontale, l'angolo VR☾ all'angolo VB☾, che è la distanza apparente dell'astro dal zenit dell'Osservatore. A queste ed altre riduzioni analoghe giovano le quantità date dalle tre ultime formole (797). Ma tutto questo circuito si può risparmiare, giacchè per il calcolo della posizione dell'astro sulla linea B☾ è facile render del tutto indifferente l'ellitticità della Terra.

801. In fatti s'intenda descritto col raggio BC un cerchio, il qual tagli l'asse NS prolungato. Il supporre che questo sia un cerchio della superficie terrestre considerata come sferica, non altera punto la distanza vera NC☾ dall'astro al polo. Bensì, in tal caso, M diviene il zenit, CBM la linea verticale, e BCA la latitudine del punto B della Terra. S'impieghi questa latitudine ne' calcoli; MC☾ sarà la distanza vera al zenit supposto M, alla quale si perverrà col mezzo degli elementi dati dalle tavole. Se dunque, col mezzo ordinario della parallasse d'altezza, preso il raggio BC per parallasse orizzontale, si riduce l'angolo MC☾ all'angolo MB☾, quest'angolo farà conoscere il punto del cielo a cui corrisponde la posizione apparente dell'astro sulla linea B☾, con la stessa esattezza come pel metodo comune, ma con molto maggiore facilità.

802. Tutte pertanto svaniscono le equazioni delle parallassi per la sferoide schiacciata, sol che s'impieghi ne' calcoli *la latitudine diminuita*

diminuita dell' angolo della verticale. Così ha fatto l' insigne Geometra Sig. *de la Grange* nel compor le sue formole per trovar la distanza apparente di due astri soggetti alla parallasse (*Ephémérides de Berlin* 1782). Ma si crede forse questa una proprietà particolare del di lui metodo, egualmente profondo che laborioso : siccome è proprietà particolare del metodo del celebre Sig. *du Sejour* l'impiegare l' altezza del polo diminuita della metà solamente dell' angolo della verticale. In fatti l' uso delle equazioni delle parallassi per la sferoide schiacciata sembra comunemente invalso fra gli Astronomi, senza che alcuno abbia preso cura di dimostrare generalmente che possono risparmiarsi per tutte le parallassi, ed in tutti i metodi. Lo stesso Sig. *Trembley*, che ha indagato (*Essai de Trigonom. sphérique*, pag. 164 a 176) la dimostrazione delle formole del Sig. de la Grange, ed applicata la correzione dell' altezza del polo al calcolo delle parallassi di longitudine e di latitudine, si esprime in modo che non mi fu possibile intendere la ragione che rende (pag. 150) di tal correzione; giacchè egli considera solamente l' astro al zenit, e confonde insieme l'angolo della verticale con quello grandemente diverso che formano al centro dell' astro la linea verticale e la linea condotta dal centro della Terra.

Conchiudo pertanto, che per calcolare le parallassi basta conoscere il raggio della Terra ellittica, il qual deve servire alla parallasse orizzontale, e l' angolo della verticale, il qual deve sottrarsi dalla latitudine. A tale oggetto ho calcolato con ogni esattezza la tavola (807). Or conviene vedere quanto spediti divengano in questo modo i calcoli delle parallassi, e degli eclissi.

803. *Trovare le parallassi di longitudine, di latitudine, d' ascensione retta, e di declinazione.*

Tutte queste parallassi dipendono da quella di altezza, la quale ha il suo fondamento nella parallasse orizzontale. Ora (*Astron. de la Lande* 1624, 1628)

$$\text{sen.}\,par.\,oriz. = \frac{\text{raggio della Terra}}{\text{dist. dell' astro al centro della Terra}}.$$

(A)... sen.*par.altezza* = sen.*par.or.* × cos.*altezza appar.*

E con approssimazione sufficiente in tutti i casi,

(B)... *par. altezza* = *par.oriz.* × cos.*altezza appar.*

Fig.69 Ciò posto, sia Z il zenit della Terra sferica (801), P il polo dell'eclittica, T un pianeta veduto dal centro della Terra, il quale, osservato dalla superficie, apparisce più basso, in S: TS è la *parallasse di altezza*; PZ è la distanza dal zenit al polo dell'eclittica, la qual distanza si chiama *l'altezza del nonagesimo*, cioè di quel punto dell'eclittica il qual segna la longitudine del zenit dell'Osservatore; PZ è *l'altezza del nonagesimo*; ZPT la *distanza vera dell'astro al nonagesimo*, o sia la differenza di longitudine fra l'astro e il nonagesimo; ZPS è la *distanza apparente dell'astro al nonagesimo*; e TPS la *parallasse di longitudine*, di cui primamente si cerca la quantità.

I triangoli ZPT, ZPS hanno comuni il lato PZ e l'angolo adjacente Z, e però facendo (542), A = Z, B = P, C = T, si ha sen.δZT : sen.δZPT :: sen.PT sen.(PT + δPT) : sen.PZ sen.Z. Ma PT + δPT = PS, e sen.PS : sen.Z :: sen.ZS : sen.ZPS. Dunque (723), δZT : δZPT, ovvero TS : TPS :: sen.PT sen.ZS : sen.PZ sen.ZPS. Ora sen.ZS = cos.*alt.appar.* = $\frac{par.altezza}{par.oriz.}$, secondo la formola (B). Dunque

$$\text{(C)}\ldots\ par.long. = par.oriz. \times \frac{sen.alt.nonag. \times sen.dist.appar.nonag.}{cos.lat.vera}.$$

Per avere la longitudine apparente dell'astro, si aggiunge la parallasse alla longitudine vera, quando l'astro è all'oriente del nonagesimo; si leva, quand'è all'occidente.

Come il secondo membro dell'equazione (C) contiene la parallasse cercata, giacchè *dist.ap.non.* = *dist.v.non.* + *par.long.*, converrà fare il calcolo col metodo (281); e ne daremo un esempio (809).

Se, in vece delle parallassi, si pongono i loro seni, la formola (C) sarà rigorosa. Che se si vuole scacciare dal secondo membro la parallasse di longitudine, operando col metodo (282) si avrà $\frac{\text{sen.TPS}}{\text{sen.}par.or.} \frac{\text{sen.PT}}{\text{sen.PZ}} = \text{sen.(TPZ} + \text{TPS)} = \text{sen.TPZ cos.TPS} +$ cos.TPZ sen.TPS. Si dividano per cos.TPS il primo e l'ultimo di questi tre valori eguali, e si ricaverà

$$\text{tang.TPS} = \frac{\text{sen.}par.oriz.\ \text{sen.PZ}}{\text{sen.PT} - \text{sen.}par.or.\ \text{sen.PZ}} \frac{\text{sen.TPZ}}{\text{cos.TPZ}}.$$

Tale è la formola di Lexell, di cui il Sig. Trembley dà la dimostrazione (*Essai de Trigon. sphérique*, pag. 141 a 144).

804. La *parallasse di latitudine* è δPT, o sia PT — PS. Per dedurla dalla parallasse orizzontale, senza impiegare altre parti del triangolo PTZ, se non PZ, PT e TPZ, non si trova di ciò capace alcuna delle analogie (550, 551, 552), che sono quelle che corrispondono al caso presente. Fu adoprata l'infinitesimale (551), ponendo sen.(AC + δAC) in vece di sen.AC, e il valore (VII. 28') di cos.AC : ma questa analogia va soggetta all'errore di alcuni secondi. Quindi Lexell ha dato un'altra formola più esatta, ma composta di tre termini nel secondo membro, della quale si può veder la dimostrazione nel Sig. Trembley (pag. 144 a 148). Come non suol cercarsi la parallasse di latitudine, senza cercare anche quella di longitudine, così mi contenterò di dedurre la prima dalla seconda, giacchè trovo per questa via una formola rigorosa e comoda.

Ponendo nella 1ª analogia (556), $\frac{\text{sen.}\delta\text{B}}{2\ \text{cos.}\frac{1}{2}\delta\text{B}}$ in vece di sen.$\frac{1}{2}\delta$B, ed applicandola al triangolo PTZ, si ha sen.δPT : sen.δP :: $\left(\text{sen.PT cot.PZ} - \frac{\text{cos.(P} + \frac{1}{2}\delta\text{P) cos.PT}}{\text{cos.}\frac{1}{2}\delta\text{P}}\right)$ sen.(PT + δPT) : sen.P. Questa è la formola rigorosa, che potrà usarsi volendo, ma non si avrà mai un errore sensibile, ponendo al solito gli archi in luogo

de' seni nella prima ragione, e facendo $\cos.\frac{1}{2}\,\delta P = 1$; con che si ha

$$(D)\ldots\ \textit{par.lat.} = \textit{par.longitudine}\ \cos.\textit{lat.vera}\ \cos.\textit{lat.appar.} \times \frac{\cot.\textit{alt.nonag.} - \cos.(\textit{dist.vera nonag.} + \frac{1}{2}\textit{par.long.})\ \text{tang.}\textit{lat.vera}}{\text{sen.}\textit{distanza vera al nonagesimo}}.$$

La parallasse di latitudine si aggiunge sempre alla distanza vera dell' astro dal polo visibile dell' eclittica, purchè il suo valore non sia dato negativo dalla formola (D).

805. Se P è il polo dell' equatore, convien mettere nelle formole (C), (D), *par. asc. retta* in vece di par. *long.*, compl. *altezza del polo* in vece di *alt.nonag.*, *angolo orario* in vece di *dist.al nonag.*, *declin.* in vece di *lat.*, e si ha

$$(E)\ldots\ \textit{par.asc.r.} = \textit{par.oriz.} \times \frac{\cos.\textit{alt. del polo} \times \text{sen.}\textit{ang.orario appar.}}{\cos.\textit{decl. vera}}.$$

$$(F)\ldots\ \textit{par.decl.} = \textit{par.asc.retta}\ \cos.\textit{decl.v.}\ \cos.\textit{decl.appar.} \times \frac{\text{tang.}\textit{alt.del polo} - \cos.(\textit{ang. or. vero} + \frac{1}{2}\textit{par.asc.r.})\ \text{tang.}\textit{decl.vera}}{\text{sen.}\textit{angolo orario vero}}.$$

806. *Trovare la distanza apparente de' centri di due astri.*

Tre sono i casi principali ed importantissimi, ne' quali si cerca la distanza apparente de' centri di due astri; o pur, che è lo stesso, dall' apparente s' inferisce la vera, cioè quella che sarebbe osservata dal centro della Terra. 1°. Negli eclissi ed occultazioni. 2°. Ne' passaggi davanti al disco del Sole. 3°. Sul mare, per dedurne la longitudine del vascello.

Non saprei dare metodo miglior di quello del Sig. de la Lande per il 2°. caso; e di quello del Sig. de Borda per il 3°., quando non si abbiano le grandi tavole inglesi, o quelle che servono al metodo del Sig. Dunthorn. Ma quanto al 1°. caso, il metodo più spedito è certamente quello del nonagesimo (se così vuol chiamarsi), trattato però come segue.

Fig. 77 Sia P il polo del mondo, E quello dell' eclittica, Z il zenit della Terra sferica (801), L il luogo vero di quello dei due astri il qual

soffre maggior parallasse. Nel triangolo PEZ (ho preso l'idea di servirmi di questo triangolo dal Sig. Trembley, *Essai de Trig. sphér.* pag. 151) si conoscono sempre tre parti, cioè PE che è l'obliquità apparente dell'eclittica, PZ che è il complemento dell'altezza del polo diminuita dell'angolo della verticale (802), e ZPE che è l'angolo orario del polo dell'eclittica, o sia la differenza fra l'ascensione retta del zenit e quella del polo dell'eclittica. L'ascensione retta di questo polo è sempre di 270°; quella del zenit, che si chiama *l'ascensione retta del mezzo Cielo*, è uguale alla somma dell'ascensione retta del Sole col tempo vero (nel momento per cui si fa il calcolo) ridotto in gradi o sia in parti dell'equatore, detraendo 360° quando la detta somma gli eccede. Convien cercare EZ, cioè *l'altezza del nonagesimo*; e PEZ, che è la differenza fra la longitudine del polo dell'equatore e quella del zenit: e come la longitudine di questo polo è sempre di 90°, si ha poi la longitudine del zenit, o sia la *longitudine del nonagesimo* dall'equazione seguente: *long. nonag.* $= 90° \pm$ PEZ. Nell'emisfero settentrionale, ogni volta che il complemento dell'altezza del polo sia maggiore dell'obliquità dell'eclittica (il che abbraccia quasi tutti i casi, essendo rarissime le osservazioni astronomiche dentro i circoli polari) il segno + ha luogo, quando l'ascensione retta del mezzo Cielo è maggior di 90° e minor di 270°: per ogni altro valore di questa ascensione retta, avrà luogo il segno —, e si osserverà che, se PEZ $> 90°$, convien prendere il supplemento a 360° dell'arco negativo (90° — PEZ). Conosciuta la longitudine del nonagesimo, si prenderà la differenza fra questa longitudine e quella dell'astro L, dalla parte ove riesce minore di 180°, e si avrà l'angolo ZEL, o sia (803) la *distanza vera al nonagesimo.*

Nel triangolo PEZ, essendo dati due lati PE, PZ, e l'angolo intercetto ZPE, si possono trovare il lato EZ e l'angolo PEZ per mezzo delle formole (VIII. 7^1, 8^2); ma si ha da cercare un logaritmo di meno adoprando quelle di Neper (IX. 2^2, 5^2), alle quali darò la preferenza. Dall'angolo PEZ si deduce, come dicemmo,

l'angolo ZEL; e, quando si è trovato il valore di quest'angolo, e quello del lato EZ, si ha quanto bisogna per calcolare le parallassi di longitudine e di latitudine dell'astro L, col mezzo delle formole (C), (D), nelle quali s'impiegherà per parallasse orizzontale la differenza delle parallassi orizzontali dei due astri; il che non è rigoroso, ma di sufficientissima esattezza in tutti i casi, e però adottato comunemente.

Applicato in tal modo l'effetto delle due parallassi al solo astro L, ed avute, in tale ipotesi, la longitudine e la latitudine apparenti di esso; se si suppone che l'altro astro sia S, e che zEV sia lo stesso triangolo ZEL della fig. 77, nel triangolo ELS si conoscerà il lato LE distanza apparente dell'astro L al polo dell'eclittica, il lato ES distanza vera dell'astro S al detto polo, e l'angolo LES, che è la differenza fra la longitudine vera dell'astro S e la longitudine apparente dell'astro L. Con questi dati si deve cercare il lato LS che è la distanza apparente de' centri dei due astri, scopo final del problema. L'ultima equazione (VIII. 8ª) è impotente a dar questo lato con precisione, a cagion della sua piccolezza, e però conviene ricorrere alla soluzione (478).

Fig. 78

807. Per facilitare l'esecuzione delle operazioni precedenti, le ridurrò (808) in una specie di tavola. Premetto la seguente, che ho promessa (796, 798), e della quale si ha bisogno nelle operazioni medesime.

Per avere, col mezzo di questa tavola, la parallasse orizzontale di un astro per un luogo della Terra, si prenderà nella stessa tavola il logaritmo del raggio corrispondente alla latitudine di questo luogo, e si aggiungerà al logaritmo della parallasse orizzontale dell'astro sotto l'equatore. Che se, in vece di questa parallasse, fosse data la parallasse per un luogo fuori dell'equatore, come succede facendo uso delle tavole della Luna del Sig. de la Lande, che danno la parallasse per Parigi; allora si avrebbe la parallasse orizzontale equatorea, sottraendo dalla parallasse data il logaritmo del raggio spettante al luogo, per cui è data.

Tavola degli angoli della verticale, e de' logaritmi de' raggi terrestri.

Altezza del polo.	Angolo della vertic.	Logaritmo del raggio della Terra.	Differ. de' logarit.	Altezza del polo.	Angolo della vertic.	Logaritmo del raggio della Terra.	Differ. de' logar.
0°	0' 0"	0, 0000000		39°	14' 38"	9, 9992564	
1	0 31	9, 9999994	6	40	14 44	9, 9992241	323
2	1 2	9, 9999977	17	41	14 49	9, 9991915	326
3	1 34	9, 9999949	28	42	14 53	9, 5991588	327
4	2 5	9, 9999909	40	43	14 56	9, 9991260	328
5	2 35	9, 9999858	51	44	14 58	9, 9990930	330
6	3 6	9, 9999796	62	45	14 59	9, 9990600	330
7	3 37	9, 9999723	73	46	14 58	9, 9990270	330
8	4 7	9, 9599638	85	47	14 57	9, 9989939	331
9	4 37	9, 9999543	95	48	14 54	9, 9989610	329
10	5 6	9, 9999437	106	49	14 51	9, 9989282	328
11	5 35	9, 9999320	117	50	14 46	9, 9988955	327
12	6 4	9, 9999192	128	51	14 40	9, 9988630	325
13	6 32	9, 9999054	138	52	14 33	9, 9988307	323
14	7 0	9, 9998906	148	53	14 25	9, 9987987	320
15	7 28	9, 9998748	158	54	14 16	9, 9987670	317
16	7 55	9, 9998580	168	55	14 6	9, 9987357	313
17	8 21	9, 9998402	178	56	13 55	9, 9987047	310
18	8 46	9, 9998214	188	57	13 43	9, 9986741	306
19	9 11	9, 9998017	197	58	13 29	9, 9986440	301
20	9 35	9, 9997812	205	59	13 15	9, 9986144	296
21	9 59	9, 9997597	215	60	13 0	9, 9985854	290
22	10 22	9, 9997374	223	61	12 44	9, 9985569	285
23	10 44	9, 9997143	231	62	12 27	9, 9985290	279
24	11 6	9, 9996903	240	63	12 9	9, 9985017	273
25	11 27	9, 9996656	247	64	11 50	9, 9984751	266
26	11 46	9, 9996402	254	65	11 30	9, 9984493	258
27	12 5	9, 9996140	262	66	11 10	9, 9984241	252
28	12 23	9, 9995871	269	67	10 48	9, 9983998	243
29	12 40	9, 9995596	275	68	10 26	9, 9983762	236
30	12 57	9, 9995315	281	69	10 3	9, 9983534	228
31	13 12	9, 9995028	287	70	9 39	9, 9983316	218
32	13 26	9, 9994736	292	71	9 15	9, 9983106	210
33	13 39	9, 9994438	298	72	8 50	9, 9982905	201
34	13 52	9, 9994136	302	73	8 24	9, 9982713	192
35	14 3	9, 9993829	307	74	7 58	9, 9982532	181
36	14 14	9, 9993518	311	75	7 31	9, 9982360	172
37	14 23	9, 9993203	315	80	5 9	9, 9981654	
38	14 31	9, 9992885	318	85	2 37	9, 9981222	
39	14 38	9, 9992564	321	90	0 0	9, 9981076	

808. *Tipo del calcolo per trovare la distanza apparente de' centri di due astri* S, L, de' quali si suppongono note le parallassi orizzontali equatoree, e le longitudini e latitudini *vere*, cioè quali sarebbero vedute dal centro della Terra, tenendo conto dell'aberrazione e della nutazione. Suppongo altresì che la parallasse orizzontale dell'astro L sia maggiore di quella dell'astro S. Facilmente si comprenderà, essere inutile l'indicar cosa siano gli archi A, B, &c. che sono qui ridotti al semplice uffizio di sussidiarj.

A = ascens. retta.☉ + tempo vero in parti dell'equatore.

Se $A > 360°$, si prenderà $A - 360°$, in vece di A.

$B = A \backsim 270°$; *e se l' altezza del polo è australe*, $B = A \backsim 90°$.

Se $B > 180°$, si prenderà $360° - B$, in vece di B.

C = altezza del polo − angolo della verticale.

D = 90° − C − obliquità apparente dell'eclittica.

E = 90° − C + obliquità apparente dell'eclittica.

$\text{tang.} F = \cot.\tfrac{1}{2}B \times \frac{\text{sen.}\frac{1}{2}D}{\text{sen.}\frac{1}{2}E}$.

$\text{tang.} G = \cot.\tfrac{1}{2}B \times \frac{\cos.\frac{1}{2}D}{\cos.\frac{1}{2}E}$.

$\text{tang.}\tfrac{1}{2}H = \text{tang.}\tfrac{1}{2}D \times \frac{\text{sen.}G}{\text{sen.}F}$.

$M = 90° \pm (F + G)$ = longitudine del nonagesimo.

Il segno + ha luogo quando $A > 90°$ e $< 270°$: il segno − negli altri casi; ma se allora $(F + G) > 90°$, si aggiunga 360° al secondo membro.

Se l'altezza del polo è australe, $M = 270° \mp (F + G)$.

Il segno − *ha luogo quando* $A > 90°$ *e* $< 270°$: *il segno* + *negli altri casi; ma se allora* $M > 360°$, *si prenderà* $M - 360°$, *in vece di* M.

$N = M \backsim$ longitudine vera dell' astro L.

Se $N > 180°$, si prenderà $360° - N$, in vece di N.

O = raggio della Terra × (par.or.equat.L − par.or.equat.S).

P =

$P = O \times \frac{\text{sen.H sen.}(N + P)}{\text{cos.}\,lat.\,vera\,\text{L}}$.

Longitudine apparente dell'astro L = longitudine vera ± P.

Il segno + ha luogo se il punto dell'eclittica, il qual segna la longitudine vera dell'astro, è all'oriente del nonagesimo; il segno — se all'occidente.

$Q = \frac{P \times \text{cos.}\,lat.\,v.\,\text{L}}{\text{sen.N}}\,(\text{cot.H} - \text{cos.}\,\overline{N + \tfrac{1}{2}P}\ \text{tang.}\,lat.v.\text{L})\ \text{cos.}\,lat.ap.\text{L}$.

Latitudine apparente dell'astro L = latitudine vera ± Q.

Il segno + ha luogo se la latitudine vera è australe; il segno — se è boreale: tutt' al contrario se Q è negativo.

Se l'altezza del polo è australe, si cangierà in questa regola + in —, e — in +.

T = long. app. dell' astro L ∽ long. vera dell'astro S.

U = lat. app. dell' astro L ∽ lat. vera dell'astro S.

$\text{tang.Z} = \frac{\text{sen.}\frac{1}{2}T}{\text{sen.}\frac{1}{2}U} \sqrt{\text{cos.}\,lat.appar.\text{L}\ \text{cos.}\,lat.vera\ \text{S}}$.

$\text{sen.}\tfrac{1}{2}\,dist.\,appar.\ de'\ centri = \frac{\text{sen.}\frac{1}{2}U}{\text{cos.Z}}$.

Se i valori di T e di U sono minori ciascuno di 45', come negli eclissi ed occultazioni, in vece delle due ultime equazioni si potrà senza scrupolo fare uso delle seguenti:

Y = lat. appar. dell' astro L + lat. vera dell'astro S.

$\text{tang.Z} = \frac{T \times \text{cos.}\frac{1}{2}Y}{U}$.

Distanza apparente de' centri $= \frac{U}{\text{cos.Z}}$.

809. La speditezza del metodo precedente dipende principalmente dalla pochezza e semplicità delle regole, dal non aver mai bisogno di fare una figura, e sopra tutto dal poter fare tutti i calcoli delle prime dieci equazioni, negligendo i secondi, o al più tenendo conto delle loro decine solamente, senza offender punto l'esattezza dell' ultimo risultato. Ne viene in conseguenza che lo stesso avvantaggio di negligere i secondi si gode pure nel prender le linee trigonometriche contenute nelle equazioni che danno il valore di P e di Q.

Vediamo un esempio di questo metodo, cercando la distanza

apparente di Antarès al centro della luna nel momento dell'immersione osservata in Parigi dal Sig. de la Lande il dì 6 Aprile 1749. Prenderò gli elementi nel calcolo che fu fatto con somma cura dal Sig. Carouge, ed è esposto (*Astr.* la Lande, Tom. IV, pag. 644).

$$A = 15^{s} 58' + 195^{\circ} 20' = 211^{\circ} 18'$$
$$B = 211^{\circ} 18' \backsim 270^{\circ} = 58^{\circ} 42'.$$

L'angolo della verticale, dato dalla Tavola (807) per la latitudine $48^{\circ} 50'$, è $14' 51'' \frac{1}{2}$; e però

$$C = 48^{\circ} 50' 10'' - 14' 50'' = 48^{\circ} 35' 20''.$$

L'obliquità apparente dell'eclittica pel principio d'Aprile 1749, secondo la Tavola del Sig. de la Lande (Tom. IV, pag. 763), è $23^{\circ} 28' 22''$; laonde

$$D = 90^{\circ} - 48^{\circ} 35' 20'' - 23^{\circ} 28' 20'' = 17^{\circ} 56' 20''$$
$$E = 90^{\circ} - 48^{\circ} 35' 20'' + 23^{\circ} 28' 20'' = 64^{\circ} 53'.$$

log. cot. 29° 21'	= 0,250015	. . . .	0,250015
log. sen. 8° 58' 10"	= 9,192868	. . . . log. cos.	9,994656
comp. log. sen. 32° 26' 30"	= 0,270478	. . comp. log. cos.	0,073689
log. tang. F	= 9,713361	log. tang. G =	0,318360
Laonde F	= 27° 19' 55",	G =	64° 20' 20".

log. tang. ½ D = { log. sen. 8° 58' 10"	=	9,192868
complem. log. cos.	=	0,005344
log. sen. 64° 20' 20"	=	9,954904
compl. log. sen. 27° 19' 55"	=	0,338050
log. tang. ½ H	=	9,491166

Onde $H = 34^{\circ} 26'$.

$$M = 90^{\circ} + 27^{\circ} 19' 55'' + 64^{\circ} 20' 20'' = 181^{\circ} 40' 15''.$$
$$N = M \backsim \text{long. v.} ☾ = M \backsim 245^{\circ} 31' 42'' = 63^{\circ} 51' 30''.$$

In questo caso, *parall. oriz.* S = o, poichè Antarès non ha parallasse.

Il Sig. Carouge dà la parallasse orizzontale polare della luna; convien dedurne la parallasse per Parigi, e si ha (807)

$$\log. O = \begin{cases} \text{log. (paral. oriz. al polo} = 57' \, 9'', 8) = 3,535269 \\ \text{compl. log. del raggio al polo.} \; . \; . \; . = 0,001892 \\ \text{log. del raggio per Parigi} \; . \; . \; . \; . \; . = 9,998934 \end{cases}$$

log. sen, 34° 26′ = 9,752392

compl. log. cos. (*lat. v.* ☾ = 3° 48′) = 0,000956

Somma, o log. costante 3,289443

log. sen. (N = 63° 51′ 30″) = 9,953135

log. (29′ 8″ = P presso poco) = 3,242578

E, per avere il valore esatto di P,

log. sen. (N + P = 64° 20′ 40″) = 9,954924

log. costante trovato di sopra 3,289443

log. P = 3,244367

Prendo di sopra { log. cos. 3° 48′ = 9,999044 ; compl. log. sen. N = 0,046865 }

Secondo log. costante 3,290276

log. cot. (H = 34° 26′) = 0,163949

log. (47′ 26″ = 1ª parte del valor di Q presso poco) = 3,454225

E, per avere esattamente la 1ª parte del valore di Q,

log. cos. (*lat. appar.* ☾ = 3° 48′ + 47′ $\frac{1}{2}$) = 9,998604

log. 1ª parte del valore di Q = 3,452829

Secondo log. costante trovato di sopra 3,29028

log. cos. (N + $\frac{1}{2}$P = 64° 6′) = 9,64028

log. tang. (*lat. v.* ☾ = 3° 48′) = 8,82230

log. cos. *lat. appar.* preso di sopra = 9,99860

log. 2ª parte del valore di Q = 1,75146

Questa 2ª parte diviene positiva, perchè la latitudine della luna essendo australe, tang. *lat.* è negativa (744).

I calcoli precedenti danno con ogni esattezza

$P = 29' 15'', 4; \; Q = 47' 16'', 8 + 56'', 4 = 48' 13'', 2.$

Si ha dunque 1°. perchè la luna era all'oriente del nonagesimo,

long.appar. ☾ $= 245° 31' 42'' + 29' 15'', 4 = 246° 0' 57'', 4.$

2°. lat.appar. ☾ $= 3° 47' 58'', 1 + 48' 13'', 2 = 4° 36' 11'', 3.$

Prendendo il mezzo fra le posizioni di Antarès determinate da Bradleyo, Mayer e La Caille, e ridotte ai 6 Aprile 1749; e applicandovi l'aberrazione e la nutazione, trovo *long.v.* Antarès $= 246° 16' 19'', 2$, e *lat.v.* Antarès $= 4° 32' 16'', 5$ *austr.* Dunque

$$T = 246° 0' 57'', 4 \backsim 246° 16' 19'', 2 = 15' 21'', 8$$
$$U = 4° 36' 11'', 3 \backsim 4° 32' 16'', 5 = 3' 54'', 8$$
$$Y = 4° 36' 11'', 3 + 4° 32' 16'', 5 = 9° 8' 28''.$$

$$\begin{aligned} \log.T &= 2,964637 \\ \log.\cos.(\tfrac{1}{2} Y = 4° 34') &= 9,998619 \\ \text{compl.}\log.U &= \underline{7,629302} \\ \log.\text{tang}.Z &= 0,592558 \\ \text{compl.}\log.\cos.Z &= 0,606293 \\ \text{Si aggiunga}\log.U &= \underline{2,370698} \\ \text{Somma} &= 2,976991 \end{aligned}$$

Questo logaritmo dà la *distanza apparente de' centri* $= 15' 48'', 4.$

810. Nel calcolo precedente non si hanno da cercare che trenta logaritmi in tutto. Non mi è noto alcun altro metodo, nel qual non bisogni cercarne maggior numero, e con molto maggior dispendio di tempo, per la necessità di tener conto delle decime di secondo in tutto il calcolo, se si vuole ottener questa precisione nell'ultimo risultato, quale la dà il nostro metodo. Volendo compararlo con altri, si considererà, che questo non richiede che si conosca l'ascensione retta e la declinazione di alcuno de' due astri, non la loro altezza, nè l'angolo parallattico, nè quello di posizione, e permette

di prendere presso poco l'ascensione retta del Sole nelle Efemeridi.

Debbo avvertire, per giustificazione del mio calcolo, che se il Sig. Carouge trova il valore di P, o sia la parallasse di longitudine maggior della mia di 1",7; ho verificato che ciò proviene dall'avere egli impiegato nel calcolarla, in vece del coseno della latitudine vera, il coseno della latitudine apparente, secondo la formola di La Caille (*Élém. d'Astr.* 658). Le mie analogie differenziali finite non permettono mai d'ingannarsi su questo punto, che in generale fu trattato finora come arbitrario, nell'uso delle analogie infinitesimali. Che se il valore di Q, o la parallasse di latitudine del Sig. Carouge è più piccola della mia di 0", 6, questo è difetto dell'analogia infinitesimale (551) ch'egli ha adoperata nel modo che dissi (804). Avendo esaminato dipoi diligentemente questa materia delle parallassi, si compiacque comunicarmi la dimostrazione sintetica delle formole che ha composto. Quella della parallasse di longitudine è affatto conforme alla mia (C): quella della parallasse di latitudine è composta di tre termini nel secondo membro; e l'ho sperimentata più volte molto esatta.

811. Per comparar con l'osservazione la distanza apparente de' centri data dal calcolo (808), fa d'uopo aumentare il diametro della luna in ragion dell'altezza, e di più, se si tratta d'un eclissi di Sole, tener conto dell'accorciamento prodotto dalla refrazione sulle fasi misurate col micrometro. Per la prima correzione sarebbe sufficiente prender l'altezza della luna da un globo: per la seconda è necessario conoscere l'angolo formato dal circolo verticale con la linea de' centri. Vediamo come si possa trovar con facilità un valore bastantemente prossimo dell'una e dell'altro, cogli elementi dati dal calcolo (808).

Sia E il polo dell'eclittica, *z* il zenit, V il luogo vero della luna, L il luogo apparente, S il luogo vero dell'altro astro; SL è la distanza apparente de' centri data dal calcolo (808). Si prolunghi EL in guisa che sia E*m* = ES; si congiunga *m*S, e si prolunghi *z*L

Fig. 78

fino in n : sarà Lm = U, (808); e (498, 1°.), mS = mES × sen.ES = T × cos.$\frac{1}{2}$Y, prossimamente. Donde si vede che mLS = Z, (808), potendosi considerar senza scrupolo il piccolo triangolo LmS, come rettilineo e rettangolo in m.

Ciò posto, si osservi che il triangolo zVE, convertendosi in zLE, conserva costanti il lato zE e l'angolo z. Per il che facendo (555, 541), A = z, B = E, C = V, si ha 1°. ♌EV : ♌E :: sen.EV : tang.zLE, supponendo, per approssimazione, sen.(EV + $\frac{1}{2}$♌V) : tang.(V − $\frac{1}{2}$♌V) :: sen.EV : tang.(V − ♌V); 2°. ♌zV : ♌E :: sen.EV : sen.zLE. Ma ♌zV = *par.altezza* = *par.oriz.* cos.*alt.appar.*, (803), (B). Ponendo questo valore nell'ultima analogia, e ♌EV × tang.zLE in vece di ♌E × sen.EV, come si ha dalla prima, queste due analogie danno

$$\text{tang.}\,\textit{ang.parallatt. appar.} = \frac{\textit{par.long. cos.lat.v.}}{\textit{par.lat.}} = \frac{P}{Q} \times \text{cos.}\,\textit{lat.v.}$$

$$\text{cos.}\,\textit{altezza appar.} = \frac{\textit{par.lat.}}{\textit{par.oriz. cos.ang.parallat.appar.}} = \frac{Q}{O \times \text{cos.}\textit{ang.par.app.}}.$$

Negli eclissi del Sole si può sempre mettere cos.lat.☾ = 1. L'angolo parallattico apparente zLE = mLn, sottratto, od aggiunto, secondo i casi, all'angolo Z = mLS, dà l'angolo cercato SLn che fa la linea de' centri col circolo verticale.

812. Siccome l'infaticabile Calcolatore Sig. Levêque ha dato le tavole generali della longitudine e dell'altezza del nonagesimo per tutti i paesi della Terra (Tomi 2 in-8°, à Paris, *chez Laporte*), così stimo bene di far vedere quanto sia facile l'introdurvi la correzione dello schiacciamento.

Fig. 79 Sia P il polo del mondo, E quello dell'eclittica, Z il zenit per la Terra schiacciata, M il zenit per la Terra sferica. Le tavole del Sig. Levêque sono costrutte sul triangolo PZE, ed hanno per argomenti l'altezza del polo, o sia il complemento di PZ, e l'ascensione retta del mezzo cielo, o sia del zenit Z. Ho mostrato negli articoli precedenti quanto sia più vantaggioso il servirsi del triangolo PME. Or si osservi che l'aumentazione ZM, eguale all'angolo

della verticale, non muta l'ascensione retta del zenit, o sia del mezzo cielo, onde questo argomento rimane costante. L'altro solamente si muta, cioè PZ; e però se si fa uso di queste tavole, prendendo per argomento l'altezza del polo diminuita dell'angolo della verticale, si avranno da esse l'altezza ME del nonagesimo, e la longitudine del nonagesimo, o sia del zenit M, con quei valori che sono necessarj per ottenere con ogni esattezza dalle mie formole (C), (D) le parallassi di longitudine e di latitudine per la sferoide schiacciata.

813. *Trovare la longitudine di un luogo della Terra.*

Gli eclissi del Sole, e le occultazioni delle stelle sotto la luna, sono i fenomeni più sicuri per determinare con precisione le longitudini terrestri. Convien calcolare la distanza apparente de' centri (808) per il momento dell'osservazione, supponendo la longitudine quale si stima, e prendendo, con questa ipotesi, dalle tavole i luoghi del Sole e della luna. Se la distanza calcolata non è uguale alla osservata, dico che da questo errore del calcolo si può dedurre con grande esattezza e facilità la vera longitudine cercata, procedendo come segue.

Sia E il polo dell'eclittica, L la luna, S il Sole o la stella, LS la distanza apparente de' centri data dal calcolo (808). L'errore sulla distanza de' centri si attribuisce intieramente al luogo della luna impiegato nel calcolo; giacchè la stella è immobile, e il Sole si può considerar come tale, purchè s'impieghi, quando lo prescriverò, il *moto relativo*, cioè la differenza de' moti del Sole e della luna. Fatto dunque costante il lato ES, si tratta di determinare nel triangolo LES gli errori dell'angolo E e del lato EL, corrispondenti all'errore del lato LS. Col metodo (284) suppongo prima costante anche il lato EL, e facendo (631) $A = E$, $B = S$, $C = L$, ho $\delta SL : \delta E :: \text{sen.}EL\ \text{sen.}L : 1$. Indi facendo costante l'angolo E insieme col lato ES, si ha (550), $\delta SL : \delta EL :: \cos.L : 1$. La somma dei due valori parziali di δSL, presi da queste analogie, dà $\delta SL = \delta E\ \text{sen.}L\ \text{sen.}EL + \delta EL \cos.L$.

Fig. 78

Chiamo D la distanza LS de' centri data dal calcolo (808), L la longitudine, l la latitudine (apparenti) della luna, impiegate nel calcolo stesso, per il che sostituirò, nella formola ora trovata, δL a δE, e δl a δEL; l'angolo L, o ELS, è appunto l'angolo Z, che la penultima formola (808) dà sempre acuto, e di cui conviene impiegare il supplemento nell'equazione (G) quì appresso, quando la distanza della luna al polo dell'eclittica sia minore della distanza della stella o del Sole al medesimo polo; ed ho

$$(G)\ldots\quad \delta D = \delta L \text{ sen.Z } \cos.l + \delta l \cos.Z.$$

Se, in vece di δD, si pone in questa equazione l'errore dato dal calcolo sulla distanza de' centri, δL e δl saranno gli errori nella longitudine e nella latitudine apparenti della luna, che si sono impiegate nel calcolo, dai quali errori è nato l'errore δD. Si tratta di determinare il valore di δL, e quello di δl.

814. 1°. *Se si suppone che il luogo della luna dato dalle tavole sia giusto*, allora gli errori δL e δl dipendono unicamente dall'ipotesi che si è fatta per la longitudine terrestre. Detti errori in tal caso sono fra di essi nella ragione de' moti orarj veri della luna in longitudine e in latitudine. Dico de' moti orarj *veri*, poichè la differenza da questi agli apparenti è insensibile nella presente ricerca, quando δD non fosse di più minuti, nel qual caso si vedrà (816) ciò che far convenga. Ciò posto, se si chiama M il moto orario vero relativo in longitudine, m quello in latitudine, r la loro ragione $\frac{m}{M}$, sarà $M : m :: \delta L : \delta l = \frac{m\delta L}{M} = r\delta L$. Si sostituisca questo valore di δl nell'equazione (G), e se ne ricaverà

$$(H)\ldots\quad \delta L = \frac{\delta D}{\text{sen.Z } \cos.l + r \cos Z}.$$

Trovato, con questa equazione, l'errore nella differenza delle longitudini dei due astri, si avrà dal moto orario relativo la correzione in tempo che deve farsi all'ipotesi della longitudine terrestre, e questa sarà conosciuta e determinata.

815.

815. Per sapere in qual senso debba correggersi la longitudine della luna, o l'ipotesi della longitudine terrestre, basta riflettere che, se il calcolo ha dato la distanza de' centri troppo grande, fa d'uopo avvicinare la luna alla stella od al Sole, ed allontanarla al contrario, quando il calcolo avesse data la distanza de' centri troppo piccola.

816. Se l'errore δD fosse di più minuti, l'equazione (H) non sarebbe atta a dare il valore esatto di δL. In tal caso da questo valore si avrà una correzione solamente prossima della longitudine. Con questa longitudine così corretta si farà novamente tutto il calcolo (808), e si avrà un altro errore δD, sommamente piccolo, con cui si ricaverà dall'equazione (H) una seconda correzione esattissima della longitudine.

817. 2°. *Se si vuol tener conto e determinare l'errore, che può essere nel luogo della luna dato dalle tavole*, allora una sola osservazione non basta, ma è necessario di averne tre, una delle quali almeno sia fatta in un luogo, del qual si conosca la longitudine. In un eclissi di Sole si può averne molte, il che dà un risultato medio più sicuro. Or suppongo che si abbiano tre osservazioni, due delle quali fatte nel meridiano cercato. Per ognuna di dette osservazioni si avrà un' equazione della forma (G). Chiamo E l'error delle tavole nella longitudine della luna, e quello nella latitudine, ed ho per le tre osservazioni

(N)... $\delta D = E \text{ sen.Z } \cos . l + e \cos . \text{Z}$.

(O)... $\delta D' = \delta L \text{ sen.Z}' \cos . l + \delta l \cos . \text{Z}'$.

(P)... $\delta D'' = \delta L \text{ sen.Z}'' \cos . l + \delta l \cos . \text{Z}''$.

L'equazione (N) appartiene visibilmente al meridiano conosciuto, dove l'errore δD dipende unicamente dagli errori delle tavole. Nelle altre due equazioni ognuna delle espressioni δL e δl contiene due errori, che devono disbrogliarsi e discernersi l' uno dall'altro; cioè l'error delle tavole, e quello dell'ipotesi per

la longitudine terrestre. Questi errori sono gli stessi in ambe le equazioni, perchè l'error delle tavole non cangia nel breve intervallo fra le due osservazioni, e perchè entrambi i calcoli sono fatti con la stessa ipotesi per la longitudine terrestre. La quantità cos.l suppone uguale nelle tre osservazioni la latitudine apparente della luna, il che non è vero, ma il cangiamento di essa non può far variare sensibilmente il suo coseno: del resto sarà facile a chi voglia l'impiegare in ogni equazione la latitudine corrispondente. Or sia K l'errore sulla longitudine della luna per cagion dell'ipotesi; quello sulla latitudine sarà rK, posto sempre $r = \frac{m}{M}$, (814); e si avrà

(Q)... $\delta L = E + K.$

(R)... $\delta l = e + rK.$

Donde si cava

(S)... $r\delta L - \delta l = rE - e.$

Sostituendo i valori (Q), (R) nelle equazioni (O), (P), e risolvendole insieme con la precedente (N) pei metodi ordinarj, si troverà il valore di ognuna delle tre incognite, E, e, K.

818. Sarà più comodo distribuire l'operazione nel calcolo successivo delle equazioni seguenti.

1ª $\quad \delta L = \frac{\delta D' \cos.Z'' - \delta D'' \cos.Z'}{\cos.l \ \text{sen.}(Z' \pm Z'')}.$

2ª $\quad \delta l = \frac{\delta D'' \ \text{sen.}Z' \pm \delta D' \ \text{sen.}Z''}{\text{sen.}(Z' \pm Z'')}.$

3ª $\quad E = \frac{\delta D + \cos.Z \ (r\delta L - \delta l)}{\text{sen.}Z \cos.l + r \cos.Z}.$

4ª $\quad e = \frac{r\delta D - \text{sen.}Z \cos.l \ (r\delta L - \delta l)}{\text{sen.}Z \cos.l + r \cos.Z}.$

5ª $\quad K = \delta L - E.$

Le equazioni 1ª e 2ª sono cavate dalle (O), (P). S'impiegheranno i segni superiori quando le due osservazioni saranno fatte, come

succede per lo più, l'una avanti, e l'altra dopo la congiunzione apparente: giacchè allora l'errore δL, che abbiamo sostituito (813) a δE, aumenta l'angolo LES in un caso, e lo diminuisce nell'altro; Fig. 78 onde deve essere negativo nell'una o nell'altra delle equazioni (O), (P). Nel caso di usare i segni inferiori, si avvertirà che sen. $(Z' - Z'')$ deve essere negativo (154), quando sia $Z'' > Z'$.

Le equazioni 3ᵃ e 4ᵃ sono cavate dalle (N), (S); la 5ᵃ dalla (Q).

Resta da avvertire relativamente alle equazioni 1ᵃ... 4ᵃ, che quando la distanza de' centri calcolata sarà minore dell'osservata, dovrà farsi negativo l'errore corrispondente δD, o $\delta D'$, &c. Stimo conveniente altresì di quì ripetere quel che ho detto (813), che quando la luna sarà più vicina al polo dell'eclittica, di quel che fosse la stella, od il Sole, dovrà impiegarsi in quel caso nelle equazioni 1ᵃ... 4ᵃ il supplemento dell'angolo Z, o Z', &c. dato dal calcolo (808). Con queste regole si otterranno i giusti valori di E, e, K: egli è inutile poi di moltiplicarle affin d'indicare in qual senso dovran correggersi gli errori E, e, K, ne' diversi casi, mentre ciò si distingue con la sola ispezione delle ultime due equazioni (808), le quali, dopo fatte le correzioni, devono dare la distanza apparente de' centri affatto eguale alla distanza osservata.

819. Per dare un saggio delle mie formole sopra un esempio, prendo gli elementi di quello del Sig. de la Lande (*Astr.* Tom. II, pag. *565*, *566*, e Tom. IV, pag. *644*), e col mezzo delle due ultime equazioni (808) trovo

per l'immersione d'Antarès osservata in Parigi, $D = 15' 48'', 41$;
per l'immersione osservata in Berlino, $D' = 15' 48'', 86$;
per l'emersione osservata in Berlino, $D'' = 15' 43'', 13$.

Queste tre distanze sono tutte maggiori del giusto, e per conseguenza gli errori δD, $\delta D'$, $\delta D''$ tengono fermi i loro respettivi segni nelle equazioni (818). In fatti dette distanze, comparate coi respettivi semidiametri apparenti della luna quali furono calcolati

dal Sig. Carouge (la Lande, Tom. IV. pag. 644), danno $\delta D = 11'', 8$; $\delta D' = 11'', 99$; $\delta D'' = 5'', 79$. Si ha poi $Z = 75° 25'$, $Z' = 59° 44'$, $Z'' = 58° 26'$, il valor mezzano di l, $4° 38'$, e $\log. r = 8, 76150$. Con questi dati, ricavo dalle formole (818), usando i segni superiori nella 1ª e nella 2ª, come conviene al caso, $\delta L = 3'', 823$; $\delta l = 17'', 26$: indi $E = 7'', 67$; $e = 17'', 485$; $K = -3'', 85$. Considerando il calcolo della distanza de' centri fatto per Parigi, facilmente si scorge in qual senso applicar si debbano le correzioni degli errori E, e, perchè sparisca l'error δD. La longitudine della luna data dalle tavole apparisce troppo piccola di $7'', 7$; la latitudine troppo grande di $17'', 5$; e come i valori di K e di E hanno il segno contrario, ne risulta che la longitudine della luna, data dall'ipotesi della longitudine di Berlino, è troppo grande di $3'', 85$. Per diminuire di questa quantità la longitudine della luna, si trova, col mezzo del moto orario, che bisogna accrescere l'ipotesi di $7''$ di tempo; laonde la differenza de' meridiani fra gli Osservatorj Reali di Parigi e di Berlino, dedotta rigorosamente da queste osservazioni, e dai calcoli del Sig. Carouge, viene ad essere $44'\ 13''$.

820. Se due osservazioni fossero fatte nel meridiano conosciuto, ed una sola nel meridiano che vuole determinarsi, in tal caso si applicheranno alle due prime le equazioni (818, 1ª e 2ª). La 1ª darà il valore di E, la 2ª quello di e. Si farà la correzione di questi errori nel luogo della luna dato dalle tavole, indi si calcolerà la distanza de' centri (808) relativamente alla terza osservazione; e l'error dell'ipotesi per la longitudine terrestre si rinverrà col mezzo dell'equazione (H), (814).

821. *Trovar la correzione delle osservazioni fatte ad un reticolo di 45°, non situato nella giusta direzione del moto diurno.*

Fig. 80 Siano CB, CA, CD i tre fili del reticolo, che dovrebbero trovarsi nelle posizioni Cb, Ca, Cd; e sia BAD il parallelo di un astro, perpendicolare al circolo orario vero Ca. I passaggi dell' astro,

osservati in B, A, D, danno in tempo gl'intervalli BA, AD, dai quali si deve conchiudere il valore di Aa e quello di Ca.

L'angolo BCD essendo diviso per mezzo dal filo AC, si ha (244), $BA + AD : BA \backsim AD :: \text{tang.}\frac{1}{2}(D + B) : \text{tang.}\frac{1}{2}(D \backsim B)$. Ma dall'essere $BCD = 90°$ ne nasce, che $\text{tang.}\frac{1}{2}(D + B) = \text{tang.}45° = 1$, e che $D \backsim B = 90° - 2B = 2\,aCA$, a motivo che $B = 90° - BCa$, e $BCa = 45° + aCA$. Dunque

$$\text{tang.}aCA = \frac{BA \backsim AD}{BA + AD},$$

la qual formola fa conoscere l'angolo di deviazione de' fili.

L'ipotenusa BD, divisa in due segmenti dalla perpendicolare Ca, dà (221, 2°.), $BD : Ba \backsim Da :: 1 : \text{sen.}(D \backsim B)$. Dunque

$$Ba \backsim Da = (BA + AD)\ \text{sen.}2\,aCA.$$

Col mezzo di questa formola si avrà il valore assoluto de' segmenti Ba, Da, e si conoscerà per conseguenza il momento, in cui si doveva osservare il passaggio dell'astro in a.

La differenza fra Ba e BA dà il valore di aA; quindi si ha

$$Ca = aA\ \text{cot.}aCA;$$

e Ca è la differenza di declinazione, che si cerca, fra l'astro e il centro del reticolo. Per calcolarla, conviene moltiplicare il valore di aA qual fu trovato in tempo, per 15 cos. *decl.* dell'astro.

822. *Trovare la correzion degli errori, a cui vanno soggette le Osservazioni per motivo della differenza fra il parallelo vero, e il parallelo apparente.*

Tre sono le cause, che rendono diverso il parallelo apparente dal vero. 1°. Il cangiamento di declinazione dell'astro; 2°. il cangiamento della parallasse di declinazione; 3°. il cangiamento della refrazione. Convien valutar separatamente l'error che proviene da ognuna di queste tre cause. Delle due prime non fa duopo tener conto, se non per la luna.

823. Quando si osserva col cannocchiale parallatico la differenza

di ascensione retta e di declinazione fra la luna ed una stella che le vien dietro, è di necessità situare il micrometro in guisa, che il lembo della luna rada il filo. Ciò posto, sia P il polo del mondo, BC il filo orario del micrometro, FM un altro filo perpendicolare al medesimo filo orario, e sia LU il moto del lembo della luna che, traversando il cannocchiale, si avvicina o si allontana dal polo per una delle tre cause (822). Dovendosi mettere il filo MF nella situazione LU, ne nasce che il filo orario BC si trova nella situazione CS; e però se AN è il parallelo della stella, il passaggio di questa, che avrebbe dovuto osservarsi in B, si osserverà in S. Come egli è chiaro che il moto del centro della luna è parallelo al moto del lembo, e come le osservazioni degli orli si riducono sempre al centro, supponiamo al presente che LU sia la strada tenuta dal centro della luna; l'angolo BPS sarà l'errore sulla differenza de' passaggi osservati. Ora il triangolo CPS dà sen.PS : sen.PCS :: sen.CS : sen.CPS :: CS : CPS, a motivo della piccolezza di queste quantità. Ma PCS = MCL è l'angolo del parallelo apparente col parallelo vero; CS è la differenza osservata di declinazione fra la stella ed il centro della luna. Dunque la correzione in tempo del passaggio osservato si avrà con facilità dall'equazione seguente:

$$(T)\ldots \text{ la correzione cercata} = \frac{\text{diff. appar.}\,\textit{decl.} \times \text{sen.}\,\textit{ang. paralleli}}{15 \text{ cos.}\,\textit{decl.}\text{ della stella}}.$$

Questa correzione è *additiva* al passaggio osservato della stella, quando la luna si accosta al polo, e ne è più lontana che la stella, o quando la luna si scosta dal polo, e ne è più vicina che la stella: *sottrattiva* negli altri casi.

L'errore in declinazione, o sia la differenza da CS a BC, può negligersi ne' primi due casi (822): del resto si ha BC = CS × cos. PCS.

Per calcolare l'equazione (T) fa d'uopo conoscere l'angolo de' paralleli. Noi prendiamo a determinarlo separatamente, per rispetto a ciascuna delle tre cause (822).

824. Chiamando *m* il moto diurno della luna in declinazione,

preso in minuti, *l'angolo de' paralleli, prodotto dal cangiamento della luna in declinazione*, si ha in minuti con sufficiente esattezza dalla seguente formola speditissima, che dà il Sig. de la Lande (*Astr.* 2543):

$$\text{angolo de' paralleli} = \frac{\frac{1}{2}\, m}{\text{cos.}\mathit{decl.}\ \text{della luna}}.$$

825. Cerchiamo ora *l'angolo de' paralleli prodotto dal cangiamento della parallasse della luna in declinazione*. L'enunciazione del quesito porta naturalmente a differenziare la formola, che dà il valore della parallasse di declinazione: per il che rimango sorpreso, come questa soluzione tanto ovvia non sia caduta fin'ora in mente ad alcuno, e specialmente ai valenti Geometri, che hanno esaurito, per così dire, questo argomento, impugnando la soluzione del Sig. de la Lande.

Sia Z il zenit, P il polo, LU il parallelo apparente della luna, Fig. 82 PA = PL, e per conseguenza AU il cangiamento della parallasse di declinazione. Chiamando d questa parallasse, p la parallasse orizzontale, è noto che $d = p$ sen.ZL cos.PLZ, (*Astr.* la Lande, Tom. IV, pag. 634). Ma sen.ZL $= \frac{\text{sen.ZPL sen.PZ}}{\text{sen.PLZ}}$. Dunque $d = p$ sen.ZPL sen.PZ cot.PLZ. Ora cot.PLZ $= \frac{\text{cot.PZ sen.PL}}{\text{sen.ZPL}}$ — cos.PL cot.ZPL, (VII. 13ª). Dunque $d = p$ cos.PZ sen.PL — p cos.PL sen.PZ cos.ZPL. Differenziando questa equazione, e notando che, oltre p e PZ, anche PL è costante, giacchè qui non si considera il moto della luna in declinazione, si ha $\partial d = p$ cos.PL sen.PZ sen.ZPL ∂ZPL. Ma ∂ZPL = APL, ∂d = AU = AL tang. ALU = APL sen.PL tang. ALU = p cos.PL sen.PZ sen.ZPL × APL. Dall'ultima equazione si cava tang. ALU = p cot.PL sen.PZ sen.ZPL. E però l'angolo de' paralleli si avrà in minuti dalla seguente:

$$\text{angolo de' paralleli} = \frac{R' \times \mathit{par.oriz.}\ \text{cos.}\mathit{alt.\ del\ polo}\ \text{sen.}\mathit{ang.or.app.}\ \text{della luna}}{\text{cot.}\mathit{decl.appar.}\ \text{della luna}}.$$

826. Resta per ultimo da cercare *l'angolo de' paralleli prodotto dal cangiamento della refrazione.*

Sia AS il filo che un astro ha percorso, AE, FS le quantità della refrazione ne' due punti. Se si prende FR = AE, RS sarà la differenza delle due refrazioni, e AR il parallelo che l'astro avrebbe seguito, se l'effetto della refrazione fosse stato uniforme e costante. L'angolo cercato de' paralleli è dunque RAS.

Fig.83

Come basta trovare il suo valore in minuti, così impiegherò indifferentemente in questa ricerca l'uno per l'altro gli angoli di variazione (753), ZRP, ZSP, ZAP, che son presso poco uguali; e prendendo ZB = ZA, il che dà BS per differenza delle altezze apparenti, considererò come retti gli angoli B e C, giacchè ne' casi di fare uso di questo problema la grandezza degli archi ZA, PA non è mai tanto differente da 90°, che l'errore (534) possa esser sensibile.

Faccio $RS = \delta r$, $BS = \delta h$, $APR = \delta P$, $\text{sen.}PA = \cos.\mathit{decl.} = \cos.D$, $RAS = a$, $ZRP = ZSP = ZAP = V$.

Ora $\text{tang.}a = \frac{CS}{AC} = \frac{RS \cos.ZSP}{AR - CR} = \frac{\delta r \cos.V}{\delta P \cos.D - \delta r \,\text{sen.}V}$. Questo è il valore di tang.a dato da Lexell, come apprendo dal Sig. Trembley, (*Essai de Trigonom. sphérique*, pag. 198). Ma questa formola non mi par la più comoda, poichè le tavole delle refrazioni non contengono la ragione $\frac{\delta r}{\delta P}$, ma bensì la ragione $\frac{\delta r}{\delta h}$, della quale stimo meglio fare uso.

A tale oggetto si consideri che, se dagli angoli retti BAZ, RAP si leva la parte comune RAZ, resta $BAR = PAZ = V$. Ora $AR = \frac{BR}{\text{sen.}BAR}$: dunque $AR = \frac{\delta h + \delta r}{\text{sen.}V}$. Ma si ha pure $AR = \frac{SR \,\text{sen.}ASR}{\text{sen.}RAS} = \frac{SR \cos.BAS}{\text{sen.}RAS} = \frac{\delta r \cos.(V - a)}{\text{sen.}a} = \delta r \cos.V \cot.a + \delta r \,\text{sen.}V$.

Dunque $\frac{\delta h + \delta r}{\text{sen.}V} = \delta r \cos.V \cot.a + \delta r \,\text{sen.}V$; donde si cava

$$\text{tang.}a = \frac{\delta r \,\text{sen.}V \cos.V}{\delta h + \delta r \cos.^2 V},$$

Si può negligere il termine insensibile $\delta r \cos.^2 V$, e si ha

$$(U)\ldots\ \text{tang.}a = \frac{\delta r}{\delta h} \times \text{sen.}V \cos.V = \frac{\delta r}{\delta h} \times \tfrac{1}{2}\text{sen.}2V.$$

In

In vece di tang. a, si può senza scrupolo mettere sen. a, e quindi sostituire il valore dato da questa formola, in vece di *sen. ang. paralleli*, nella (T), (823). Ma conviene riflettere che nel costruire quest'ultima si è supposto senza deviazione il cammino apparente di uno de' due astri, cioè quello della stella che si trattava di comparare alla luna. Or come la refrazione influisce sul cammino apparente tanto dell'uno quanto dell'altro dei due astri, così ne segue che nel caso presente *si deve prendere il doppio della correzione data dalla formola* (T). Questa diviene conforme in tal modo, e fatta la sostituzione che dissi, a quella del Sig. de la Lande (*Astr.* 2547).

827. Per sapere in qual senso debba applicarsi la correzione, basta avvertire che a levante il cangiamento della refrazione allontana gli astri dal polo, ed a ponente gli avvicina. Si potrà dunque usare la regola, che abbiam data subito dopo la formola (T), solchè si attribuisca all'astro, che è primo a passare, ciò che ivi dicemmo per la luna; e la correzione si faccia sul passaggio del secondo astro.

828. Ho detto che si deve prendere *il doppio della correzione data dalla formola* (T): importa dimostrarlo con piena evidenza; giacchè Lexell (la cui formola è stata adottata dal Sig. Trembley, pag. 202, ed equivale alla (T) presa una sola volta) dice positivamente nelle Memorie di Pietroburgo pel 1774, la formola del Sig. de la Lande *nequaquam cum veritate consistere posse.*

Da ciò che si è detto (827) è facile conchiudere che in tutti i casi il filo orario del cannocchiale sta sempre frammezzo al circolo orario vero ed al circolo verticale. Ciò posto, sia NQ il filo orario del cannocchiale, P il polo, Z il zenit, RR' il filo percorso dal primo astro, MN il filo percorso dal secondo, ZS, CA due verticali, SE la refrazione dell'astro più basso, MA la refrazione dell'altro, gli archetti AB, EU perpendicolari a PU, e l'archetto MF sensibilmente perpendicolare tanto a CA, come a ZS.

Si ha PSN $= a$, PSZ $= V =$ PMC sensibilmente, SE $=$

Fig.84 r, NS = diff.appar.*decl.*, che chiamo dD; e faccio MA = r'. Per D intendo sempre la declinazione, ma tanto dell'uno come dell' altro astro indifferentemente. Si potrà impiegare per più esattezza nel calcolo, se si vuole, la quantità mezzana fra le due declinazioni; e così potrà farsi per l'angolo di variazione V.

Quando il primo astro fu osservato in S, il suo luogo vero, o sia liberato dalla refrazione, era in E. Mancava dunque al suo passaggio pel circolo orario vero PU un intervallo di tempo $\frac{\text{EU}}{15 \cos. D} = \frac{\text{SE sen.ESU}}{15 \cos. D} = \frac{r \text{ sen.} V}{15 \cos. D}$. Chiamando T il tempo del passaggio osservato in S, il momento del passaggio liberato dalla refrazione sarà dunque $T + \frac{r \text{ sen.} V}{15 \cos. D}$.

Quando il passaggio del secondo astro fu osservato in N, il suo passaggio apparente sul circolo orario vero era già succeduto prima in M. La differenza in tempo fra questi due passaggi è $\frac{\text{MN}}{15 \cos. D} = \frac{\text{NS tang.NSM}}{15 \cos. D} = \frac{dD}{15 \cos. D} \times \frac{dr}{dh} \text{ sen.} V \cos. V$, (826) (U). Questa differenza deve sottrarsi dal passaggio osservato in N, per aver quello in M. Ma quando l'astro appariva al punto M, il suo luogo vero, o sia liberato dalla refrazione, era in A. Mancava dunque al suo passaggio sul circolo orario vero PU un intervallo di tempo $\frac{\text{AB}}{15 \cos. D} = \frac{\text{AM sen.AMB}}{15 \cos. D} = \frac{r' \text{ sen.} V}{15 \cos. D}$. E però, se si chiama T' il tempo del passaggio osservato in N, sarà il momento del vero passaggio, che si sarebbe dovuto osservare in B, $T' - \frac{dD}{15 \cos. D} \times \frac{dr}{dh} \text{ sen.} V \cos. V + \frac{r' \text{ sen.} V}{15 \cos. D}$. La differenza di ascensione retta in tempo fra i due astri, liberata dagli effetti della refrazione, è dunque $T' - \frac{\text{sen.} V}{15 \cos. D} \times \left(\frac{dr}{dh} \times dD \cos. V - r'\right) - T - \frac{r \text{ sen.} V}{15 \cos. D}$, ovvero $T' - T - \frac{\text{sen.} V}{15 \cos. D}\left(\frac{dr}{dh} \times dD \cos. V + r - r'\right)$. Ma $r - r'$ è la differenza di refrazione, corrispondente alla differenza di altezza dei due astri; onde $r - r' : \text{FS} :: dr : dh$. Di più FS = MS $\cos. V = dD \cos. V$, giacchè, in vece di MS, si può senza scru-

polo mettere NS. L'ultima analogia dà dunque $r - r' = \frac{\delta r}{\delta h} \times \delta D$ cos.V. E però l'errore della differenza $T' - T$ de' passaggi osservati risulta $\frac{\delta r}{\delta h} \times \frac{2\,\delta D \text{ sen.} V \text{ cos.} V}{15 \text{ cos.} D}$; che è appunto il valor doppio della formola (T), sostituito che siasi il valore di sen.a preso dalla formola (U). Ritorna dunque a danno di Lexell l'imputazione da lui scagliata contro il Sig. de la Lande.

La nostra figura suppone l'astro all'oriente: si troverà un egual risultato, supponendolo all'occidente.

829. La vera differenza di declinazione è BU = MS — BM + SU. Ponendo NS in luogo di MS, la correzione della differenza osservata NS sarà SU — BM = SE cos.ESU — MA cos.BMA = r cos.$V - r'$ cos.V. Pigliando il valore di $r - r'$, trovato poc' anzi, *la correzione, sempre additiva alla differenza osservata di declinazione*, sarà $\frac{\delta r}{\delta h} \times \delta D$ cos.$^2 V$.

830. Per avere dalle tavole di refrazione la ragione $\frac{\delta r}{\delta h}$, basta conoscere all'incirca l'altezza mezzana fra l'uno e l'altro degli astri, per mezzo di un globo. Basta pure conoscere l'angolo di variazione, a mezzo grado più o meno: si può calcolarlo per via della formola seguente, sen.$V = \frac{\text{cos.alt.del polo sen.ang.or.}}{\text{cos.altezza}}$.

831. *Trovare il momento, nel quale il moto di un astro in altezza è il più rapido.*

Sia P il polo, Z il zenit, RS il parallelo di un astro. Pongo PR = PS, cioè che l'astro non cangi in declinazione; giacchè questo cangiamento, allor che ha luogo, è sempre infinitamente piccolo in un istante di tempo, almeno per rispetto al moto in altezza. Il triangolo PZR, convertendosi in PZS, conserva dunque costanti i due lati PZ, PR; e però, chiamando Z l'angolo PZR, R l'angolo PRZ, e facendo (630, 631), A = P, B = Z, C = R, si ha

Fig.68

$$\delta ZR = \delta P \text{ sen.PZ sen.Z} = \delta P \text{ sen.PR sen.R}.$$

Fig.68 Donde si vede che il valor massimo di δZR, o il massimo moto in altezza, in un istante di tempo δP, ha luogo quando sen.Z, o sen.R, sia il più grande possibile, cioè quando l'azzimutto, o quando l'angolo di variazione (753), sia di 90°.

832. Questi angoli esser non possono tutti due retti ad un tempo, se non quando RS sia l'equatore (417). Allora sono costanti (se la declinazione non cangia), e per conseguenza il moto in altezza è equabile.

Se RS non è l'equatore, PR sarà più grande o più piccolo di 90°; e si noti che non può mai essere PZ $>$ 90°.

Considerando in prima PR $<$ 90°, quello solo de' due angoli Z, R potrà esser retto, il quale sia opposto al lato maggiore (475, 3°.), (413). E però, se la declinazione boreale dell'astro è minore dell'altezza del polo, il moto più rapido in altezza avrà luogo quando l'azzimutto sia di 90°: e se la declinazione boreale è maggiore dell' altezza del polo, il momento del massimo moto in altezza sarà quello in cui l'angolo di variazione sia di 90°.

Se poi PR $>$ 90°, allora nessuno degli angoli Z, R può mai esser retto. In fatti, se fosse Z $=$ 90°, sarebbe cos.PR $=$ cos.PZ cos.ZR, (VI. 13°). Ma ZR $<$ 90°, poichè quì si considera l'astro al di sopra dell'orizzonte. Dunque l'equazione precedente dà un valor positivo di cos.PR; il che è assurdo, attesa l'ipotesi di PR $>$ 90°. Similmente, se fosse R $=$ 90°, sarebbe cos.PZ $=$ cos.PR cos.ZR, la quale equazione dà un valor negativo di cos.PZ contro la verità.

Per determinare il momento del valor massimo di sen.Z, o di sen. R, quando PR $>$ 90°; si prenda l'equazione (VII. 9°), che dà $\cos.Z = \frac{\cos.PR - \cos.PZ \cos.ZR}{\text{sen}.PZ \text{ sen}.ZR}$. Ma cos.PR è negativo in questo caso; dunque Z $>$ 90°; e quest'angolo sarà tanto più piccolo, cioè tanto più vicino a 90°, quanto più piccolo sia il valore di cos.Z, dato da questa equazione. Ora il minimo valore di cos.Z, per un

dato valore di PZ e di PR, ha luogo visibilmente, allorchè $\cos.ZR = 0$.

Similmente ragionando sull' equazione (VII. 11ª), che dà positivo in questo caso il rettangolo $\cos.PR \cos.ZR$, si troverà parimente che il minimo valore di $\cos.R$ ha luogo quando $\cos.ZR = 0$.

Dunque il moto più rapido in altezza, degli astri che hanno una declinazione meridionale, ha luogo quando $ZR = 90°$, cioè quando l'astro si leva.

833. *Dedurre l'altezza meridiana dalle altezze osservate in prossimità al meridiano.*

Siano ZR, ZS due distanze al zenit, osservate poco prima, o poco dopo il passaggio dell'astro pel meridiano; si dimanda la distanza ZT.

Il triangolo PZS, convertito in PZR, conserva costanti i lati PZ, e $PS = PR$. Chiamo P l'angolo ZPS; ed ho (629), cangiando i segni dei differenziali, e facendo $A = P$, $B = Z$, $C = S$,

$$(A)\ldots \ \text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta ZS = \text{sen.}\tfrac{1}{2}\delta P \times \frac{\text{sen.}PZ\ \text{sen.}PS\ \text{sen.}(P + \frac{1}{2}\delta P)}{\text{sen.}(ZS + \frac{1}{2}\delta ZS)}.$$

Ora δZS è la differenza delle due altezze osservate, δP è l'intervallo di tempo fra le due osservazioni, contato in parti dell'equatore; $P + \frac{1}{2}\delta P$ e $ZS + \frac{1}{2}\delta ZS$ sono l'angolo orario mezzano e la distanza al zenit mezzana, fra l'una e l'altra osservazione. La formola (A) serve dunque a verificare con calcolo esattissimo la differenza delle due altezze osservate, ed a ridurne molte, successivamente, ad una sola, prendendo il mezzo fra i diversi risultati. Suppongo tutte le osservazioni ridotte al punto S, cioè all'osservazione più prossima al meridiano: per quindi applicare alla medesima la formola (A), basta fare $\delta P = ZPS$, e $P = 0$; e si ha

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}(ZS - ZT) = \text{sen.}^2\tfrac{1}{2}ZPS \times \frac{\text{sen.}PZ\ \text{sen.}PS}{\text{sen.}\frac{1}{2}(ZS + ZT)};$$

e quando sia $ZPS < 2°$, (259),

$$ZS - ZT = \frac{(ZPS)^2}{2R''} \times \frac{\text{sen.}PZ\ \text{sen.}PS}{\text{sen.}\frac{1}{2}(ZS + ZT)}:$$

le quali equazioni fanno conoscere ZT, o la distanza al zenit, che si cerca.

Queste equazioni, e la formola (A), mi riescono comode per conchiuder con molta esattezza da più osservazioni l'altezza meridiana del Sole ne' giorni circonvicini ai solstizj. Soglio prendere sei altezze di un lembo avanti il mezzodì, e sei dell'altro dopo il mezzodì, onde avere con gran precisione anche il diametro del Sole, quale è fatto dal cannocchiale. Essendomi noto, per altre osservazioni, o per l'andamento regolare del pendolo, il giusto momento del mezzogiorno vero, ho gli angoli orarj corrispondenti a ciascuna delle osservazioni. Impiego nel calcolo del secondo membro delle equazioni trovate di sopra, la declinazione, e la distanza al zenit del lembo osservato, negletti i secondi; e per avere con facilità ed esattezza il logaritmo del piccolo seno di $(P + \frac{1}{2}\delta P)$, trovo comode le tavole (*chez Desaint* 1768) che ho indicate (168).

834. *Date tre altezze di un astro, ed il tempo allorchè ciascuna fu osservata, trovare l'angolo orario e la declinazione dell'astro, e l'altezza del polo.*

Questo problema, che è costato fatica infino ad ora, è risoltò immediatamente dalle mie analogie differenziali finite.

Siano A', A'', A''' le tre altezze osservate, supponendo A' la più piccola, A''' la più grande; T l'intervallo di tempo, ridotto in parti dell'equatore, fra le osservazioni delle due altezze minori A', A''; T' l'intervallo di tempo fra le due maggiori A'', A'''; O''' *l'angolo orario* corrispondente all'altezza maggiore A''', L *la latitudine terrestre*, D *la declinazione dell'astro.*

Comparando la prima e la terza osservazione, la formola (A), (833), dà $\text{sen.}\frac{1}{2}(A''' - A') : \text{sen.}\frac{1}{2}(T + T') :: \cos.L \cos.D \text{ sen.}(O''' + \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T') : \cos.\frac{1}{2}(A''' + A')$. Ma comparando le osservazioni delle due maggiori altezze, si ha parimente $\text{sen.}\frac{1}{2}(A''' - A'') : \text{sen.}\frac{1}{2}T' :: \cos.L \cos.D \text{ sen.}(O''' + \frac{1}{2}T') : \cos.\frac{1}{2}(A''' + A'')$.
Dunque $\cos.L \cos.D = \frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(A''' - A') \cos.\frac{1}{2}(A''' + A')}{\text{sen.}\frac{1}{2}(T + T') \text{ sen.}(O''' + \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T')} =$

$\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(A''' - A'')\ \cos.\frac{1}{2}(A''' + A'')}{\text{sen.}\frac{1}{2}T'\ \text{sen.}(O''' + \frac{1}{2}T')}$. Ma sen.$(O''' + \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T') =$ sen.$(O''' + \frac{1}{2}T')\ \cos.\frac{1}{2}T + \cos.(O''' + \frac{1}{2}T')\ \text{sen.}\frac{1}{2}T$. Ponendo questo valore nell'equazione precedente, e moltiplicandola per sen.$(O''' + \frac{1}{2}T')$, si ricava

$$\cot.(O''' + \tfrac{1}{2}T') = \cot.\tfrac{1}{2}T\left(\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(A''' - A')\ \cos.\frac{1}{2}(A''' + A')\ \text{sen.}\frac{1}{2}T'}{\text{sen.}\frac{1}{2}(A''' - A'')\cos.\frac{1}{2}(A''' + A'')\ \text{sen.}\frac{1}{2}(T + T')\ \cos.\frac{1}{2}T} - 1\right),$$

equazione che fa conoscere l'angolo orario, giacchè O''' è la sola quantità incognita.

Or facendo per brevità $\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(A''' - A'')\ \cos.\frac{1}{2}(A''' + A'')}{\text{sen.}\frac{1}{2}T'\ \text{sen.}(O''' + \frac{1}{2}T')} = m$, avremo $\cos.L\ \cos.D = m$. Ma $\cos.L\ \cos.D = \text{sen.}PZ\ \text{sen.}PS = \frac{\cos.ZS - \cos.PZ\ \cos.PS}{\cos.ZPS}$ (VII. 7ª) $= \frac{\text{sen.}A''' - \text{sen.}L\ \text{sen.}D}{\cos.O'''} = m$. Dunque $\text{sen.}L\ \text{sen.}D = \text{sen.}A''' - m\cos.O'''$. Questa equazione, una volta aggiunta, e una volta sottratta dall'altra $\cos.L\ \cos.D = m$, dà (II. 4ª, 3ª) Fig.68

$$\cos.(L \backsim D) = \text{sen.}A''' + m\,(1 - \cos.O''')$$
$$\cos.(L + D) = m\,(1 + \cos.O''') - \text{sen.}A''',$$

ovvero, (I. 7ª, 24ª), per impiegar più comodamente i logaritmi,

$$\cos.(L \backsim D) = \text{sen.}A'''\left(1 + \frac{2m\ \text{sen.}^2\frac{1}{2}O'''}{\text{sen.}A'''}\right)$$
$$\cos.(L + D) = \text{sen.}A'''\left(\frac{2m\ \cos.^2\frac{1}{2}O'''}{\text{sen.}A'''} - 1\right).$$

Col mezzo di queste due equazioni, si avranno i valori assoluti di L e di D, cioè della latitudine e della declinazione: è vero che bisogna sapere estrinsecamente qual delle due sia maggiore dell'altra; ma è ben raro il caso, ove possa mancar questa cognizione anticipata.

Le seguenti equazioni, ricavate dalle precedenti coi metodi (202, 198), serviranno a condur tutto il calcolo con facilità e speditezza, e con l'uso delle sole tavole trigonometriche in logaritmi.

$$n = \frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(A''' - A'')\,\cos.\frac{1}{2}(A''' + A'')}{\text{sen.}\frac{1}{2}T'}$$

$$\cos.x = \sqrt{\frac{n\,\cos.\frac{1}{2}T\,\text{sen.}\frac{1}{2}(T + T')}{\text{sen.}\frac{1}{2}(A''' - A')\,\cos.\frac{1}{2}(A''' + A')}}$$

$$\text{tang.}(O''' + \tfrac{1}{2}T') = \text{tang.}\tfrac{1}{2}T\,\cot.^2 x$$

$$m = \frac{n}{\text{sen.}(O''' + \frac{1}{2}T')}$$

$$\text{tang.}y = \text{sen.}\tfrac{1}{2}O'''\sqrt{\frac{2m}{\text{sen.}A'''}}$$

$$\cos.z = \text{tang.}\tfrac{1}{2}O'''\,\cot.y$$

$$\cos.(L \backsim D) = \frac{\text{sen.}A'''}{\cos.^2 y}$$

$$\cos.(L + D) = \text{sen.}A'''\,\text{tang.}^2 z.$$

È facile conoscere che quanto saranno più grandi gl' intervalli fra un'osservazione e l'altra, tanto maggiore sarà l'esattezza ne' risultati: essendo chiaro, che quanto saranno più piccoli i seni di $\frac{1}{2}(A''' - A'')$ e di $\frac{1}{2}T'$, e quanto più $\cot.\frac{1}{2}T$ sarà grande, tanto più si renderanno sensibili nel calcolo gli errori che fossero stati commessi nelle osservazioni.

La presente soluzione è analoga a quella di *Bezout*, ma trovata con molto minor fatica: e quanto al calcolo numerico, si hanno 21 logaritmi da cercare con le mie formole, e 27 con quelle di Bezout. Tutte le altre soluzioni, che ho veduto finora, sono più laboriose.

835. *Essendo date la declinazione e due altezze di un astro, coi momenti delle osservazioni, trovare l'angolo orario dell'astro, e l'altezza del polo.*

Fig.68 Nel triangolo isoscele SPR, conoscendo i lati e l'angolo verticale, si troveranno la base RS, e gli angoli sulla base. Nel triangolo ZRS conoscendo i tre lati, si cercherà uno degli angoli adjacenti a RS, per esempio ZSR. Si avrà quindi ZSP, o (ZSR — PSR). Finalmente nel triangolo PZS conoscendo ZS, PS, e l'angolo compreso, si troveranno PZ e l'angolo ZPS.

Se fosse nota l'altezza del polo, e si cercasse la declinazione dell'astro,

dell'astro, lo stesso metodo servirebbe, mettendo Z in luogo di R e di S, e S in luogo di Z.

836. *Essendo date l'altezza del polo, la declinazione e due altezze di un astro, coi momenti delle osservazioni, trovar l'angolo orario dell'astro.*

La formola (A), (833), dà sen. $(ZPS + \frac{1}{2}SPR) = \frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(ZR - ZS)\ \text{sen.}\frac{1}{2}(ZR + ZS)}{\text{sen.}\frac{1}{2}SPR\ \text{sen.}PZ\ \text{sen.}PS}$. Questa è la formola, a cui perviene il Sig. Douwes, giacchè il numeratore si riduce (II. 23ª) a $\frac{1}{2}$cos.ZS — $\frac{1}{2}$cos.ZR, o sia alla mezza differenza de' seni delle due altezze.

Se le osservazioni sono fatte in vicinanza al meridiano, basta conoscer la latitudine terrestre, a qualche grado più o meno, giacchè l'errore su questo elemento poco influisce in tal caso sull'angolo orario, a cagione che sen.PZ sarà sempre molto più grande di sen.$(ZPS + \frac{1}{2}SPR)$. Trovato il valore dell'angolo orario prossimamente, si potrà anzi adoprarlo nella soluzione (VIII. 3ª), per cercare e conoscer più esattamente la latitudine, la quale, impiegata in un secondo calcolo della formola precedente, darà l'angolo orario con vie maggior precisione.

Donde si vede che le altezze, prese in vicinanza al meridiano, sono molto proprie a determinare la latitudine terrestre, quando la declinazione dell'astro è ben nota; e viceversa, a determinare la declinazione, quando ben si conosce la latitudine.

Da questa soluzione si può ottenere, ripetendo i calcoli come dissi di sopra, tutta l'esattezza, di cui le osservazioni siano suscettibili. Essa è però di gran lunga superiore al metodo di La Caille (*Traité de Navigation de Bouguer*), fondato sopra la variazione delle distanze al zenit, proporzionale ai quadrati degli angoli orarj; il qual metodo va soggetto ad errori considerabili, come ben dimostrò d'Alembert (*Opusc. mathém.* Tom. IV, pag. 357).

837. *Date tre longitudini e tre latitudini eliocentriche o selenocentriche d'una macchia, trovare l'inclinazione dell'equatore solare*

o lunare sopra l'eclittica, il luogo de' nodi del detto equatore, e la distanza della macchia al polo di rotazione.

Le mie analogie differenziali finite danno una soluzione immediata e molto semplice di questo problema, che finora è costato molto maggior fatica.

Fig.85 Sia E il punto del globo solare o lunare, che corrisponde al polo dell' eclittica, P il polo di rotazione dell' astro, M, A, C i tre luoghi osservati della macchia.

Si conoscono per osservazione le tre distanze ME, AE, CE della macchia al polo dell' eclittica, e le differenze di longitudine, MEA, AEC.

Si cerca PE distanza de' due poli, la longitudine del polo P che è a 90° da quella de' nodi, e la distanza MP = AP = CP della macchia al medesimo polo, supponendola aderente al disco dell' astro, e ferma nello stesso sito durante l'intervallo delle osservazioni.

Descritti i tre archi di circolo massimo, MA, AC, MC, osservo che il triangolo PEM, convertito nel triangolo PEA, conserva costanti i lati PE, PM, onde si ha, cangiando i segni dei differenziali nell' analogia (619), e facendo in quella A = P, B = E, C = M,

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}\Delta EM : -\text{tang.}\tfrac{1}{2}\Delta PEM :: \text{sen.}(EM + \tfrac{1}{2}\Delta EM) : \text{cot.}(PME - \tfrac{1}{2}\Delta PME).$$

Ma $\Delta EM = EA - EM$, $\Delta PEM = MEA$, $(EM + \tfrac{1}{2}\Delta EM) = \tfrac{1}{2}(EM + EA)$, e $PME - \tfrac{1}{2}\Delta PME = \tfrac{1}{2}(PME + PAE)$, come si può veder meglio, ricorrendo alla dimostrazione (711) dell'analogia (619). Dunque, sopprimendo il segno negativo di tang. $\tfrac{1}{2}\Delta PEM$, il quale indica solamente, che PEM diminuisce quando EM aumenta (726), si ha

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}(EA - EM) : \text{tang.}\tfrac{1}{2}MEA :: \text{sen.}\tfrac{1}{2}(EA + EM) : \text{cot.}\tfrac{1}{2}(PME + PAE).$$

In quest'analogia tutto è noto, eccetto l'ultimo termine. Ma considerando il triangolo MPE convertito in CPE, si avrà similmente un' analogia che darà il valore di cot. $\tfrac{1}{2}(PME + PCE)$; e considerando il triangolo APE convertito in CPE, un' altra che darà il va-

lore di cot.$\frac{1}{2}$(PAE + PCE). Avute così le mezze somme dei tre angoli di posizione, PME, PAE, PCE, presi a due a due, sarà facile trarne il valore di ciascuno degli angoli stessi.

Al presente uno qualsivoglia dei tre triangoli considerati finora, per esempio il triangolo PCE, convertito in PAE, dà (614),

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\delta\,PEC : \text{tang.}\tfrac{1}{2}\delta\,PCE :: \text{tang.}(PEC+\tfrac{1}{2}\delta\,PEC) : \text{tang.}(PCE+\tfrac{1}{2}\delta\,PCE),$$

ovvero, ricorrendo, se si vuole, alla dimostrazione (710) dell'analogia (614),

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}CEA : \text{tang.}\tfrac{1}{2}(PAE-PCE) :: \text{tang.}(PEC+\tfrac{1}{2}CEA) : \text{tang.}\tfrac{1}{2}(PAE+PCE)$$

Il terzo termine di quest'analogia è il solo ignoto; e però si ha da essa il valore dell'angolo PEC, e per conseguenza la longitudine cercata del polo P.

Conoscendo allora un lato e gli angoli adjacenti, in uno qualunque de' triangoli PEC, PEA, PEM, conoscendo, per esempio, nel primo, CE, PEC, PCE, si troveranno ad un tratto, con la bella soluzione di Neper (IX. 4°), i due lati richiesti, PE, PC.

In tutto questo calcolo non si hanno da cercare che 21 logaritmi. La soluzione del P. Pezenas, che fra le date finora mi sembra una delle meno laboriose, obbliga a cercare 46 volte in due tavole. Il mio metodo ha pur l'avvantaggio, che tutte le incognite si determinano per via delle tangenti, e per conseguenza con ogni esattezza di calcolo in tutti i casi.

838. Questa mia soluzione si legge nel Tomo X delle Memorie presentate all'Accademia delle Scienze di Parigi. Vi ho aggiunto diverse regole relative ai casi, ne' quali il circolo de' limiti si trova frammezzo alle longitudini osservate; poichè allora le prime analogie, in vece di dare tre mezze somme degli angoli di posizione, ne danno una sola e due mezze differenze. Ma, osservando le regole de' segni (42, 154), si può fare uso in tutti i casi delle analogie che ho dato di sopra, senza bisogno nè di una figura, nè di badare alla situazione del circolo de' limiti.

Ecco il tipo del calcolo ridotto alla maggior semplicità e generalità.

Sia L′ la prima longitudine osservata della macchia, L″ la seconda, L‴ la terza; D′, D″, D‴ le tre respettive distanze al polo dell' eclittica; *L* la longitudine cercata del polo dell' equatore dell' astro, *O* l'obliquità dell' eclittica per rispetto al detto equatore, *D* la distanza della macchia al detto polo.

$$\text{tang.}a = \frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(D'' - D')\ \text{cot.}\frac{1}{2}(L'' - L')}{\text{sen.}\frac{1}{2}(D'' + D')}$$

$$\text{tang.}b = \frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(D''' - D')\ \text{cot.}\frac{1}{2}(L''' - L')}{\text{sen.}\frac{1}{2}(D''' + D')}$$

$$\text{tang.}c = \frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(D''' - D'')\ \text{cot.}\frac{1}{2}(L''' - L'')}{\text{sen.}\frac{1}{2}(D''' + D'')}$$

$$\text{tang.}x = \text{tang.}\tfrac{1}{2}(L''' - L'')\ \text{tang.}c\ \text{cot.}(a - b)$$

$$L = x + \tfrac{1}{2}(L''' + L'')$$

$$m = L \backsim L''' \qquad n = (b + c) \backsim a$$

Se $m > 180°$, si prenderà $360° - m$, in vece di m. Similmente, se $n > 180°$, si prenderà $360° - n$, in vece di n.

$$\text{tang.}y = \frac{\text{tang.}\frac{1}{2}D'''\ \text{sen.}\frac{1}{2}(m \backsim n)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(m + n)}$$

$$\text{tang.}z = \frac{\text{tang.}\frac{1}{2}D'''\ \text{cos.}\frac{1}{2}(m \backsim n)}{\text{cos.}\frac{1}{2}(m + n)}$$

$$O = z \backsim y \qquad D = z + y$$

Ma se $n > 90°$, allora

$$O = 180° - (z + y) \qquad D = 180° - (z \backsim y).$$

CAPITOLO XXII.

Delle projezioni, e de' planisferj Geografici ed Astronomici.

Il gran soccorso che porge la Trigonometria, nella costruzione de' planisferj, e nell' uso d' ogni sorte di projezioni, non ci permette di lasciare questo Trattato senza una qualche idea di simili applicazioni.

839. Per *projezione* s' intende la rappresentazione, o l'apparenza di un oggetto sul piano di prospettiva. Se da ogni punto di una figura si conducono linee con una data legge su un dato piano, diverso da quello, in cui è la figura, tutti i punti del dato piano, sui quali cadranno queste linee, formeranno la projezione della figura. Le carte celesti e geografiche, per esempio, non possono esser che projezioni, poichè si tratta di rappresentare una superficie sferica sopra una carta piana; vale a dire, di ridurre ad un piano solo tutti i punti di una superficie sferica, i quali si trovano in essa situati in un numero infinito di piani diversi.

Per concepir chiaramente la gran difficoltà di questa rappresentazione, basta applicare un foglio di carta sopra di un globo, facendo come se si volesse incollarvelo sopra: si riconoscerà tosto che senza diminuire il foglio notabilmente, trinciandolo in diverse parti, non si potrebbe mai venirne a capo. Egli è dunque impossibile di conservare con esattezza sopra una carta geografica le distanze respettive de' Paesi, e di dare ai gradi di longitudine e di latitudine quella grandezza relativa che hanno sul globo: non si può che accostarsi più o meno alla verità.

840. Nelle carte antiche si facevano i meridiani paralleli, e i gradi di longitudine uguali dappertutto a quelli di latitudine. Queste si chiamano *carte piatte*, e sono le più difettose immaginabili. In fatti sia P il polo, EQ un arco dell' equatore, per esempio, di 12°. Fig. 86

Fig.86 Sia A la città di Parigi, D quella di Dublino, M quella di Marocco. Suppongo queste due ultime città sotto lo stesso meridiano, giacchè la differenza di longitudine fra di esse è piccolissima, e forse nulla, non essendo ancor nota con precisione la longitudine di Marocco. In vece di far convergenti sulla carta i meridiani PE, PQ, sicchè vadano ad incontrarsi al polo, come sono sul globo e realmente, se si pongono paralleli, come FQ, GE; Parigi si troverà sulla carta nel punto H, Dublino in K, e Marocco in L. Tanto basta per far comprendere quanto enormi esser possano gli errori sulle distanze reciproche, in questa specie di carte.

841. È necessario di ben intendere ancora quanto sia differente sul globo la grandezza dei gradi di longitudine a diverse distanze dal polo. L'arco di parallelo AR è di tanti gradi (394) quanti ne ha l'arco EQ. Ma la lunghezza di AR è tanto più piccola di EQ, quanto più AR è vicino al polo; giacchè la lunghezza de' gradi di longitudine diminuisce (392) in proporzione del seno della distanza in cui sono dal polo.

842. Per rimediare agl'inconvenienti e difficoltà che ho esposte, e per avvicinarsi alla verità nella costruzione delle carte geografiche e celesti, si ebbe ricorso a diverse specie di projezioni.

La projezione più semplice è l'*ortografica*. La legge di questa projezione si è, che le linee tirate da ogni punto della figura, di cui si dimanda la projezione, cadano ad angolo retto sul piano, sul qual si vuole la projezione. Se cercasi, per esempio, la projezione Fig.87 ortografica di una linea AB sopra un piano rappresentato dalla linea PI, si caleranno da ogni punto di AB le linee BC, FH, &c. perpendicolari a PI. La parte AC, della linea PI, compresa dalle perpendicolari, sarà la projezione di AB. Qualunque sia la distanza di AB dal piano di projezione, le perpendicolari BE, FG, &c. segnerebbero similmente la projezione DE = AC, della linea AB sul piano NO. Ma DE, o AC = AB cos. A, (211). Dunque *la projezione ortografica di una linea è uguale alla stessa linea moltiplicata per il coseno della sua inclinazione al piano di projezione.*

843. Se la figura, di cui si dimanda la projezione, è un arco di circolo, e se il piano dell'arco è perpendicolare al piano di projezione; allora *il seno è la projezione ortografica dell'arco*, purchè l'origine di questo si prenda dal punto della circonferenza, da cui parte la perpendicolare che passa pel centro. Sia DFH un semicircolo, il qual si concepisca rilevato perpendicolarmente sul piano della carta, nel qual piano rimanga il solo diametro DH. Calando da ogni punto della circonferenza le perpendicolari FC, IE, &c., la serie de' punti, segnati da esse sul piano della carta, formerà il diametro DH. Ora se C è il centro, l'arco FH sarà di 90°, e la sua projezione CH sarà eguale al raggio, cioè al seno di 90°. Così CE = LI = sen.FI sarà la projezione dell'arco FI. Dunque, &c.

Fig.88

844. Che se il piano del circolo non è perpendicolare, ma inclinato al piano di projezione; allora le ordinate FC, IE, &c. cadenti sul diametro che è nel piano di projezione, faranno tutte con le loro projezioni (842) respettive CG, EK, &c. un angolo uguale all'inclinazion dei due piani, (387). Si avrà però (842), cos.*incl.* = $\frac{CG}{FC} = \frac{EK}{EI}$, &c.; e per conseguenza FC : CG :: EI : EK :: &c. Ma tale è la proprietà di un' ellissi, che le sue ordinate siano proporzionali a quelle corrispondenti di un circolo d' egual diametro. Dunque DGKH, o sia la projezione del semicircolo DFH, è la metà di un' ellissi. Ciò che si è dimostrato per la metà di un circolo, deve aver luogo, per le stesse ragioni, relativamente all' altra metà. Dunque *la projezione ortografica di un circolo inclinato è un'ellissi.*

Qualunque sia la distanza del circolo dal piano di projezione, l'effetto sarà sempre il medesimo, giacchè si potrà concepire un altro piano parallelo, il qual passi pel centro del circolo. Ne nascerà un'ellissi perfettamente uguale in ambi questi piani, giacchè le linee che determinano le due projezioni sono le stesse, salvo il loro prolungamento relativamente al piano più remoto.

845. Un circolo, veduto da lungi obliquamente, pare dunque

un'ellissi; giacchè gli oggetti inclinati e lontani si rappresentano all' occhio in projezione ortografica, cioè come situati in un piano perpendicolare ai raggi visuali. La linea BC veduta obliquamente da un punto O, a tal distanza che l' angolo O possa considerarsi come infinitamente piccolo, ci par grande quanto AB = BC cos. ABC = BC sen. C. Il primo valore è quello già trovato (842). Il secondo fa vedere che la grandezza apparente di un oggetto inclinato diminuisce proporzionatamente al seno dell' inclinazione dell' oggetto medesimo al raggio visuale. Posto dunque che DGH sia la projezione ortografica di un semicircolo DFH veduto obliquamente, tutte le ordinate CF, EI ci parranno più piccole nella proporzione ora detta. Questa ragione costante fa vedere di nuovo, che la projezione di un circolo inclinato è un' ellissi, il cui asse maggiore DH è uguale al diametro del circolo, e l'asse minore è più piccolo di questo diametro nella ragione che passa fra il seno dell' angolo d' inclinazione del circolo al raggio visuale, ed il seno totale.

Fig. 89

Fig. 90

846. Questi sono gli elementi della projezione ortografica. Essa è veramente poco usitata nella costruzione delle carte geografiche, non potendo servir senza gravi errori, se non se in quelle di poca estensione. Per esempio, sinchè FI è un piccolo arco, la differenza da esso alla sua projezione CE non è di gran conto: e però la distanza FI di due paesi F, I sul globo, può essere rappresentata senza errore sensibile sulla carta dalla distanza CE. Ma quanto più il punto I si avvicina al punto H, tanto più le aumentazioni dell'arco FI eccedono le aumentazioni corrispondenti della linea CE, e gli errori sulle distanze respettive de' paesi diventano sempre più gravi. Supponiamo IH = 60° = 2FI, sarà CE, o LI = sen. 30° = $\frac{1}{2}$CH. Dunque CE = EH; e però le distanze IH, FI, la prima delle quali è doppia della seconda sul globo, saranno rappresentate sulla carta da linee uguali.

Fig. 88

Ad onta di un tanto inconveniente, la projezione ortografica serve utilmente agli Astronomi per rappresentare e predire le circostanze

costanze degli eclissi, giacchè allora non si tratta delle distanze respettive de' luoghi, ma solamente di descrivere sopra una carta geografica le curve e le zone che abbracciano i paesi che saranno immersi nell'ombra, e quelli che osserveranno eguali, o diverse fasi. I precetti per queste operazioni non appartengono al presente Trattato, ma si trovano esposti completamente, e con la più desiderabile chiarezza, nel lib. X dell'Astronomia del Sig. de la Lande.

847. La projezione più comoda per le carte che abbracciano una gran parte del globo, e sopra tutto per li mappamondi, quella che sfigura meno la forma naturale de' continenti, è la projezione *stereografica*. Nella projezione ortografica, la superficie della sfera è rappresentata sul piano di quel circolo massimo, al qual tutti i raggi visuali sono perpendicolari, l'occhio essendo supposto in una distanza infinita dal detto piano. Nella projezione stereografica, la superficie della sfera è rappresentata ancora sul piano del medesimo circolo, ma l'occhio è supposto al polo del circolo stesso; sicchè de' raggi visuali un solo è perpendicolare al circolo, ed è quello che passa pel centro.

848. Se BFD rappresenta l'emisfero di cui si vuole la projezione, il diametro BD rappresenterà il piano di projezione, e l'occhio sarà considerato nel punto Q, supponendo CQ perpendicolare a BD, e C il centro del globo. La projezione d'ogni punto della superficie dell'emisfero BFD sarà in quel punto respettivo del piano BCD, per il qual passa ogni raggio visuale che termina all'emisfero. Così il punto S è la projezione del punto H, il punto T la projezione del punto U, la linea ST è la projezione dell'arco HU, e così discorrendo. Se si prende l'origine degli archi dal punto F che ha la sua projezione al centro, e se si riflette che $CT = \text{tang.}CQT = \text{tang.}\frac{1}{2}FU$, ne risulta che *la projezione stereografica d'ogni arco, contato dal punto che ha la projezione al centro, è uguale alla tangente della metà dell'arco stesso.* Fig. 91

849. La più bella proprietà della projezione stereografica consiste nel rappresentare con circoli tutti i circoli della sfera, grandi

Kkk

Fig.91 o piccoli, eccetto quelli solamente, nel piano de' quali l'occhio si trova (852, 860, &c.). Per esempio, il circolo, che ha per diametro la corda UH, ha per projezione un circolo che ha per diametro ST. Per ben intender ciò, fa d'uopo considerare che i raggi visuali, che vanno dal punto Q ad ogni punto del circolo che ha per diametro la corda UH, formano un cono. Questo cono essendo tagliato dal piano BCD, si tratta di provare che la sezione rappresentata da ST è circolare.

Ora l'angolo $QST = \frac{1}{2}DQ + \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}BQ + \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}QH = QUH$. Nel modo stesso si trovano eguali gli angoli T, H. Dunque i triangoli QST, QUH sono simili. Ma QUH è il triangolo per l'asse del cono avente per base il circolo del quale la retta UH è il diametro. Dunque deve essere circolare anche la base del cono del quale QST è il triangolo per l'asse; poichè questi due coni sono simili, se le loro dimensioni omologhe sono proporzionali, cioè se i loro triangoli per l'asse sono simili.

850. Se Q è uno de' poli, il piano di projezione BCD sarà l'equatore. In tal caso le projezioni de' paralleli sono circoli concentrici, e quelle de' meridiani sono linee rette.

In fatti 1°. se si prendè $FG = FU$, la projezione del parallelo che passa per li punti G, U, sarà, per le cose dette (849), un circolo descritto dal centro C col raggio $CT = CE$. Similmente la projezione del parallelo che passa pei punti K, H, posto $FK = FH$, sarà un circolo che avrà CS per raggio, e C per centro. Il punto C che è la projezione del polo F è dunque il centro di tutti i circoli che sono projezioni de' paralleli.

851. Per descrivere un parallelo qualunque sul piano di projezione, si prenderà dunque per raggio (848) la tangente della mezza distanza dal parallelo al polo. O pure, graficamente, per descrivere i paralleli, di grado in grado, o di cinque in cinque gradi, o altrimenti, si dividerà il quadrante BF, in 90 parti, o in 18 parti, o altrimenti; da ogni divisione si tirerà una retta al punto Q: le intersezioni di queste linee con la BD daranno i punti T, S, &c.

e per conseguenza i raggi CT, CS, &c. delle respettive projezioni de' paralleli.

852. 2°. Dissi (850) che le projezioni de' meridiani sono linee rette. In fatti se l'occhio è ad un polo, è dunque nel piano di tutti i meridiani, che tutti passano per li poli; non può dunque vedere la curvatura di questi circoli.

Per descrivere le projezioni de' meridiani, si consideri che BFDQB sia l'equatore, cioè il piano di projezione. Ogni diametro di questo circolo, il cui centro C è la projezione (850) di uno de' poli, sarà la projezione di un meridiano.

853. Descritti che si abbiano i meridiani, e i paralleli, non v' è più difficoltà per collocare i paesi, o le stelle, sopra un planisferio terrestre o celeste, secondo le respettive longitudini e latitudini.

Di questa projezione *polare* si è servito Tolommeo per costruire il suo Astrolabio, e Roberto di Vaugondy in certe carte della Moscovia. È più usitata ne' planisferj celesti, che nei terrestri, e sopra tutto in quelle carte, che abbracciano la metà del cielo.

854. Per descriver l'eclittica in queste carte, immaginiamoci che BQDFB sia il coluro de' solstizj, BCD il piano di projezione, F e Q i due poli dell' equatore; consideriamo un arco BU eguale all' obliquità dell' eclittica, e tiriamo il diametro RU; le sue estremità R, U saranno i due punti solstiziali, le cui projezioni sul piano BCD sono i punti T, P. Il diametro dell'eclittica sul piano di projezione è dunque PT. Ma $PT = CT + CP = \text{tang.}CQT + \text{tang.}CQP = \text{tang.}\frac{1}{2}FU + \text{tang.}\frac{1}{2}FR = \text{tang.}\frac{1}{2}FU + \text{cot.}\frac{1}{2}FU = \frac{2}{\text{sen.}FU}$, (I. 9ª). Dunque $\frac{1}{2}PT = \text{cosec.}FU = \text{sec.}BU$: e però *per descriver l'eclittica sul piano di projezione, si deve prender per raggio la secante dell' obliquità.*

Sia ora BFDQB l'equatore, cioè il piano di projezione, e siano Q, F i punti segnati 0° e 180°, che sono quelli, ne' quali l'eclittica deve tagliar l'equatore. Preso per centro ciascuno di questi punti

Fig.91 successivamente, e per raggio la secante dell' obliquità, sarà facile trovare il punto m, che è il centro dell' eclittica da descriversi.

855. Nel modo stesso, volendo delineare su un planisferio celeste la projezione dell' orizzonte di un luogo qualunque della Terra, se si considera che RU sia il diametro del detto orizzonte, Q e F i poli dell' equatore, BFDQB il meridiano del luogo di cui si tratta, sarà QR o FU l'altezza del polo, o vero la latitudine del luogo stesso. E però il raggio del circolo destinato a rappresentar l'orizzonte sarà la cosecante della latitudine. Questo circolo suol formarsi di cartone, e serve a determinare il levare ed il tramontare degli astri, sui planisferj mobili.

856. La projezione polare, della quale abbiamo dato un' idea, è la più facile di tutte: ma la più usata, principalmente pei mappamondi, è quella in cui l'occhio è supposto nell' equatore, al punto di 270° quando vuol disegnarsi il nostro emisfero, e al punto di 90° quando vuol disegnarsi l'emisfero opposto.

857. In questa projezione, che chiamerò *equatoriale*, i meridiani sono circoli egualmente che i paralleli, ed i loro raggi sul piano di projezione si trovano come segue.

Sia BFDQB l'equatore, D il punto dal qual si cominciano a contare le longitudini, Q il punto di 90° ove l'occhio s' intenda posto, e UR il diametro di un meridiano, del qual si chiede la projezione sul piano rappresentato dalla linea BD, che è in questo caso il piano del primo meridiano. Abbiamo veduto (854) che il circolo, che ha per diametro UR, ha per projezione un circolo che ha per raggio $\frac{1}{2}$PT, o cosec.FU. Ma FU $=$ QR $=$ 90° $-$ DR, e DR è la longitudine del meridiano, di cui si tratta. Dunque *nella projezione equatoriale, il raggio di un meridiano è uguale alla secante della longitudine del meridiano medesimo.*

Siccome ogni meridiano deve passar per li poli, così sarà facile trovar sulla carta il centro d'ogni meridiano, in quel modo che abbiamo indicato (854).

858. Per trovare la projezione de' paralleli, sia il piano dell' equa-

tore rappresentato dalla linea QF, l'occhio restando fermo in Q a 90° di longitudine. Il piano di projezione BCD è sempre il primo meridiano; ma i punti B, D sono i poli nella presente supposizione. I diametri de' paralleli sono linee, come GR, perpendicolari a BD. Ora la projezione stereografica di GR è PE = CP — CE = tang. $\frac{1}{2}$FR — tang. $\frac{1}{2}$FG. Ma FR = 180° — QR = 180° — FG, e FG è la latitudine del parallelo, di cui GR è il diametro. Dunque PE = cot. $\frac{1}{2}$*lat.* — tang. $\frac{1}{2}$*lat.* = 2 cot. *lat.*, (I. 38°). E però *nella projezione equatoriale, il raggio di un parallelo è uguale alla cotangente della latitudine del parallelo medesimo.*

Questa regola e la precedente (857) dispensano i Geografi da ogni calcolo, e son più semplici delle date da altri finora.

Siccome sulla circonferenza del primo meridiano, o sia del piano di projezione, si hanno sempre due punti, pe' quali passa un parallelo, così essendo noto il raggio, si troverà facilmente sul piano di projezione il centro d'ogni parallelo.

859. Se si vuol sopra un mappamondo la projezione di un orizzonte; sia Z il zenit, o il polo del detto orizzonte, Q il punto di 90° sull'equatore, o il polo del primo meridiano BCD: si avrà ZR = 90° = DQ, e per conseguenza QZ = DR. Ma QZ è (391) l'inclinazione dell'orizzonte sul piano di projezione BCD. Dunque (857) la secante di questa inclinazione è il raggio di projezione dell'orizzonte proposto: e in generale (teorema semplice e nuovo) *nella projezione stereografica della sfera, ogni circolo massimo ha per raggio di projezione la secante della sua inclinazione al piano di projezione.* Cerchiamo una formola generale per conoscer la quantità dell' inclinazione di un orizzonte sul primo meridiano. Sia P il polo, PH la sua elevazione sull'orizzonte dato MH, PM il primo meridiano, e per conseguente l'angolo P la longitudine di quel luogo, del cui orizzonte si tratta: l'angolo M sarà l'inclinazione cercata. Ora nel triangolo PMH, rettangolo in H, si ha (VI. 12°), cos.M = sen.P cos.PH. Dunque cos.*incl.* = sen.*long.* cos.*lat.* = $\frac{1}{2}$sen.(*long.* + *lat.*) + $\frac{1}{2}$sen.(*long.* — *lat.*), (II. 14°).

Fig. 92

860. Per far vedere quanto sian comode nell' applicazione le regole precedenti, sia AFR il primo meridiano veduto dal punto segnato 270° sulla circonferenza dell' equatore, e TCN lo stesso primo meridiano veduto dal punto diametralmente opposto, cioè da quello segnato 90° sulla circonferenza dell' equatore; e sia proposto di delineare e rappresentare sui detti circoli AFR, TCN, i due emisferi. Condotti per il punto di contatto de' medesimi circoli i diametri che formano una sola retta mn, s' intenda che questa sia la projezione dell' equatore, la quale esser deve una linea retta, giacchè l' occhio essendo posto nel piano di questo circolo non può vederne la curvatura. Si tirino quindi i due diametri AR, TN, perpendicolari a mn; questi saranno le projezioni de' meridiani di 90°, e di 270°, e le loro estremità saranno i poli. Se A è il polo artico, sarà T lo stesso polo: nei punti R, N sarà l' antartico.

Fig. 93

861. Ciò posto, per collocare ogni paese nel sito conveniente, fa d' uopo descrivere i circoli di longitudine e di latitudine.

Vogliasi, per esempio, descrivere il meridiano di 50°. Il raggio di questo circolo (857) è la secante di 50°, che nelle tavole vale 1,5557. Suppongo che il diametro AR della projezione vaglia 400 sopra una scala di parti eguali; bisognerà (25) moltiplicar per 200 le linee trigonometriche prese nelle tavole, e si avrà sec. 50° = $311\frac{1}{7}$ circa. Presa questa distanza sopra la scala, e fatto centro ad uno de' poli, si troverà sull' equatore il punto r, che deve servire di centro per descriver col raggio $311\frac{1}{7}$ il circolo di projezione del meridiano di 50°. ADR è la projezione della metà di questo meridiano, nella figura. Nella stessa maniera le tavole daranno il raggio di ogni altro meridiano: e non si avrà da fare alcun calcolo, se si prende per raggio della projezione una linea, che sulla scala vaglia una quantità di parti uguali, la qual sia una potenza di 10.

862. Per descrivere i circoli di latitudine, se si vuol, per esempio, averli di dieci in dieci gradi, si dividerà in 18 parti eguali ciascuno de' semicircoli terminati dai diametri AR, TN. Suppongo CN = BN = 30°, o vero a tre di dette parti; il parallelo che

passerà per li punti B, C, sarà il parallelo di 60° di latitudine. Il raggio di questo parallelo sul piano di projezione è (858) la cotangente di 60°, che presa nelle tavole, e moltiplicata per 200 (supponendo sempre di 400 parti il diametro AR della projezione), vale 115½. Presa sulla scala quest'apertura di compasso, e portata da uno de' punti B, C, sul diametro TN prolungato, si troverà il centro del parallelo da descriversi BPC.

Nel modo stesso potranno delinearsi le projezioni di tutti gli altri paralleli.

863. Veduto il modo per disegnare i mappamondi, sia ora da descriver su di essi l'orizzonte dell'emisfero illuminato dal Sole ad un dato momento; per esempio, al momento in cui Venere uscì di sopra il disco del Sole nel 1769. In quel momento il Sole stava nel piano del meridiano di 174°, e aveva 22° 36′ di declinazione boreale: donde ne segue (859) che l'inclinazione dell'orizzonte richiesto sul piano di projezione è di 84° 28′; e che la secante di 84° 28′ è il raggio di projezione del detto orizzonte. I dati palesano poi che questo circolo deve tagliar l'equatore ne' punti di 84° e di 264°, e il meridiano di 174° a 67° 24′ di latitudine australe. I primi due punti si determinano già col metodo (861), del qual basta fare uso per trovarne uno *s*, giacchè l'altro S deve essere ad eguale distanza dal centro della projezione nell'altro emisfero. Si descriverà inoltre il meridiano di 174°, e il parallelo (862) di 67° 24′, e si avrà il punto *e* d'intersezione. Con questo punto, con quello *s* di 84° sull'equatore, e con la secante di 84° 28′ per raggio, si troverà il punto che deve servir di centro per descrivere l'arco F*s*G, il qual rappresenta la metà dell'orizzonte cercato. Per descriver l'arco ISH che rappresenta l'altra metà, basta prendere NH, TI uguali a GR, AF, e fare uso del medesimo raggio adoperato per descrivere F*s*G.

Dalle costruzioni fatte si vede, che il Sole essendo in un punto K del meridiano di 174° a 22° 36′ di distanza boreale dall'equatore, l'emisfero illuminato viene ad essere FAG + ITH.

864. Abbiamo trattato della projezione stereografica polare ed equatoriale de' meridiani, de' paralleli, e degli orizzonti. Per avere la projezione stereografica di un cerchio minore, il qual non sia nè parallelo nè perpendicolare al piano di projezione, si è già veduto (849) che un cerchio minore, il cui diametro è, per esempio, la Fig. 91 corda UH, ha per projezione un circolo il quale ha per diametro ST. Resta da determinare il valore di questo diametro.

Ora $ST = CS - CT = \text{tang.} \frac{1}{2} FH - \text{tang.} \frac{1}{2} FU$. Per determinare la projezione dal diametro di un cerchio minore, obliquo al piano di projezione, bisogna dunque conoscere la distanza massima FH, e la distanza minima FU dal detto cerchio al punto F, il qual corrisponde al centro della projezione.

È poi chiaro che se il punto F è situato fra i punti H, U, allora si ha $ST = \text{tang.} \frac{1}{2} FH + \text{tang.} \frac{1}{2} FU$.

865. Per descrivere i circoli che segnano tutti i punti della Terra, i quali vedono a un dato momento l'ingresso o l'uscita di Venere, allorchè passa sul disco del Sole, il Sig. de la Lande ha proposto metodi semplici nel lib. XI della sua Astronomia, nel quale si trovano riuniti con somma chiarezza tutti i precetti, che possono desiderarsi per il calcolo, o per la rappresentazione grafica di tutte le circostanze di un Passaggio.

Non appartenendo a questo Trattato il formare un Astronomo, nè un Geografo, mi contenterò di aver dato un'idea delle due specie di projezioni, che sono le più divulgate, e nella seconda delle quali gran parte della fatica vien diminuita dalle mie formole.

866. Avevo in animo di trattar delle applicazioni della Trigonometria alla Gnomonica, ma come tutti i problemi di questa posson ridursi, e sono ridotti da diversi Autori alla risoluzione di triangoli rettilinei rettangoli, così le formole ordinarie, che ho dato per queste risoluzioni, servono a tutti i casi della Gnomonica, e non ne ho trovato alcuno, che meriti l'indagine di qualche particolar formola e soluzione.

APPENDICE.

APPENDICE.

Questo Trattato era mezzo stampato; allorchè il Sig. Ab. *de Lambre* si compiacque accordarmi la sua assistenza nella correzion delle prove. Ho profittato diverse volte dei di lui suggerimenti nel corso della stampa, ma non avendo potuto innestare alcune sue formole e regole, che sono più semplici e comode di quelle che ho date, ho pensato di farne materia di una breve Appendice. Inserirò nella medesima le correzioni degli errori scoperti, con diligente revisione, dopo la stampa, ed alcune spiegazioni: onde tutto serva a sminuire le imperfezioni di quest' Opera.

Art. 8. In questo articolo cadeva in acconcio la spiegazione del simbolo δ che ho adottato per significare *il differenziale* finito, o infinitesimo, di una quantità variabile. Ma questo nuovo segno mi fu suggerito dopo dal Sig. Didot, che con raro e spontaneo zelo ha fatto scolpire diversi nuovi caratteri, a fin che il significato de' simboli algebraici fosse chiaro ed esente da confusione.

Art. 13, lin. 5; $\frac{a}{m} : {}_{n}$ *corrige* $\frac{a}{m} : \frac{b}{n}$

Art. 32, lin. 4; $\frac{\sqrt{(RR - \cos.^2 A)}}{R \times \cos. A}$ *corrige* $\frac{R\sqrt{(RR - \cos.^2 A)}}{\cos. A}$

Art. 35, lin. 2. Aggiungo, a notizia de' principianti, che alcuni Autori prolungano il raggio al di là del centro, e così trovano la tangente dell'angolo ottuso in direzione opposta a quella dell'angolo acuto. Per esempio, se TU rappresenta la tangente di un angolo acuto TCU, TZ rappresenterà la tangente di un angolo ottuso TCM, supponendo MCZ una linea retta. Ma siccome, secondo la definizione ordinaria (7), TZ è la tangente propria dell' arco TS, così mi sembra che a rigore un angolo maggior di 90° non abbia linee trigonometriche, che gli appartengano in proprio; e poichè si dee prenderle in prestito da un altro arco, tanto vale ricorrere a quello che fornisce il seno. Del resto, Fig. 1.

LlI

purchè si pervenga a stabilire regole giuste circa i segni, non intendo disputar della preferenza di un metodo sopra l'altro.

Pag. 25, lin. 1; $\cos.120° = \cos.60°$ *corrige* $\cos.120° = -\cos.60°$

Questa equazione si può dimostrar come segue: $\cos.120° = \cos.(180° - 60°) = (54) \cos.180° \cos.60° + \text{sen}.180° \text{sen}.60° = (42) -1 \times \cos.60° + 0 \times \text{sen}.60° = -\cos.60°$.

Pag. 40, lin. 7; — sen.B) *corrige* — sen.B ×

Pag. 42, lin. 17 .... 25. Questi precetti sono relativi semplicemente alle operazioni analitiche, nelle quali gli archi si suppongono sempre minori di 90°. Si hanno molti esempj di queste operazioni (687, 692, 693, &c.).

Pag. 58, lin. 15; volori *corrige* valori

Art. 181, e 182. Si osserverà che questi moltiplici sono formati coi valori di M e di $\frac{1}{M}$ presi con 25 decimali solamente, e che per conseguenza non si può tener per sicura l'esattezza dell'ultima nota, e forse anche talvolta della penultima.

Pag. 87, lin. 12; si si conosce *corrige* si conosce

Pag. 91, lin. 10; si ha poi *corrige* si ha poi con 14 decimali

Pag. 97, lin. 9; tang.A *corrige* log.tang.A

Art. 255, lin. 8, e lin. 15; (IV. 77ª) *corrige* (III. 77ª)

Art. 301, lin. 10; a cannocchiali *corrige* di cannocchiali

Pag. 167, lin. 8. Da questa formola si perviene agevolmente, col metodo che ho tenuto (463), alla seguente che è più comoda al calcolo, e che mi fu suggerita dal Sig. Ab. de Lambre:

$$\text{sen}.\tfrac{1}{2}\text{AEP} = \sqrt{\frac{\text{sen}.\frac{1}{2}(\text{ARP} + \text{RAE} - \text{RPE})\ \text{sen}.\frac{1}{2}(\text{ARP} + \text{RPE} - \text{RAE})}{\cos.\text{RAE}\ \cos.\text{RPE}}}.$$

Fig.35 Art. 325. Il Sig. Ab. de Lambre trova l'angolo cercato EA*e*, con una sola formola, ch'egli dimostra con somma semplicità per mezzo della Trigonometria sferica. Noi dovendo in questo luogo adoperare la rettilinea, giungeremo alla stessa formola nel modo che segue.

Dal punto *r* si consideri calata sopra RE una perpendicola-

re; questa sarà parallela ed eguale ad Ee, e si avrà $Rr^2 = Ee^2 + (RE - re)^2 = Ee^2 + RE^2 + re^2 - 2RE \times re = Ee^2 + AR^2 - AE^2 + Ar^2 - Ae^2 - 2Re \times re$. Dunque $AE^2 + Ae^2 - Ee^2 = AR^2 + Ar^2 - Rr^2 - 2RE \times re$; e per conseguenza (232); $2AE \times Ae \times \cos.EAe = 2AR \times Ar \times \cos.RAr - 2RE \times re$, o vero $\cos.EAe = \frac{AR \times Ar \times \cos.RAr - RE \times re}{AE \times Ae} = \frac{\cos.RAr - \text{sen.}RAE\ \text{sen.}rAe}{\cos.RAE\ \cos.rAe}$. Applicando a questo valore di $\cos.EAe$ il metodo (463), si perviene alla formola del Sig. Ab. de Lambre, che è

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}EAe = \sqrt{\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(RAr + RAE - rAe)\ \text{sen.}\frac{1}{2}(RAr + rAe - RAE)}{\cos.RAB\ \cos.rAe}}.$$

Art. 342. Di questo problema il Sig. Ab. de Lambre dà la seguente soluzione, la quale è più breve e più comoda della mia per il calcolo.

$AD = \frac{AC \times \text{sen.}ACD}{\text{sen.}n} = \frac{AB \times \text{sen.}ABD}{\text{sen.}m}$: però sen.ABD : sen.ACD Fig.41 :: AC sen. m : AB sen. n; e per conseguenza (II. 12°), $\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(ABD + ACD)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(ABD - ACD)} = \frac{AC \times \text{sen.}m + AB \times \text{sen.}n}{AC \times \text{sen.}m - AB \times \text{sen.}n}$. Quindi, col metodo (209),

$\text{tang.}a = \frac{AB \times \text{sen.}n}{AC \times \text{sen.}m}$, e

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(ABD - ACD) = \text{tang.}\tfrac{1}{2}(ABD + ACD)\ \cot.(45^\circ + a).$$

La somma ABD + ACD è una quantità conosciuta, poichè il quadrilatero ABDC dà $ABD + ACD = 360^\circ - BAC - BDC$. Si ha dunque, col mezzo di queste formole, il valore assoluto di ABD e di ACD; dopo di che la determinazione delle distanze cercate in questo problema non patisce più difficoltà.

Quando $\text{tang.}\frac{1}{2}(ABD - ACD)$ risulti negativa, si porrà $+ \text{tang.}\frac{1}{2}(ACD - ABD)$ in vece di $- \text{tang.}\frac{1}{2}(ABD - ACD)$, (154).

Art. 358, lin. 3. Comprendo, con altri Autori, sotto il nome ge-

nerale di *caso irredutibile* tutte le equazioni del terzo grado che hanno tre radici reali. Era estraneo e infruttuoso al mio scopo l'entrar nelle distinzioni dell' Analisi sulla precisa diffinizione del Caso stesso: tanto più che alla Trigonometria è indifferente che le radici sieno razionali, o irrazionali; essa le trova con sempre uguale facilità.

Art. 361, alla fine, *adde* In generale, mA essendo il moltiplice di A, e c la circonferenza del circolo, le radici delle equazioni (125) sono, sen. A, sen. $\left(\frac{c}{m} + A\right)$, sen. $\left(\frac{2c}{m} + A\right)$, e così discorrendo, finchè si pervenga all' ultima, che è sempre sen. $\left(\frac{(m-1)c}{m} + A\right)$.

Ponendo nelle espressioni precedenti *cos.*, in vece di *sen.*, si avranno le radici delle equazioni de' coseni degli archi moltiplici.

Art. 369, lin. 18; *adde* Prendendo la somma, si ha un secondo valore di A che sodisfa all'equazione (F), la quale è implicitamente di secondo grado, come si può vedere sostituendo, per esempio, $\sqrt{(1 - \text{sen.}^2 A)}$ in vece di cos. A, indi risolvendo l' equazione coi metodi ordinarj per ricavarne il valore analitico di sen. A.

Pag. 216, lin. 9; *a corrige* A

Pag. 237, lin. 7; due formole *corrige* una formola
lin. 9; le quali non si traducano *corrige* la quale non si traduca

Art. 463, lin. 9; (398) *adde*; purchè l'arco cercato non sia composto della somma di due archi, nel qual caso esso può essere qualche volta maggior di 90°.

Art. 465, lin. 8; *per vie più laboriose.* Il metodo che ho seguito nel dimostrare le analogie di Neper è quello che ha usato il Sig. Mauduit (*Astronomie sphérique*).

Art. 488, lin. 12. In vece di questa regola, il Sig. Ab. de Lambre ha trovato quella che segue, la quale ha il vantaggio di render

nota (quando è possibile di togliere il dubbio) la specie dell'angolo cercato, avanti di calcolare il valore di esso: il che è utile sopra tutto ne' problemi (489, 490).

Un angolo è della stessa specie del lato che gli è opposto, sempre che l'un de' lati adjacenti abbia un valore intermedio inclusivamente, fra il valore del lato opposto e il valore del supplemento del lato opposto.

Per esempio, sia $AC = 50°$, e per conseguenza $180° - AC = 130°$. Se il valore di AB non sia nè minor di 50° nè maggior di 130°, l'angolo C sarà della stessa specie di AB. Fig.53

Questa regola può dimostrarsi nel modo seguente. Poichè (VII. 11*), $\cos.C = \frac{\cos.AB - \cos.BC \cos.AC}{\text{sen}.BC \text{ sen}.AC}$, è chiaro che C sarà della stessa specie di AB, sempre che sia $\cos.AB > \cos.BC \cos.AC$. Ora facilmente si scorge che questo ha luogo ogni volta che si abbia $AC = AB$, o $AC = 180° - AB$, o pure che il valore di AC stia fra quelli di AB e di $180° - AB$; giacchè, in tutti questi casi, cos.AB è o eguale o maggiore di cos.AC, e per conseguenza $\cos.AB > \cos.BC \cos.AC$.

Mi rincresce non poter inserire la dimostrazione sintetica del Sig. Ab. de Lambre, la quale esige una figura particolare: ma questa dimostrazione fa vedere 1°. che la sua regola abbraccia tutti i casi, ne' quali è possibile di togliere il dubbio; 2°. che la regola da me data gli abbraccia ugualmente.

Art. 492, lin. 5. Quì pure il Sig. Ab. de Lambre sostituisce la regola seguente, che è utile sopra tutto ne' problemi (493, 494).

Un lato è della stessa specie dell'angolo che gli è opposto, sempre che l'un degli angoli adjacenti abbia un valore intermedio inclusivamente, fra il valore dell'angolo opposto e il valore del supplemento dell'angolo opposto.

È facile dimostrare e ricavar questa regola dall'equazione (VII. 29*), a similitudine di quel che abbiam fatto quì sopra relativamente all'art. 488.

Pag. 361, lin. 20; fa $=$ *corrige* fa $a =$

Art. 771. Le due equazioni di questo articolo danno il valore di $z \backsim u$ in parti di $R = 1$, come sono gli archi della tavola (AA). Se si vuole il valore di $z \backsim u$ in secondi, conviene moltiplicare per R'' ogni coefficiente di sen.u, sen.$2u$, &c., e di sen.z, sen.$2z$, &c.

Pag. 382, lin. 13. Il Sig. Ab. de Lambre mi ha fatto riflettere che, per le stelle circompolari, a cagione delle rapide ineguaglianze di tang.*decl.*, l'impiegar la declinazione intermedia non basta a dare con ogni esattezza il valor della precessione in ascensione retta, quando si tratta di un intervallo di più anni. Si potrebbe rimediare, spezzando l'intervallo in diversi intervalli, e moltiplicando i calcoli: ma in ogni modo propongo la formola seguente, che è rigorosa, e cavata dalla prima analogia (638) cangiando le lettere, e sostituendo le denominazioni come feci (784).

$$\text{sen.}\mathit{prec.ascensione\ retta} = 2\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}\mathit{prec.\ longitudine} \times \frac{\cos.(\mathit{asc.r.} + \mathit{prec.asc.r.})}{\cos.(\mathit{long.} + \mathit{prec.long.})} \times$$
$$(\cos.\mathit{obl.}\cos.\overline{\mathit{long.} + \tfrac{1}{2}\mathit{prec.long.}}\,\cos.\mathit{asc.r.} + \text{sen.}\overline{\mathit{long.} + \tfrac{1}{2}\mathit{prec.long.}}\,\text{sen.}\mathit{asc.r.})$$

In vece di $\frac{\cos.(\mathit{asc.r.} + \mathit{prec.asc.r.})}{\cos.(\mathit{long.} + \mathit{prec.long.})}$ si può mettere, se piace più, $\frac{\cos\,\mathit{lat.}}{\cos.(\mathit{decl.} + \mathit{prec.decl.})}$.

Art. 806. Il Sig. Ab. de Lambre ha composto dodici formole nuove per trovar la distanza vera di due astri, di cui siasi osservata la distanza apparente. Prescelgo una di dette formole, che può dedursi da quella del Sig. Cav. de Borda, e riuscir più spedita nel calcolo, se non dispiace il cercar due coseni nelle tavole trigonometriche in numeri naturali.

Sia D la distanza apparente di due astri, x la distanza vera, A l'altezza apparente dell'uno, a l'altezza vera del medesimo, B l'altezza apparente dell'altro, b la sua altezza vera: la formola del Sig. Cav. de Borda è la seguente

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}x = \sqrt{\left(\cos.^2\tfrac{1}{2}\overline{a+b} - \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(A+B+D)\cos\tfrac{1}{2}(A+B\backsim D)\cos.a\cos.b}{\cos.A\ \cos.B}\right)},$$

la qual si risolve con le sole tavole trigonometriche in logaritmi, col metodo (208).

Esprimiamo questa formola così: $\text{sen.}^2 \frac{1}{2} x = \cos.^2 \frac{1}{2}(a + b) - m$; sarà (I. 7ª, 24ª), $\frac{1 - \cos.x}{2} = \frac{1 + \cos.(a+b)}{2} - \frac{2m}{2}$: e riducendo, e trasponendo, $\cos.x = 2m - \cos.(a + b)$. Restituendo in questa equazione il valore di m, si ha la formola del Sig. Ab. de Lambre, come segue:

$$\cos.x = \frac{2\cos.\frac{1}{2}(A + B + D) \cos.\frac{1}{2}(A + B \backsim D) \cos.a \cos.b}{\cos.A \cos.B} - \cos.(a + b).$$

Pag. 408, lin. 9; retta. ⊙ *corrige* retta ⊙

Art. 863. Il Sig. Ab. de Lambre mi ha fatto riflettere che si può risparmiare la descrizione de' meridiani e del parallelo. Come i punti F, G sono a distanza eguale dai poli, basta trovare questa distanza; giacchè allora con quei due punti e col raggio si ha tosto il centro del circolo da descriversi. Ora il triangolo PMH, rettangolo in H (859), dà (VI. 10ª), cot.PM = cos.P cot.PH = cos.*long.* cot.*lat.*; e PM è appunto la distanza cercata. Fig. 93 Fig. 92

Art. 864, lin. 9; dal *corrige* del

Tavola I, *formola* 42ª; $\sqrt{\frac{1 + \cos.2A}{1 - \cos.2A}}$ *corrige* $\sqrt{\frac{1 - \cos.2A}{1 + \cos.2A}}$.

Tavola (AA).

Valore degli archi circolari in parti del raggio supposto eguale all'unità:

Vedi (146).

Arco	Valore	Arco	Valore
1° =	0,017453 292519 943295 769236908	45° =	0,785398 163397 448309 615660846
2	0,034906 585039 886591 538473815	46	0,802851 455917 391605 384897754
3	0,052359 877559 829887 307710723	47	0,820304 748437 334901 154134661
4	0,069813 170079 773183 076947631	48	0,837758 040957 278196 923371569
5	0,087266 462599 716478 846184538	49	0,855211 333477 221492 692608477
6	0,104719 755119 659774 615421446	50	0,872664 625997 164788 461845384
7	0,122173 047639 603070 384658354	51	0,890117 918517 108084 231082292
8	0,139626 340159 546366 153895261	52	0,907571 211037 051380 000319200
9	0,157079 632679 489661 923132169	53	0,925024 503556 994675 769556107
10	0,174532 925199 432957 692369077	54	0,942477 796076 937971 538793015
11	0,191986 217719 376253 461605985	55	0,959931 088596 881267 308029923
12	0,209439 510239 319549 230842892	56	0,977384 381116 824563 077266830
13	0,226892 802759 262845 000079800	57	0,994837 673636 767858 846503738
14	0,244346 095279 206140 769316708	58	1,012290 966156 711154 615740646
15	0,261799 387799 149436 538553615	59	1,029744 258676 654450 384977553
16	0,279252 680319 092732 307790523	60	1,047197 551196 597746 154214461
17	0,296705 972839 036028 077027431	61	1,064650 843716 541041 923451369
18	0,314159 265358 979323 846264338	62	1,082104 136236 484337 692688276
19	0,331612 557878 922619 615501246	63	1,099557 428756 427633 461926184
20	0,349065 850398 865915 384738154	64	1,117010 721276 370929 231162092
21	0,366519 142918 809211 153975061	65	1,134464 013796 314225 000399000
22	0,383972 435438 752506 923211969	66	1,151917 306316 257520 769635907
23	0,401425 727958 695802 692448877	67	1,169370 598836 200816 538872815
24	0,418879 020478 639098 461685784	68	1,186823 891356 144112 308109723
25	0,436332 312998 582394 230922692	69	1,204277 183876 087408 077346630
26	0,453785 605518 525690 000159600	70	1,221730 476396 030703 846583538
27	0,471238 898038 468985 769396507	71	1,239183 768915 973999 615820446
28	0,488692 190558 412281 538633415	72	1,256637 061435 917295 385057353
29	0,506145 483078 355577 307870323	73	1,274090 353955 860591 154294261
30	0,523598 775598 298873 077107231	74	1,291543 646475 803886 923531169
31	0,541052 068118 242168 846344138	75	1,308996 938995 747182 692768076
32	0,558505 360638 185464 615581046	76	1,326450 231515 690478 462004984
33	0,575958 653158 128760 384817954	77	1,343903 524035 633774 231241892
34	0,593411 945678 072056 154054861	78	1,361356 816555 577070 000478799
35	0,610865 238198 015351 923291769	79	1,378810 109075 520365 769715707
36	0,628318 530717 958647 692528677	80	1,396263 401595 463661 538952615
37	0,645771 823237 901943 461765584	81	1,413716 694115 406957 308189522
38	0,663225 115757 845239 231002492	82	1,431169 986635 350253 077426430
39	0,680678 408277 788535 000239400	83	1,448623 279155 293548 846663338
40	0,698131 700797 731830 769476307	84	1,466076 571675 236844 615900246
41	0,715584 993317 675126 538713215	85	1,483529 864195 180140 385137153
42	0,733038 285837 618422 307950123	86	1,500983 156715 123436 154374061
43	0,750491 578357 561718 077187030	87	1,518436 449235 066731 923610969
44	0,767944 870877 505013 846423938	88	1,535889 741755 010027 692847876

89° =

89° =	1,553343 034274 953323 462084784	99° =	1,727875 959474 386281 154453861
90	1,570796 326794 896619 231321692	100	1,745329 251994 329576 923690769
91	1,588249 619314 839915 000558599	120	2,094395 102393 195492 308428922
92	1,605702 911834 783210 769795507	150	2,617993 877991 494365 385536153
93	1,623156 204354 726506 539032415	180	3,141592 653589 793238 462643383
94	1,640609 496874 669802 308269322	210	3,665191 429188 092111 539750614
95	1,658062 789394 613098 077506230	240	4,188790 204786 390984 616857844
96	1,675516 081914 556393 846743138	270	4,712388 980384 689857 693960075
97	1,692969 374434 499689 615980045	330	5,759586 531581 287603 848179536
98	1,710422 666954 442985 385216953	360	6,283185 307179 586476 925286767

1′ =	0,000290 888208 665721 596153948	1″ =	0,000004 848136 811095 359935899
2	0,000581 776417 331443 192307897	2	0,000009 696273 622190 719871798
3	0,000872 664625 997164 788461845	3	0,000014 544410 433286 079807697
4	0,001163 552834 662886 384615794	4	0,000019 392547 244381 439743597
5	0,001454 441043 328607 980769742	5	0,000024 240684 055476 799679496
6	0,001745 329251 994329 576923691	6	0,000029 088820 866572 159615395
7	0,002036 217460 660051 173077639	7	0,000033 936957 677667 519551294
8	0,002327 105669 325772 769231588	8	0,000038 785094 488762 879487193
9	0,002617 993877 991494 365385536	9	0,000043 633231 299858 239423092
10	0,002908 882086 657215 961539485	10	0,000048 481368 110953 599358991
20	0,005817 764173 314431 923078969	20	0,000096 962736 221907 198717983
30	0,008726 646259 971647 884618454	30	0,000145 444104 332860 798076974
40	0,011635 528346 628863 846157938	40	0,000193 925472 443814 397435966
50	0,014544 410433 286079 807697423	50	0,000242 406840 554767 996794957
60	0,017453 292519 943295 769236908	60	0,000290 888208 665721 596153948

Giunte all'Errata delle Tavole di Logaritmi stampate in Parigi, presso Desaint, 1768.; 1 *vol.* in-12. Vedi (168).

Siccome le pagine di queste Tavole non hanno il consueto numero in testa che le distingua l'una dall'altra, così per citarle si è preso l'espediente, per la Tavola de' Logaritmi de' seni, tangenti, &c., d'indicare i gradi e minuti del primo seno della pagina, dove trovasi l'errore scoperto.

Similmente le pagine della Tavola de' Logaritmi de' numeri sono citate per via del numero dal quale incominciano.

Errata della Tavola de' Logaritmi de' seni, tangenti, etc.

1°. seno della pagina.	Colonna.	Errori.	Correzioni.
Sin. 5° 30′	6ª	*Tang.* 4	*Tang.* 84
9 0	4	9 . 299713	9 . 199713
10 30	4	6 . 283907	9 . 283907
	7	9 . 691971	9 . 991971
11 30	4	9 . 326753	9 . 326853
17 30	6	0 . 487765	0 . 497765
20 30	5	0 . 642	0 . 641

10. seno della pagina.	Colonna.	Errori.	Correzioni.
sin.23° 30'	2ª	9.906179	9.606179
29 30	2	9.964342	9.694342
30 0		IV. X. 20	IV. X. 0
30 30	6	Cotang. 10	Cotang. 30
31 30		VI. X. 1	IV. X. 1
33 0	3, 4ª casella	0.323	0.322
33 30		VI. X. 26	IV. X. 26
39 0	7	sin. 51	sin. 50
42 0	4	9.954447	9.954437
42 30		I. VII	I. VII. 17

Si aggiunga un' unità all' ultima nota de' logaritmi di cos. 17° 13', di cot. 31° 27', di tang. 38° 28' e di tang. 38° 47'.

Errata della Tavola de' Logaritmi de' numeri naturali.

1º numero della pagina.	Colonna.	Errori.	Correzioni.
810	8ª	0.14' 0"	0.14' 30"
900	6	457	458
		454	455
990	3	435	436
	6	421	422
1530	3, 1ª casella	283	284
	2ª casella		283
1890	3	288	228
	5	3.280035	3.290035
2250	7	2339	2329
4320	2	0.12' 0"	1. 12' 0"
4590	8	0.17' 30"	1. 17' 30"
4770	1	4883	4783
5040	6	65	85
5400	7	5463	5473
5580	2	1. 33' 30"	1. 33' 0"
5670	7	5938	5738
6210	4	6279	6269
7110	1	7233	7133
8010	1	8012	8022
	8	9.908431	3.908431
8190	1	8211	8212
11070	2	5.044696	4.044696
	6	Log. diff. 30	Log. diff. 39
11880	3	11933	11913
11970	5	11052	12052
12240	5	11310	12310
14850	5	14239	14939
16830	6	4.238323	4.228323

Si aggiunga un' unità all' ultima nota de' Logaritmi de' numeri seguenti: 252, 450, 451, 531, 646, 13267, 15097, 15668.

Si tolga un' unità dall' ultima nota de' Logaritmi de' numeri seguenti: 1623, 2692, 6545, 17509, 19116.

Ciascuna delle differenze, 343, 261, 221, 217, 183, 175, de' Logaritmi de' numeri deve esser portata avanti di una casella.

Tavola (BB).

Logaritmi de' numeri primi, dal 2 fino al 1283. Vedi (190).

Le caratteristiche sono omesse in questa Tavola.

Num.	Logaritmi.			
2	30102	99956	63981	19521
3	47712	12547	19662	43730
5	69897	00043	36018	80479
7	84509	80400	14256	83071
11	04139	26851	58225	04075
13	11394	33523	06836	76921
17	23044	89213	78273	92854
19	27875	36009	52828	96154
23	36172	78360	17592	87887
29	46239	79978	98956	08733
31	49136	16938	34272	67967
37	56820	17240	66994	99681
41	61278	38567	19735	49451
43	63346	84555	79586	52641
47	67209	78579	35717	46441
53	72427	58696	00789	04563
59	77085	20116	42144	19026
61	78532	98350	10767	03389
67	82607	48027	00826	43415
71	85125	83487	19075	28609
73	86332	28601	20455	90107
79	89762	70912	90441	42799
83	91907	80923	76073	90383
89	94939	00066	44912	78472
97	98677	17342	66244	85178
101	00432	13737	82642	57428
103	01283	72247	05172	20517
107	02938	37776	85209	64083
109	03742	64979	40623	63520
113	05307	84434	83419	72280
127	10380	37209	55956	86425
131	11727	12956	55764	26081
137	13672	05671	56406	76856
139	14301	48002	54095	08046
149	17318	62684	12274	03826
151	17897	69472	93169	43687
157	19589	96524	09233	73676
163	21218	76044	03957	80764
167	22271	64711	47583	27998
173	23804	61031	28795	41456
179	25285	30309	79893	16957
181	25767	85748	69184	51029
191	28103	33672	47727	53764
193	28555	73090	07773	76060

Num.	Logaritmi.			
197	29446	62261	61592	92737
199	29885	30764	09706	65010
211	32428	24552	97692	66508
223	34830	48630	48160	67348
227	35602	58571	93122	72010
229	35983	54823	39887	99413
233	36735	59210	26018	97219
239	37839	79009	48137	68500
241	38201	70425	74868	38408
251	39967	37214	81038	13934
257	40993	31233	31294	53716
263	41995	57484	89757	86897
269	42975	22800	02407	98009
271	43296	92908	74405	72952
277	44247	97690	64448	55378
281	44870	63199	05079	89286
283	45178	64355	24290	23556
293	46686	76203	54109	45624
307	48713	83754	77186	48475
311	49276	03890	26837	50555
313	49554	43375	46448	48481
317	50105	92622	17751	49455
331	51982	79937	75718	73861
337	52762	99008	71338	62619
347	54032	94747	90873	71854
349	54282	54269	59179	89654
353	54777	47053	87822	56550
359	55509	44485	78319	14782
367	56466	60642	52089	33799
373	57170	88318	08687	60551
379	57863	92099	68072	34193
383	58319	87739	68622	74038
389	58994	96013	25707	73624
397	59879	05067	63115	06588
401	60314	43726	20182	30654
409	61172	33080	07341	80361
419	62221	40229	66295	30985
421	62428	20958	35668	30744
431	63447	72701	60731	60075
433	63648	78963	53365	44270
439	64246	45202	42121	37063
443	64640	37262	23069	56023
449	65224	63410	03323	17492
457	65991	62000	69850	22235

Num.	Logaritmi.			
461	66370	09253	89648	14507
463	66558	09910	17953	13567
467	66931	68805	66112	16309
479	68033	55134	14563	22010
487	68752	89612	14634	33246
491	69108	14921	22968	47275
499	69810	05456	23389	91417
503	70156	79850	55927	39710
509	70671	77823	36758	74657
521	71683	77232	99524	47424
523	71850	16888	67274	23926
541	73319	72651	06569	43688
547	73798	73263	33430	77381
557	74585	51951	73728	90044
563	75050	83948	51346	22909
569	75511	22663	95071	17229
571	75663	61082	45848	05004
577	76117	58131	55731	42849
587	76863	81012	47614	47606
593	77305	46933	64262	60640
599	77742	68223	89311	37983
601	77887	44720	02739	52089
607	78318	86910	75257	58096
613	78746	04745	18415	03774
617	79028	51640	33241	68205
619	79169	06490	20117	97680
631	80002	93592	44134	31302
641	80685	80295	18817	42225
643	80821	09729	24222	07249
647	81090	42806	68700	38446
653	81491	31812	75073	92143
659	81888	54145	94009	86128
661	82020	14594	85640	23665
673	82801	50642	23976	84648
677	83058	86686	85144	31601
683	83442	07036	81532	56340
691	83947	80473	74198	40758
701	84571	80179	66658	65706
709	85064	62351	83066	54285
719	85672	88903	82882	60777
727	86153	44108	59037	83621
733	86510	39746	41127	94317
739	86864	44383	94825	73669
743	87098	88137	60575	29242
751	87563	99370	04168	38975
757	87909	58795	00072	75709
761	88138	46567	70572	82637
769	88592	63598	01431	03960
773	88817	94939	18324	90897
787	89597	47323	59064	55847
797	90145	83213	96112	34727
809	90794	85216	12272	30432
811	90902	08542	11156	03069
821	91434	31571	19440	77180
823	91539	98352	12269	83977
827	91750	55095	52546	67071
829	91855	45305	50273	55312
839	92376	19608	28700	27500
853	93094	90311	67523	03000
857	93298	08219	23198	16429
859	93399	31638	31242	30263
863	93601	07957	15209	59266
877	94299	95933	66040	51823
881	94497	59084	12047	91274
883	94596	07035	77568	58562
887	94792	36198	31726	39220
907	95760	72870	60095	25585
911	95951	83769	72998	24763
919	96331	55113	86111	26520
929	96801	57139	93641	76318
937	97173	95908	87778	26303
941	97358	96234	27256	90834
947	97634	99790	03273	41875
953	97909	29006	38326	40853
967	98542	64740	83001	67360
971	98721	92299	08004	86280
977	98989	45637	18773	07091
983	99255	35178	32135	62275
991	99607	36544	85275	32836
997	99869	51583	11655	71988
1009	00389	11662	36910	52172
1013	00560	94453	60280	42845
1019	00817	41840	06426	39490
1021	00902	57420	86910	24725
1031	01325	86652	83516	54691
1033	01410	03215	19620	57904
1039	01661	55475	57177	41240
1049	02077	54881	93557	85991
1051	02160	27160	28242	22008
1061	02571	53839	01340	66612
1063	02653	32645	23296	75697
1069	02897	77052	08778	01749
1087	03622	95440	86294	53993
1091	03782	47505	88341	87761
1093	03862	01619	49702	79227
1097	04020	66275	74711	13222

Num.	Logaritmi.				Num.	Logaritmi.			
1103	04257	55124	40190	59866	1201	07954	30074	02906	04893
1109	04493	15461	49160	06471	1213	08386	08008	66572	97420
1117	04805	31731	15609	05702	1217	08529	05782	30064	98886
1123	05037	97562	61457	78469	1223	08742	64570	36285	46333
1129	05269	39419	24967	86114	1229	08955	18828	86454	08564
1151	06107	53236	29791	80185	1231	09025	80529	31316	30782
1153	06182	93072	94699	02164	1237	09236	96996	29120	65363
1163	06557	97147	28448	41138	1249	09656	24383	74135	51203
1171	06855	68950	72363	12991	1259	10002	57301	07862	59756
1181	07224	98976	13514	79908	1277	10619	08972	63415	28661
1187	07445	07189	54591	22046	1279	10687	05444	78653	92264
1193	07664	04436	70341	87278	1283	10822	66563	74928	50365

Fattori de' numeri composti che non sono divisibili per 2, nè per 3, nè per 5.

Num.	Fattori.	Num.	Fattori.	Num.	Fattori.	Num.	Fattori.	Num.	Fattori.
49 =	7 . 7	377 =	13 . 29	637 =	7 . 7 . 13	871 =	13 . 67	1111 =	11 . 101
77 =	7 . 11	391 =	17 . 23	649 =	11 . 59	889 =	7 . 127	1121 =	19 . 59
91 =	7 . 13	403 =	13 . 31	667 =	23 . 29	893 =	19 . 47	1127 =	7 . 7 . 23
119 =	7 . 17	407 =	11 . 37	671 =	11 . 61	899 =	29 . 31	1133 =	11 . 103
121 =	11 . 11	413 =	7 . 59	679 =	7 . 97	901 =	17 . 53	1139 =	17 . 67
133 =	7 . 19	427 =	7 . 61	689 =	13 . 53	913 =	11 . 83	1141 =	7 . 163
143 =	11 . 13	437 =	19 . 23	697 =	17 . 41	917 =	7 . 131	1147 =	31 . 37
161 =	7 . 23	451 =	11 . 41	703 =	19 . 37	923 =	13 . 71	1157 =	13 . 89
169 =	13 . 13	469 =	7 . 67	707 =	7 . 101	931 =	7 . 7 . 19	1159 =	19 . 61
187 =	11 . 17	473 =	11 . 43	713 =	23 . 31	943 =	23 . 41	1169 =	7 . 167
203 =	7 . 29	481 =	13 . 37	721 =	7 . 103	949 =	13 . 73	1177 =	11 . 107
209 =	11 . 19	493 =	17 . 29	731 =	17 . 43	959 =	7 . 137	1183 =	7 . 13 . 13
217 =	7 . 31	497 =	7 . 71	737 =	11 . 67	961 =	31 . 31	1189 =	29 . 41
221 =	13 . 17	511 =	7 . 73	749 =	7 . 107	973 =	7 . 139	1199 =	11 . 109
247 =	13 . 19	517 =	11 . 47	763 =	7 . 109	979 =	11 . 89	1207 =	17 . 71
253 =	11 . 23	527 =	17 . 31	767 =	13 . 59	989 =	23 . 43	1211 =	7 . 173
259 =	7 . 37	529 =	23 . 23	779 =	19 . 41	1001 =	7 . 11 . 13	1219 =	23 . 53
287 =	7 . 41	533 =	13 . 41	781 =	11 . 71	1003 =	17 . 59	1241 =	17 . 73
289 =	17 . 17	539 =	7 . 7 . 11	791 =	7 . 113	1007 =	19 . 53	1243 =	11 . 113
299 =	13 . 23	551 =	19 . 29	793 =	13 . 61	1027 =	13 . 79	1247 =	29 . 43
301 =	7 . 43	553 =	7 . 79	799 =	17 . 47	1037 =	17 . 61	1253 =	7 . 179
319 =	11 . 29	559 =	13 . 43	803 =	11 . 73	1043 =	7 . 149	1261 =	13 . 97
323 =	17 . 19	581 =	7 . 83	817 =	19 . 43	1057 =	7 . 151	1267 =	7 . 181
329 =	7 . 47	583 =	11 . 53	833 =	7 . 7 . 17	1067 =	11 . 97	1271 =	31 . 41
341 =	11 . 31	589 =	19 . 31	841 =	29 . 29	1073 =	29 . 37	1273 =	19 . 67
343 =	7 . 7 . 7	611 =	13 . 47	847 =	7 . 11 . 11	1079 =	13 . 83		
361 =	19 . 19	623 =	7 . 89	851 =	23 . 37	1081 =	23 . 47		
371 =	7 . 53	629 =	17 . 37	869 =	11 . 79	1099 =	7 . 157		

FINE.

AVVISO AL LEGATORE.

Le sei Tavole delle figure devono esser poste quì in fine. Le nove Tavole divise in dodici fogli si collocheranno pur quì, avanti o dopo quelle delle figure.

TRIGONOMETRIA . Fig. 1 a 27

Fig. 27

29
30
32
33
35
34
41
39
38
42
Fig. 42

44
45
47
49
50
51
54
56
57

59

60

61

63

62

65

66

69

67

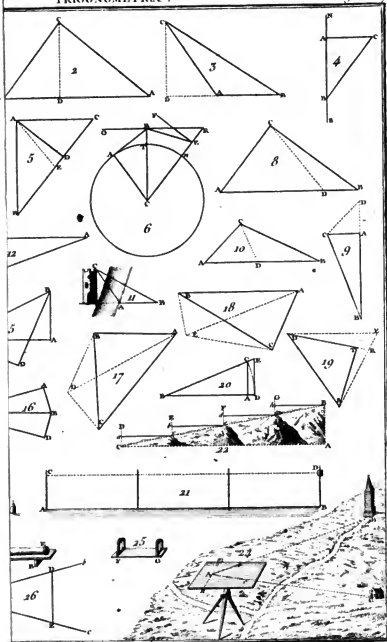
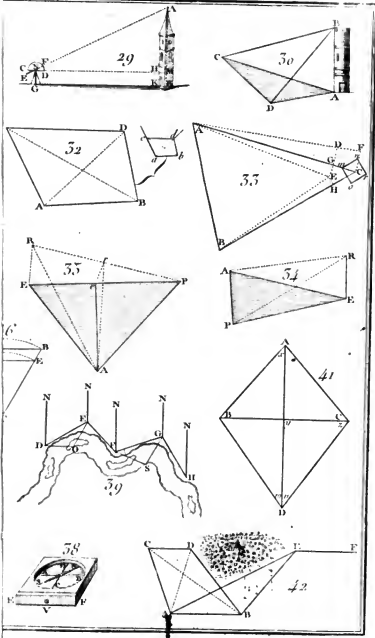
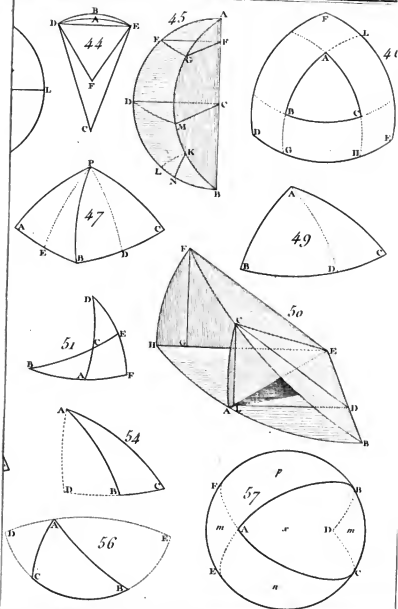
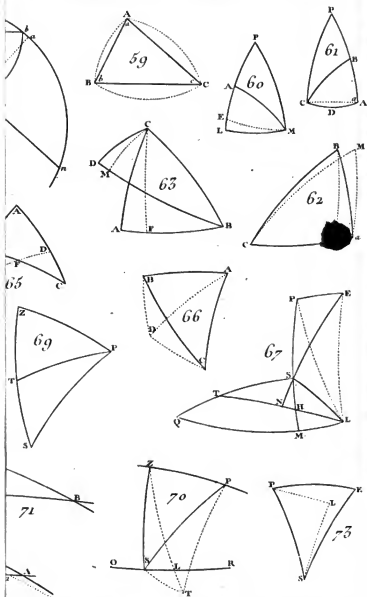
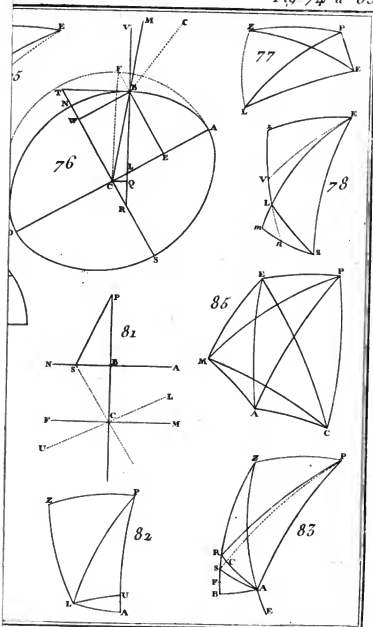
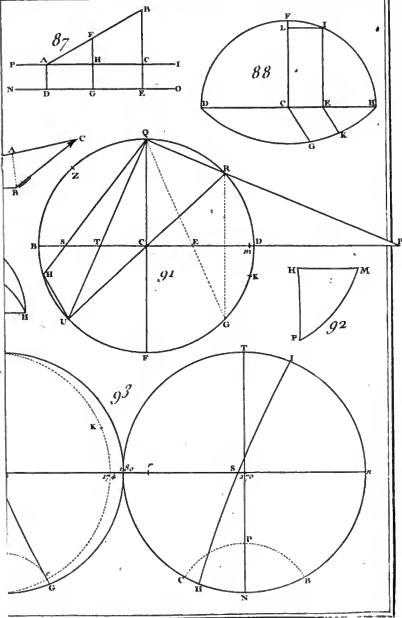
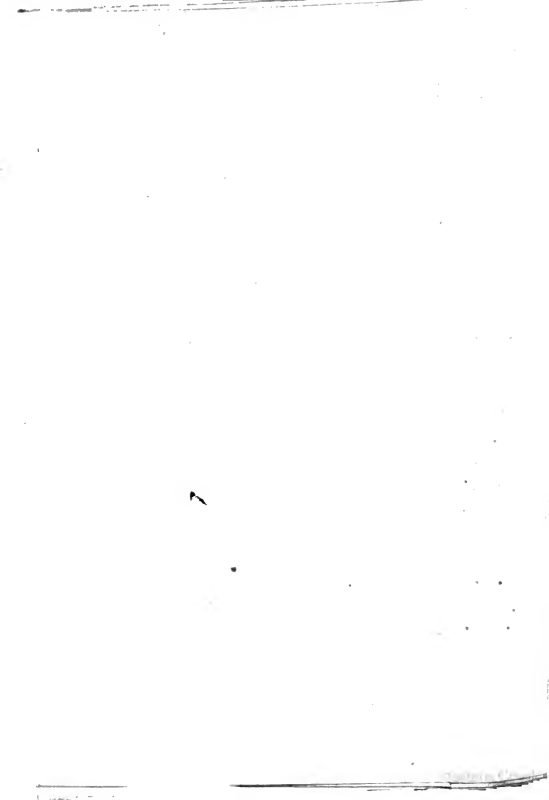
71

70

73

E
5
V
M
C
F
B
T
N
W
A
76
E
L
C
Q
R
D
S
Z
P
77
E
L
Z
E
V
78
L
m
n
S
E
P
85
M
A
C
P
81
N
S
B
A
L
C
F
M
U
Z
P
82
L
U
A
Z
P
83
R
C
S
F
B
A
E

Fig 85.

87
B
F
P
A
H
C
I
N
D
G
E
O
88
F
L
I
D
C
E
H
G
K
Q
C
A
B
Z
R
B
S
T
C
E
D
P
m
H
91
K
U
G
F
H
M
92
P
T
I
93
K
180
174
S
270
n
P
C
H
N
B
G

EE TRIGONOMETRICHE. *Vedi la Spiegazione* (128).

li cos.A.	*Valori di* TANG.A.
	31ª $\frac{\text{sen.A}}{\text{cos.A}}$, (21).
22).	32ª $\frac{1}{\text{cot.A}}$, (22).
, (28).	33ª $\sqrt{\left(\frac{1}{\text{cos.}^2\text{A}} - 1\right)}$, (29).
9).	34ª $\frac{\text{sen.A}}{\sqrt{(1-\text{sen.}^2\text{A})}}$, (32).
1).	35ª $\frac{\sqrt{(1-\text{cos.}^2\text{A})}}{\text{cos.A}}$, (32).
.$^2\frac{1}{2}$A, (64).	36ª $\frac{2\ \text{tang.}\frac{1}{2}\text{A}}{1-\text{tang.}^2\frac{1}{2}\text{A}}$, (65).
, (66).	37ª $\frac{2\,\text{cot.}\frac{1}{2}\text{A}}{\text{cot.}^2\frac{1}{2}\text{A}-1}$, (65).
(66).	38ª $\frac{2}{\text{cot.}\frac{1}{2}\text{A}-\text{tang.}\frac{1}{2}\text{A}}$, (68).
6).	39ª cot.A — 2 cot.2A, (69).
.	40ª $\frac{1-\text{cos.2A}}{\text{sen.2A}}$, (70).
(75).	41ª $\frac{\text{sen.2A}}{1+\text{cos.2A}}$, (71).
(79).	42ª $\sqrt{\frac{1+\text{cos.2A}}{1-\text{cos.2A}}}$, (72).
ot.$(45°+\frac{1}{2}$A), (109).	
) cos.(45°∽½A), (122).	
- cos.(60°∽A), (111).	43ª $\frac{\text{tang.}(45°+\frac{1}{2}\text{A})-\text{tang.}(45°-\frac{1}{2}\text{A})}{2}$, (103).

Vec

sen.(A

sen.(A

cos.(A

cos.(A

=2sen

=2cos

B =

= sen. / sen.

=2sen

=2sen

B =

= sen. / sen.

sen.(A

B=co

g.²B=

A= sen.

Vedi la Spiegazione (128).

$\text{en.}(A+B)+\frac{1}{2}\text{sen.}(A-B)$, (95).

$\text{en.}(A+B)-\frac{1}{2}\text{sen.}(A-B)$, (96).

$\text{os.}(A\backsim B)-\frac{1}{2}\cos.(A+B)$, (98).

$\text{os.}(A+B)+\frac{1}{2}\cos.(A\backsim B)$, (97).

$2\,\text{sen.}\frac{1}{2}(A+B)\cos.\frac{1}{2}(A\backsim B)$, (80).

$2\cos.\frac{1}{2}(A+B)\cos.\frac{1}{2}(A\backsim B)$, (83).

$= \frac{\text{sen.}(A+B)}{\cos.A\cos.B}$, (89).

$= \frac{\text{sen.}(A+B)}{\text{sen.}A\ \text{sen.}B}$, (90).

$2\,\text{sen.}\frac{1}{2}(A-B)\cos.\frac{1}{2}(A+B)$, (81).

$2\,\text{sen.}\frac{1}{2}(A-B)\,\text{sen.}\frac{1}{2}(A+B)$, (85).

$= \frac{\text{sen.}(A-B)}{\cos.A\cos.B}$, (91).

$= \frac{\text{sen.}(A-B)}{\text{sen.}A\ \text{sen.}B}$, (92).

$\text{en.}(A-B)\ \text{sen.}(A+B)$, (84).

$= \cos.(A\backsim B)\cos.(A+B)$, (82).

$B = \frac{\text{sen.}(A-B)\,\text{sen.}(A+B)}{\cos.^2A\cos.^2B}$, (93).

$= \frac{\text{sen.}(A-B)\,\text{sen.}(A+B)}{\text{sen.}^2A\ \text{sen.}^2B}$, (94).

DIFFERENZIALI FINITI DELLE LINEE TRIGONOMETRICHE.

Vedi l'Avvertimento (143, al fine).

30° $\delta\text{sen.}B = 2\,\text{sen.}\frac{1}{2}\delta B\cos.(B+\frac{1}{2}\delta B)$, (139).

31° $-\delta\cos.B = 2\,\text{sen.}\frac{1}{2}\delta B\,\text{sen.}(B+\frac{1}{2}\delta B)$, (139).

32° $\delta\text{tang.}B = \frac{\text{sen.}\delta B}{\cos.B\cos.(B+\delta B)}$, (139).

33° $-\delta\cot.B = \frac{\text{sen.}\delta B}{\text{sen.}B\,\text{sen.}(B+\delta B)}$, (139).

34° $\left\{\begin{matrix}\delta(\text{sen.}^2B)=\\ -\delta(\cos.^2B)=\end{matrix}\right\}$ $\text{sen.}\delta B\,\text{sen.}(2B+\delta B)$, (142)

35° $\delta(\text{tang.}^2B) = \frac{\text{sen.}\delta B\,\text{sen.}(2B+\delta B)}{\cos.^2B\cos.^2(B+\delta B)}$, (142).

36° $-\delta(\cot.^2B) = \frac{\text{sen.}\delta B\,\text{sen.}(2B+\delta B)}{\text{sen.}^2B\,\text{sen.}^2(B+\delta B)}$, (142).

Differenziali infinitesimi nella forma ordinaria.

37° $\delta\text{sen.}B = \delta B\cos.B$, (140).

38° $-\delta\cos.B = \delta B\,\text{sen.}B$, (140).

39° $\delta\text{tang.}B = \frac{\delta B}{\cos.^2B}$, (140).

40° $-\delta\cot.B = \frac{\delta B}{\text{sen.}^2B}$, (140).

41° $\left\{\begin{matrix}\delta(\text{sen.}^2B)=\\ -\delta(\cos.^2B)=\end{matrix}\right\}$ $2\delta B\,\text{sen.}B\cos.B$, (143).

42° $\delta(\text{tang.}^2B) = \frac{2\delta B\ \text{tang.}B}{\cos.^2B}$, (143).

43° $-\delta(\cot.^2B) = \frac{2\delta B\ \cot.B}{\text{sen.}^2B}$, (143).

ngolo rettilineo ABC, del qual siano date tre parti.

mostrazioni (235).

AC	*Valori di* BC
	19ª $\frac{AC \text{ sen.}A}{\text{sen.}B}$
	20ª $\frac{AB \text{ sen.}A}{\text{sen.}C}$
	21ª $\frac{AC}{\text{cos.}C + \text{sen.}C \text{ cot.}A}$
	22ª $\frac{AB}{\text{cos.}B + \text{sen.}B \text{ cot.}A}$
sen.A cot.C	23ª $AC \text{ cos.}C + AC \text{ sen.}C \text{ cot.}B$
en.C cot.A	24ª $AB \text{ cos.}B + AB \text{ sen.}B \text{ cot.}C$
2BC × AB cos.B)	25ª $\sqrt{(AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \text{ cos.}A)}$
C² — AB² sen.²A)	26ª $AC \text{ cos.}C \pm \sqrt{(AB^2 - AC^2 \text{ sen.}^2 C)}$
B² — BC² sen.²C)	27ª $AB \text{ cos.}B \pm \sqrt{(AC^2 - AB^2 \text{ sen.}^2 B)}$

cos.A	*Valori di* TANG.A
	46ª $\frac{BC \text{ sen.}C}{\pm \sqrt{(AB^2 - BC^2 \text{ sen.}^2 C)}}$
	47ª $\frac{BC \text{ sen.}B}{\pm \sqrt{(AC^2 - BC^2 \text{ sen.}^2 B)}}$
	48ª $-\text{tang.}(B + C)$
os.B cos.C	49ª $\frac{\text{tang.}B + \text{tang.}C}{\text{tang.}B \text{ tang.}C - 1}$
C / × AC cos.C)	50ª $\frac{BC \text{ sen.}C}{AC - BC \text{ cos.}C}$
B / × AB cos.B)	51ª $\frac{BC \text{ sen.}B}{AB - BC \text{ cos.}B}$
	52ª $\pm \sqrt{\left(\frac{2AB \times AC}{AB^2 + AC^2 - BC^2}\right)^2 - 1}$
B² — AC² sen.²C)	53ª $\frac{AC \text{ cos.}C \pm \sqrt{(AB^2 - AC^2 \text{ sen.}^2 C)}}{AC \text{ sen.}C \mp \text{cot.}C \sqrt{(AB^2 - AC^2 \text{ sen.}^2 C)}}$
² — AB² sen.²B)	54ª $\frac{AB \text{ cos.}B \pm \sqrt{(AC^2 - AB^2 \text{ sen.}^2 B)}}{AB \text{ sen.}B \mp \text{cot.}B \sqrt{(AC^2 - AB^2 \text{ sen.}^2 B)}}$

Continua la Tavola nel foglio seguente.

Valori di cos.B		*Valori di* TANG.B
$\frac{\pm\sqrt{(BC^2 - AC^2\,\text{sen.}^2A)}}{BC}$	73ª	$\frac{AC\,\text{sen.}A}{\pm\sqrt{(BC^2 - AC^2\,\text{sen.}^2A)}}$
$\frac{\pm\sqrt{(AB^2 - AC^2\,\text{sen.}^2C)}}{AB}$	74ª	$\frac{AC\,\text{sen.}C}{\pm\sqrt{(AB^2 - AC^2\,\text{sen.}^2C)}}$
$-\cos.(A + C)$	75ª	$-\text{tang.}(A + C)$
$\text{sen.}A\,\text{sen.}C - \cos.A\cos.C$	76ª	$\frac{\text{tang.}A + \text{tang.}C}{\text{tang.}A\,\text{tang.}C - 1}$
$\frac{AB - AC\cos.A}{\sqrt{(AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC\cos.A)}}$	77ª	$\frac{AC\,\text{sen.}A}{AB - AC\cos.A}$
$\frac{BC - AC\cos.C}{\sqrt{(BC^2 + AC^2 - 2BC \times AC\cos.C)}}$	78ª	$\frac{AC\,\text{sen.}C}{BC - AC\cos.C}$
$\frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2BC \times AB}$	79ª	$\pm\sqrt{\left(\frac{2BC \times AB}{BC^2 + AB^2 - AC^2}\right)^2 - 1}$
$\frac{AB\,\text{sen.}^2A \mp \cos.A\sqrt{(BC^2 - AB^2\,\text{sen.}^2A)}}{BC}$	80ª	$\frac{AB\cos.A \pm \sqrt{(BC^2 - AB^2\,\text{sen.}^2A)}}{AB\,\text{sen.}A \mp \cot.A\sqrt{(BC^2 - AB^2\,\text{sen.}^2A)}}$
$\frac{BC\,\text{sen.}^2C \mp \cos.C\sqrt{(AB^2 - BC^2\,\text{sen.}^2C)}}{AB}$	81ª	$\frac{BC\cos.C \pm \sqrt{(AB^2 - BC^2\,\text{sen.}^2C)}}{BC\,\text{sen.}C \mp \cot.C\sqrt{(AB^2 - BC^2\,\text{sen.}^2C)}}$

Valori di cos.C		*Valori di* TANG.C
$\frac{\pm\sqrt{(AC^2 - AB^2\,\text{sen.}^2B)}}{AC}$	100ª	$\frac{AB\,\text{sen.}B}{\pm\sqrt{(AC^2 - AB^2\,\text{sen.}^2B)}}$
$\frac{\pm\sqrt{(BC^2 - AB^2\,\text{sen.}^2A)}}{BC}$	101ª	$\frac{AB\,\text{sen.}A}{\pm\sqrt{(BC^2 - AB^2\,\text{sen.}^2A)}}$
$-\cos.(A + B)$	102ª	$-\text{tang.}(A + B)$
$\text{sen.}A\,\text{sen.}B - \cos.A\cos.B$	103ª	$\frac{\text{tang.}A + \text{tang.}B}{\text{tang.}A\,\text{tang.}B - 1}$
$\frac{BC - AB\cos.B}{\sqrt{(BC^2 + AB^2 - 2BC \times AB\cos.B)}}$	104ª	$\frac{AB\,\text{sen.}B}{BC - AB\cos.B}$
$\frac{AC - AB\cos.A}{\sqrt{(AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC\cos.A)}}$	105ª	$\frac{AB\,\text{sen.}A}{AC - AB\cos.A}$
$\frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2BC \times AC}$	106ª	$\pm\sqrt{\left(\frac{2BC \times AC}{BC^2 + AC^2 - AB^2}\right)^2 - 1}$
$\frac{BC\,\text{sen.}^2B \mp \cos.B\sqrt{(AC^2 - BC^2\,\text{sen.}^2B)}}{AC}$	107ª	$\frac{BC\cos.B \pm \sqrt{(AC^2 - BC^2\,\text{sen.}^2B)}}{BC\,\text{sen.}B \mp \cot.B\sqrt{(AC^2 - BC^2\,\text{sen.}^2B)}}$
$\frac{AC\,\text{sen.}^2A \mp \cos.A\sqrt{(BC^2 - AC^2\,\text{sen.}^2A)}}{BC}$	108ª	$\frac{AC\cos.A \pm \sqrt{(BC^2 - AC^2\,\text{sen.}^2A)}}{AC\,\text{sen.}A \mp \cot.A\sqrt{(BC^2 - AC^2\,\text{sen.}^2A)}}$

E DE' TRIANGOLI OBLIQUANGOLI, *dimostrate* (224 a 234).

SOLUZIONI.

1ª FORMOLA... lato cercato $=\frac{sen.\text{ ang. opposto} \times \text{lato dato}}{sen.\text{ angolo opposto al lato dato}}$

2ª *sen.* angolo cercato $=\frac{\text{lato opposto} \times sen.\text{ ang. dato}}{\text{lato opposto all' angolo dato}}$

Si cerchi con la 2ª formola l'angolo opposto, e il terzo sarà pur noto

Si cerchi con la 2ª l'angolo opposto, indi con la 1ª il terzo lato

3ª $\begin{cases} tang.a = \frac{2\, sen.\frac{1}{2}\text{ ang. dato}}{\text{diff. de' lati dati}} \sqrt{\text{rettangolo de' lati dati}} \\ \text{lato cercato} = \frac{\text{diff. de' lati dati}}{cos.a}, \quad (200) \end{cases}$

4ª $tang.\frac{1}{2}$ diff. degli ang. ignoti $= cot.\frac{1}{2}$ ang. dato $\times \frac{\text{diff. de' lati dati}}{\text{som. de' lati dati}}$

Sia S la mezza somma dei tre lati.

5ª $cos.\frac{1}{2}$ angolo $=\sqrt{\frac{S(S - \text{lato opposto all' ang. cercato})}{\text{rettangolo de' lati adjacenti all' angolo cercato}}}$

O VERO

6ª $sen.\frac{1}{2}$ angolo $=\sqrt{\frac{(S - \text{un de' lati adjac. all' ang. cercato})\,(S - \text{l'altro lato adjac.})}{\text{rettangolo de' lati adjacenti all' angolo cercato}}}$

L TERZO GRADO, *per mezzo della Trigonometria.*

348 a 361).

$x^2 + px = - q.$	$x^2 - px = - q.$
Se $p^2 < 4q$, x è immaginario.	Se $p^2 < 4q$, x è immaginario.
SOLUZIONE.	**SOLUZIONE.**
$\text{sen.}A = \frac{2}{p} \sqrt{q}.$	$\text{sen.}A = \frac{2}{p} \sqrt{q}.$
$x = - \text{tang.}\frac{1}{2}A \sqrt{q}.$	$x = \text{tang.}\frac{1}{2}A \sqrt{q}.$
$x = - \text{cot.}\frac{1}{2}A \sqrt{q}.$	$x = \text{cot.}\frac{1}{2}A \sqrt{q}.$
$x^3 - px + q = 0.$	$x^3 - px - q = 0.$
Si suppone $4p^3 < 27q^2$.	Si suppone $4p^3 < 27q^2$.
SOLUZIONE.	**SOLUZIONE.**
$\text{sen.}B = \frac{p}{3q} \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$	$\text{sen.}B = \frac{p}{3q} \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$
$\text{tang.}A = \sqrt[3]{\text{tang.}\frac{1}{2}B}.$	$\text{tang.}A = \sqrt[3]{\text{tang.}\frac{1}{2}B}.$
$x = - \frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{\text{sen.}2A}.$	$x = \frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{\text{sen.}2A}.$
$x^3 - px + q = 0.$	$x^3 - px - q = 0.$
SOLUZIONE.	**SOLUZIONE.**
$\text{sen.}3A = \frac{3q}{p} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}.$	$\text{sen.}3A = \frac{3q}{p} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}.$
$x = \text{sen.}A \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$	$x = - \text{sen.}A \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$
$x = \text{sen.}(60^\circ - A) \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$	$x = - \text{sen.}(60^\circ - A) \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$
$x = - \text{sen.}(60^\circ + A) \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$	$x = \text{sen.}(60^\circ + A) \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$

N.07721

...zione de' Triangoli sferici rettangoli,

...dimostrate (418 a 429).

FORMOLE.

...

1ª FORMOLA... $sen.x = sen.\text{ipot.} \times sen.\text{angolo dato}$

2ª $tang.x = tang.\text{ipotenusa} \times cos.\text{angolo dato}$

3ª $cot.x = cos.\text{ipotenusa} \times tang.\text{angolo dato}$

4ª $cos.x = \frac{cos.\text{ipotenusa}}{cos.\text{lato dato}}$

...n- ...

5ª $cos.x = tang.\text{lato dato} \times cot.\text{ipotenusa}$

...sto. 6ª $sen.x = \frac{sen.\text{lato * dato}}{sen.\text{ipotenusa}}$

7ª $sen.x = \frac{sen.\text{lato dato}}{sen.\text{angolo dato}}$

8ª $sen.x = tang.\text{lato dato} \times cot.\text{angolo dato}$

9ª $sen.x = \frac{cos.\text{angolo dato}}{cos.\text{lato dato}}$

10ª $cot.x = cos.\text{angolo dato} \times cot.\text{lato dato}$

11ª $tang.x = tang.\text{angolo dato} \times sen.\text{lato dato}$

12ª $cos.x = sen.\text{angolo dato} \times cos.\text{lato dato}$

13ª $cos.x = \text{rettangolo } cos.\text{lati dati}$

14ª $cot.x = sen.\text{lato adjacente} \times cot.\text{lato opposto}$

15ª $cos.x = \text{rettangolo } cot.\text{angoli dati}$

16ª $cos.x = \frac{cos.\text{angolo opposto}}{sen.\text{angolo adjacente}}$

...ima specie (420). La specie di tutti gli altri, salvi i casi dubbj, è determinata dal ... molto grandi, per aver gli archi con precisione si ricorra alle formole (431 a 437).

trigonometriche di un Triangolo sferico ABC.

Vedi (495).

19ª $\text{sen.}BC = \frac{\text{sen.}AB\ \text{sen.}A}{\text{sen.}C}$

20ª $\text{sen.}BC = \frac{\text{sen.}AC\ \text{sen.}A}{\text{sen.}B}$

21ª $\text{sen.}AC = \frac{\text{sen.}BC\ \text{sen.}B}{\text{sen.}A}$

22ª $\text{sen.}AC = \frac{\text{sen.}AB\ \text{sen.}B}{\text{sen.}C}$

23ª $\text{sen.}AB = \frac{\text{sen.}AC\ \text{sen.}C}{\text{sen.}B}$

24ª $\text{sen.}AB = \frac{\text{sen.}BC\ \text{sen.}C}{\text{sen.}A}$

25ª $\cos.BC = \frac{\cos.A + \cos.B\ \cos.C}{\text{sen.}B\ \text{sen.}C}$

B cos.C | 26ª $\cos.BC = \cos.A\,\text{sen.}AB\,\text{sen.}AC + \cos.AB\,\cos.AC$

27ª $\cos.AC = \frac{\cos.B + \cos.A\ \cos.C}{\text{sen.}A\ \text{sen.}C}$

.A cos.C | 28ª $\cos.AC = \cos.B\,\text{sen.}BC\,\text{sen.}AB + \cos.BC\,\cos.AB$

29ª $\cos.AB = \frac{\cos.C + \cos.A\ \cos.B}{\text{sen.}A\ \text{sen.}B}$

.A cos.B | 30ª $\cos.AB = \cos.C\,\text{sen.}BC\,\text{sen.}AC + \cos.BC\,\cos.AC$

31ª $\text{tang.}BC = \frac{\text{sen.}AB}{\text{sen.}B\ \cot.A + \cos.B\ \cos.AB}$

32ª $\text{tang.}BC = \frac{\text{sen.}AC}{\text{sen.}C\ \cot.A + \cos.C\ \cos.AC}$

33ª $\text{tang.}AC = \frac{\text{sen.}BC}{\text{sen.}C\ \cot.B + \cos.C\ \cos.BC}$

34ª $\text{tang.}AC = \frac{\text{sen.}AB}{\text{sen.}A\ \cot.B + \cos.A\ \cos.AB}$

35ª $\text{tang.}AB = \frac{\text{sen.}AC}{\text{sen.}A\ \cot.C + \cos.A\ \cos.AC}$

36ª $\text{tang.}AB = \frac{\text{sen.}BC}{\text{sen.}B\ \cot.C + \cos.B\ \cos.BC}$

per la risoluzione de' Triangoli sferici obliquangoli.

Vedi (496).

SOLUZIONI.

1ª SOLUZIONE... $sen.\text{angolo cercato} = \frac{sen.\text{lato opposto } sen.\text{angolo dato}}{sen.\text{lato opposto all'angolo dato}}$, (488).

La specie dell'angolo cercato è *dubbia*, quando la regola seguente non la determini : *La mezza somma de' lati dati, e la mezza somma degli angoli opposti, sono sempre della medesima specie.*

2ª
$$\begin{cases} cot.\text{I segmento} = tang.\text{angolo dato } cos.\text{lato adjacente.} \\ cos.\text{II segmento} = \text{cos.I segmento} \times \frac{tang.\text{lato adjacente all'angolo dato}}{tang.\text{lato opposto all'angolo dato}}. \\ \text{I segmento} \pm \text{II segmento} = \text{angolo cercato, (489).} \end{cases}$$

3ª
$$\begin{cases} tang.\text{I segmento} = cos.\text{angolo dato } tang.\text{lato adjacente.} \\ cos.\text{II segmento} = \text{cos.I segmento} \times \frac{cos.\text{lato opposto all'angolo dato}}{cos.\text{lato adjacente all'angolo dato}}. \\ \text{I segmento} \pm \text{II segmento} = \text{lato cercato, (490).} \end{cases}$$

Nelle soluzioni 2ª e 3ª si deve prender *la somma de'segmenti*, quando gli angoli opposti ai lati dati siano della medesima specie; quando nò, *la differenza*. E però questi due casi sono dubbj, sempre che il precedente lo sia. Ma la regola seguente basterà spesso a togliere il dubbio : *Se la somma de' segmenti* $> 180°$, *prendete la differenza; se il segmento II* $>$ *segmento I, prendete la somma.*

4ª $sen.\text{lato cercato} = \frac{sen.\text{angolo opposto } sen.\text{lato dato}}{sen.\text{angolo opposto al lato dato}}$, (492).

La specie del lato cercato è *dubbia*, quando la regola seguente non la determini : *La mezza somma degli angoli dati, e la mezza somma de' lati opposti, sono sempre della medesima specie.*

5ª
$$\begin{cases} tang.\text{I segmento} = tang.\text{lato dato } cos.\text{angolo adjacente.} \\ sen.\text{II segmento} = sen.\text{I segmento} \times \frac{tang.\text{angolo adjacente al lato dato}}{tang.\text{angolo opposto al lato dato}}. \\ \text{I segmento} \pm \text{II segmento} = \text{lato cercato, (493).} \end{cases}$$

6ª
$$\begin{cases} cot.\text{I segmento} = cos.\text{lato dato } tang.\text{angolo adjacente.} \\ sen.\text{II segmento} = sen.\text{I segmento} \times \frac{cos.\text{angolo opposto al lato dato}}{cos.\text{angolo adjacente al lato dato}}. \\ \text{I segmento} \pm \text{II segmento} = \text{angolo cercato, (494).} \end{cases}$$

Nelle soluzioni 5ª e 6ª, se gli angoli dati sono della medesima specie, prendete *la somma de' segmenti;* se nò, *la differenza.* Ma il II segmento ha due valori : il maggior valore dee rigettarsi, se dia *la somma* $> 180°$, o se dia *la differenza* negativa. In generale, *le specie de' segmenti sono fra esse, come le specie de' lati opposti agli angoli dati sono fra esse.* E però questi due casi sono dubbj, quando il precedente lo sia.

Continua la Tavola nel foglio seguente.

SOLUZIONI.

Si chiami *lato dato* il lato opposto all'angolo cercato; *base*, l'altro lato dato.

$tang.$I segmento $=$ $cos.$angolo dato $tang.$lato dato.

II segmento $=$ base $-$ I segmento.

$tang.$angolo cercato $=$ $tang.$angolo dato $\times \frac{sen.\text{I segmento}}{sen.\text{II segmento}}$, (472).

Se I segmento $>$ base, $sen.$II segmento sarà negativo.

Si nomini *base* uno, a piacimento, de' lati dati; *lato dato* l'altro.

$tang.$I segmento $=$ $cos.$angolo dato $tang.$lato dato.

II segmento $=$ base $\backsim$ I segmento.

$cos.$lato cercato $=$ $cos.$lato dato $\times \frac{cos.\text{II segmento}}{cos.\text{I segmento}}$, (477).

Se il lato cercato è piccolo, per averlo con esattezza si ricorra alla soluzione (478).

Si chiami *angolo dato* l'angolo opposto al lato cercato; *angolo verticale*, l'altro angolo dato.

$cot.$I segmento $=$ $tang.$angolo dato $cos.$lato dato.

II segmento $=$ angolo verticale $\backsim$ I segmento.

$tang.$lato cercato $=$ $tang.$lato dato $\times \frac{cos.\text{I segmento}}{cos.\text{II segmento}}$, (482).

Si nomini *angolo verticale* l'uno, a piacimento, degli angoli dati; *angolo dato* l'altro.

$cot.$I segmento $=$ $tang.$angolo dato $cos.$lato dato.

II segmento $=$ angolo verticale $-$ I segmento.

$cos.$angolo cercato $=$ $cos.$angolo dato $\times \frac{sen.\text{II segmento}}{sen.\text{I segmento}}$, (486).

Se I segmento $>$ angolo verticale, $sen.$II segmento sarà negativo.
Se l'angolo cercato è piccolo, si ricorra alla soluzione (487).

Nomino a, b, c i tre lati; s, la loro mezza somma: a, il lato opposto all'angolo cercato.

$sen.\frac{1}{2}$angolo cercato $= \sqrt{\frac{sen.(s-b)\ sen.(s-c)}{sen.b \times sen.c}}$, (463);

O VERO

$cos.\frac{1}{2}$angolo cercato $= \sqrt{\frac{sen.s \times sen.(s-a)}{sen.b \times sen.c}}$, (464).

A, B, C sono i tre angoli; S, la loro mezza somma: A, l'angolo opposto al lato cercato.

$sen.\frac{1}{2}$lato cercato $= \sqrt{-\frac{cos.S\ cos.(S \backsim A)}{sen.B\ sen.C}}$, (467);

O VERO

$cos.\frac{1}{2}$lato cercato $= \sqrt{\frac{cos.(S \backsim B)\ cos.(S \backsim C)}{sen.B\ sen.C}}$, (468).

i obliquangoli, col mezzo delle analogie di Neper.

Vedi (497).

SOLUZIONI.

OLUZIONE

$$\begin{cases} tang.\tfrac{1}{2}a = cot.\tfrac{1}{2}\text{angolo dato} \times \dfrac{sen.\text{differenza lati dati}}{sen.\text{somma lati dati}}. \\ \text{segmento maggiore} = \tfrac{1}{2}\text{angolo dato} + \tfrac{1}{2}a. \\ \text{segmento minore} = \tfrac{1}{2}\text{angolo dato} - \tfrac{1}{2}a. \\ cot.\text{ang.cercato} = cos.\text{lato adjac.}\,tang.\text{segm. adj.}\ (473). \end{cases}$$

In quest'ultima equazione il segmento maggiore s' impiegherà col lato maggiore, il minore col minore: e se il segmento minore risulta negativo e $< 90°$, si farà negativa la *tang.* di esso.

$$tang.\tfrac{1}{2}\text{diff. angoli cercati} = \frac{cot.\tfrac{1}{2}\text{angolo dato}\ sen.\tfrac{1}{2}\text{ differenza lati dati}}{sen.\tfrac{1}{2}\text{ somma lati dati}}.$$

$$tang.\tfrac{1}{2}\text{som. angoli cercati} = \frac{cot.\tfrac{1}{2}\text{ angolo dato}\ cos.\tfrac{1}{2}\text{ diff. lati dati}}{cos.\tfrac{1}{2}\text{ somma lati dati}},\ (474).$$

$$tang.\tfrac{1}{2}a = tang.\tfrac{1}{2}\text{lato dato} \times \frac{sen.\text{ differenza angoli dati}}{sen.\text{ somma angoli dati}}.$$

$$\text{segmento maggiore} = \tfrac{1}{2}\text{ lato dato} + \tfrac{1}{2}a.$$

$$\text{segmento minore} = \tfrac{1}{2}\text{lato dato} - \tfrac{1}{2}a.$$

$$cot.\text{lato cercato} = cos.\text{ang. adjacente}\ cot.\text{segm. adjacente},\ (483).$$

In quest'ultima equazione l'angolo minore s' impiegherà col segmento maggiore, l'angolo maggiore col segmento minore: e se questo risulta negativo e $< 90°$, si farà negativa la *cot.* di esso.

$$tang.\tfrac{1}{2}\text{ diff. lati ignoti} = \frac{tang.\tfrac{1}{2}\text{ lato dato}\ sen.\tfrac{1}{2}\text{ differenza angoli dati}}{sen.\tfrac{1}{2}\text{ somma angoli dati}}.$$

$$tang.\tfrac{1}{2}\text{somma lati ignoti} = \frac{tang.\tfrac{1}{2}\text{ lato dato}\ cos.\tfrac{1}{2}\text{ diff. angoli dati}}{cos.\tfrac{1}{2}\text{ somma angoli dati}},\ (484).$$

Continua la Tavola nel foglio seguen

SOLUZIONI.

$tang.\frac{1}{2}$ lato cercato $=$ $tang.\frac{1}{2}$ diff. lati dati $\times$ $\frac{sen.\frac{1}{2}\text{ somma angoli dati}}{sen.\frac{1}{2}\text{ differ. angoli dati}}$.

O VERO

$tang.\frac{1}{2}$ lato cercato $=$ $tang.\frac{1}{2}$ som. lati dati $\times$ $\frac{cos.\frac{1}{2}\text{ som. ang. dati}}{cos.\frac{1}{2}\text{ diff. ang. dati}}$, (484).

$tang.\frac{1}{2}$ angolo cercato $=$ $cot.\frac{1}{2}$ differ. angoli dati $\times$ $\frac{sen.\frac{1}{2}\text{ diff. lati dati}}{sen.\frac{1}{2}\text{ som. lati dati}}$.

O VERO

$tang.\frac{1}{2}$ ang. cercato $=$ $cot.\frac{1}{2}$ som. ang. dati $\times$ $\frac{cos.\frac{1}{2}\text{ diff. lati dati}}{cos.\frac{1}{2}\text{ som. lati dati}}$, (474).

Si nomini *base* l'uno, a piacimento, de' lati adjacenti all'angolo cercato, *lati* i due altri.

$tang.\frac{1}{2}a$ $=$ $tang.\frac{1}{2}$ somma lati $tang.\frac{1}{2}$ differenza lati $cot.\frac{1}{2}$ base.

segmento maggiore $=$ $\frac{1}{2}$ base $+$ $\frac{1}{2}a$.

segmento minore $=$ $\frac{1}{2}$ base $-$ $\frac{1}{2}a$.

cos. ang. cercato $=$ *tang.* segm. adjacente *cot.* lato adjacente, (465).

In quest' ultima equazione il segmento maggiore s' impiegherà col lato maggiore, il minore col minore: e se il segmento minore risulta negativo e $< 90°$, si farà negativa la *tang.* di esso.

Si nomini *angolo verticale* l'uno, a piacimento, degli adjacenti al lato cercato; *angoli* semplicemente, gli altri due.

$tang.\frac{1}{2}a$ $=$ $tang.\frac{1}{2}$ som. angoli $tang.\frac{1}{2}$ diff. angoli *tang.* ang. verticale.

segmento maggiore $=$ $\frac{1}{2}$ angolo verticale $+$ $\frac{1}{2}a$.

segmento minore $=$ $\frac{1}{2}$ angolo verticale $-$ $\frac{1}{2}a$.

cos. lato cercato $=$ *cot.* segm. adjacente *cot.* ang. adjacente, (469).

In quest' ultima equazione il segmento maggiore s' impiegherà coll' angolo minore, il segmento minore coll' angolo maggiore: e se il segmento minore risulta negativo e $< 90°$, si farà negativa la *cot.* di esso.